5. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 443 с. 6. Шефер Х. Топологические векторные пространства.–М.: Мир, 1971. – 352 с. 7. Banaschewski B. Minimal topological algebras.– Math. Ann., 1974, N211, p.107–114. 8. Birkhoff Garrett. A note on topological groups.– Com. Math., 1936, N3, p.427–430. 9. Engelking R. General Topology. Warszawa, 1977. 10. Kakutani Sizuo. Über die Metrisation der topologischen Gruppen.– Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1936, N12, p. 82–84.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.84

УДК 517.564.3:530.145

П.І.Тацуняк

ФОРМУЛИ МНОЖЕННЯ ФУНКЦІЇ МАКДОНАЛЬДА В АКСІОМАТИЧНІЙ КВАНТОВІЙ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Для вільної скалярної теорії поля одержано [2] інтегральне представлення функцій Вайтмана W_{2n} вигляду

$$W_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = i^n \sum_{P'} \Delta_2^+(x_1 - x_2)\Delta_2^+(x_3 - x_4)\dots\Delta_2^+(x_{2n-1} - x_{2n}) =$$

$$= \int_0^\infty \prod_{s<\ell=1,3,\dots,2n-1} da_{s\ell} \sum_{P'} \Delta_{n+1}^+(x_1 - x_2, x_3 - x_4, \dots, x_{2n-1} - x_{2n}; a_{s\ell}), \tag{I}$$

де $\sum_{P'}$ сума по всіх перестановках $(x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_j, \dots x_{2n})$ за умови $\{i-j<0 \mid x_i - x_j\}$, а Δ_{n+1}^+ – сингулярні функції Челлена – Вільгельмсона [2];

$$\Delta_{n+1}^+(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; a_{s\ell}) = \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n}} \int \prod_{s\leq\ell=1} dk_s \theta(k_{s0}) \delta(k_s k_\ell + a_{s\ell}) \exp\Big(i\sum_{r=1}^{n} k_r \xi_r\Big); \tag{2}$$

$\delta(k_s, k_\ell)$ – функція Дірака; $\theta(k_{s0})$ – функція стрибка Хевісайда; $x_i - x_{i+1} = \xi_i$ – вектори координат у метриці Мінковського з квадратом $\xi_i^2 = \xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2 + \xi_{i3}^2 - \xi_{i0}^2$ та їх фур"є-координати $k_i(k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i0})$; $k_i^2 < 0$; $k_{i0} > 0$, скалярні добутки яких $k_s k_\ell = -a_{s\ell} < 0$ – "масові" параметри представлення. Для вільного поля $k_s^2 = -m^2$; $(s = 1, 2, \dots, n)$.

Сингулярні функції Δ_2^+, Δ_3^+, а також для вільного поля Δ_4^+ обмежені явно [2, 3] і виражаються через функцію Макдональда

$$\Delta_2^+(\xi;m^2)=\frac{m^2}{(2\pi)^2 i}\,\frac{K_1(\sqrt{m^2\xi^2})}{\sqrt{m^2\xi^2}}, \tag{3}$$

$$\Delta_3^+(\xi_1,\xi_2;a_{11},a_{22},a_{12})=\frac{i\theta(-D_2)\sqrt{-D_2}}{(2\pi)^4\sqrt{R}}\left[K_0\left(\sqrt{Q+\sqrt{R}}\right)-K_0\left(\sqrt{Q-\sqrt{R}}\right)\right], \tag{4}$$

$$Q=\sum_{s,\ell=1}^{2}a_{s\ell}\xi_s\xi_\ell\ ;\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=m^4-a_{12}^2, \tag{4а}$$

$$R=\sqrt{\sum_{s<\ell=1}^{2}(a_{s\ell}^2-a_{ss}a_{\ell\ell})\left[(\xi_s\xi_\ell)^2-\xi_s^2\xi_\ell^2\right]}\ . \tag{4б}$$

Для Δ_4^+ інтеграція виконується до кінця тільки у випадку вільного поля:

$$\Delta_4^+(\xi_1,\xi_2,\xi_3;a_{s\ell})=\frac{\theta(-D_2)}{2(2\pi)^6\sqrt{R'}}\left[K_0\left(\sqrt{Q'+\sqrt{R'}}\right)-K_0\left(\sqrt{Q'-\sqrt{R'}}\right)\right], \tag{5}$$

де сума у виразах Q', R' виду (4а,б) береться до $s,\ell=3$.

Функція Δ_5^+ виражається через K_0 інтегралом складнішого виду. Функції $\Delta_n^+;(n>5)$ з огляду на розмірність простору виражаються через Δ_5^+ з допомогою редукційної формули [3].

Якщо (І) обмежитись першим доданком, то одержимо

$$i^n\Delta_2^+(\xi_1)\Delta_2^+(\xi_3)\dots\Delta_2^+(\xi_{2n-1})=\int_0^\infty\prod_{s<\ell=1,3,\dots,2n-1}da_{s\ell}\,\Delta_{n+1}^+(\xi_1,\xi_3,\dots,\xi_{2n-1};m^2,a_{s\ell}). \tag{6}$$

Враховуючи явний вид сингулярних функцій (3)-(5) в (6), можемо одержати формули кратного множення функції Макдональда K_1 складного аргумента від матричних елементів $(AX)_{i\ell}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\xi_\ell$ із векторів простору Мінковського. Особливо простий вид формули множення мають у випадку $n=2,3$.

І. Для $n=2$ із (6) дістаємо формулу множення:

$$m^2K_1(m\sqrt{\xi_1^2})K_1(m\sqrt{\xi_2^2})=\frac{-\sqrt{\xi_1^2\xi_2^2}}{2\sqrt{(\xi_1\xi_2)^2-\xi_1^2\xi_2^2}}\int_{m^2}^{\infty}da_{12}\left[K_0\left(\sqrt{Q+\sqrt{R}}\right)-K_0\left(\sqrt{Q-\sqrt{R}}\right)\right]. \tag{7}$$

Оскільки $$\frac{dK_0(m\sqrt{\xi^2})}{d\xi^2}=\frac{dK_0(m\sqrt{\xi^2})}{d(m\sqrt{\xi^2})}\cdot\frac{m}{2\sqrt{\xi^2}}=-\frac{m}{2\sqrt{\xi^2}}K_1(m\sqrt{\xi^2}), \tag{8}$$

то з (7) одержуємо

$$\frac{dK_0(m\sqrt{\xi_1^2})}{d\xi_1^2}\cdot\frac{dK_0(m\sqrt{\xi_2^2})}{d\xi_2^2}=\frac{-1}{8\sqrt{(\xi_1\xi_2)^2-\xi_1^2\xi_2^2}}\int_{m^2}^{\infty}da_{12}\left[K_0\left(\sqrt{Q+\sqrt{R}}\right)-K_0\left(\sqrt{Q-\sqrt{R}}\right)\right]; \tag{7а}$$

Перевірити формули (7) і (7а) з допомогою прямого інтегрування важко, однак, прийнявши $\xi_1 = \xi_2$, інтегрування виконується легко. Тому що при $\xi_1 \to \xi_2$ у правій частині (7) маємо неозначеність типу $\frac{0}{0}$, позначивши $\sqrt{(\xi_1\xi_2)^2-\xi_1^2\xi_2^2}=\alpha$, $\sqrt{Q\pm 2\alpha\sqrt{a^2-m^4}}=Z_\pm$ застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{K_0(Z_+)-K_0(Z_-)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{dK_0(Z_+)}{d\alpha}-\frac{dK_0(Z_-)}{d\alpha}\right]=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{dK_0(Z_+)}{dZ_+}\frac{dZ_+}{d\alpha}-\frac{dK_0(Z_-)}{dZ_-}\frac{dZ_-}{d\alpha}\right]=-\lim_{\alpha\to 0}\left[K_1(Z_+)\frac{\sqrt{a^2-m^4}}{\sqrt{Q+2\alpha\sqrt{a^2-m^4}}}+\right.$$

$$\left.+K_1(Z_-)\frac{\sqrt{a^2-m^4}}{\sqrt{Q-2\alpha\sqrt{a^2-m^2}}}\right]=-2\frac{\sqrt{a^2-m^4}}{\sqrt{2(a+m^2)\xi^2}}K_1\left(\sqrt{2(a+m^2)\xi^2}\right). \tag{9}$$

Переходячи в (7) або (7а) до границі з використанням (9), запишемо

$$\left[\frac{dK_0(m\sqrt{\xi^2})}{d\xi^2}\right]^2=\frac{m^2}{4\xi^2}K_1^2(m\sqrt{\xi^2})=\frac{1}{4}\int_{m^2}^{\infty}\sqrt{a^2-m^4}\,\frac{K_1(\sqrt{2(a+m^2)\xi^2})}{\sqrt{2(a+m^2)\xi^2}}\,da. \tag{10}$$

Для спрощення виразу (9) приймемо $m^2=1$; $\sqrt{\xi^2}=t>0$:

$$K_1^2(t)=\frac{t}{\sqrt{2}}\int_1^{\infty}\sqrt{a-1}\,K_1(t\sqrt{2(a+1)})\,da$$

і, виконуючи заміну змінної інтегрування $a+1=2u$, одержимо відому формулу квадрата функції Макдональда [1]:

$$K_1^2(t)=2t\int_1^{\infty}\sqrt{u-1}\,K_1(2t\sqrt{u})\,du\,, \tag{11}$$

що можна вважати критерієм правильності формул множення (7), (7а).

2. Розглянемо тепер випадок потрійного множення функції Макдональда. Для $n = 3$ із (6) дістаємо представлення у виді потрійного інтеграла

$$\Delta_2^+(\xi_1)\Delta_2^+(\xi_3)\Delta_2^+(\xi_5)=i\int_0^{\infty}da_{13}da_{15}da_{35}\,\Delta_4^+(\xi_1,\xi_3,\xi_5;m^2,m^2,m^2,a_{13},a_{15},a_{35}), \tag{12}$$

в якому з допомогою (3), (5) одержуємо формулу множення

$$im^3K_1(m\sqrt{\xi_1^2})K_1(m\sqrt{\xi_3^2})K_1(m\sqrt{\xi_5^2})=\frac{\sqrt{\xi_1^2\xi_3^2\xi_5^2}}{4}\int_{m^2}^{\infty}\frac{da_{13}da_{15}da_{35}}{\sqrt{R'}}\left[K_0(\sqrt{Q'+\sqrt{R'}})-K_0(\sqrt{Q'-\sqrt{R'}})\right]. \tag{13}$$

Використавши (8) в (I3), запишемо

$$\frac{dK_0(m\sqrt{\xi_1^2})}{d\xi_1^2}\cdot\frac{dK_0(m\sqrt{\xi_3^2})}{d\xi_3^2}\cdot\frac{dK_0(m\sqrt{\xi_5^2})}{d\xi_5^2}=\frac{i}{32}\int_{m^2}^{\infty}da_{13}da_{15}da_{35}\frac{\Theta(D_3')}{\sqrt{R'}}\times$$

$$\times\left[K_0(\sqrt{Q'+\sqrt{R'}})-K_0(\sqrt{Q'-\sqrt{R'}})\right], \tag{I3a}$$

де $\Theta(D_3')=\Theta\left[m^6+2a_{13}a_{15}a_{35}-m^2(a_{13}^2+a_{15}^2+a_{35}^2)\right]$. (I4)

Отже, потрійний добуток функцій Макдональда виражається потрійним інтегралом по гіперповерхні, що визначається нерівністю (I4).

Перетворимо аргумент Θ – функції (I4) до виду

$$\Theta\left[-(a_{13}-A_{13}^+)(a_{13}-A_{13}^-)\right], \tag{I5}$$

де

$$A_{13}^{\pm}=\frac{1}{m^2}\left(a_{15}a_{35}\pm\sqrt{(a_{15}^2-m^4)(a_{35}^2-m^4)}\right). \tag{I5a}$$

Щоб нерівність (I5) виконувалась, вирази $a_{13}-A_{13}^+$ та $a_{13}-A_{13}^-$ повинні бути різних знаків. Звідси одержуємо межі інтегрування для a_{13}: $A_{13}^-\leq a_{13}\leq A_{13}^+$. Запишемо (I3) як

$$K_1(m\sqrt{\xi_1^2})K_1(m\sqrt{\xi_3^2})K_1(m\sqrt{\xi_5^2})=\frac{\sqrt{\xi_1^2\xi_3^2\xi_5^2}}{4i}\int_{m_2}^{\infty}da_{15}da_{35}\int_{A_{13}^-}^{A_{13}^+}\frac{da_{13}}{\sqrt{R'}}\left[K_0(\sqrt{Q'+\sqrt{R'}})-K_0(\sqrt{Q'-\sqrt{R'}})\right]. \tag{I6}$$

У границі $\xi_1=\xi_3=\xi_5$ під інтегралом знову дістаємо невизначеність $\frac{0}{0}$, яку можемо розкрити процедурою (9), що дає

$$\left[\frac{dK_0(m\sqrt{\xi^2})}{d\xi^2}\right]^3=\frac{1}{16i}\int_{m_2}^{\infty}da_{15}da_{35}\int_{A_{13}^-}^{A_{13}^+}da_{13}\,\frac{K_1(\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2})}{\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2}}. \tag{I7}$$

Оскільки $\dfrac{dK_0(\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2})}{da_{13}}=-\dfrac{\xi^2K_1(\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2})}{\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2}}$,

то з (I7) маємо

$$\left[\frac{dK_0(m\sqrt{\xi^2})}{d\xi^2}\right]^3=\frac{i}{16\xi^2}\int_{m^2}^{\infty}da_{15}da_{35}\int_{A_{13}^-}^{A_{13}^+}da_{13}\,\frac{dK_0(\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2})}{da_{13}}= \tag{I8}$$

$$=\frac{i}{16\xi^2}\int_{m_2}^{\infty}da_{15}da_{35}\left[K_0\left(\sqrt{[3m^2+2(A_{13}^++a_{15}+a_{35})]\xi^2}\right)-K_0\left(\sqrt{[3m^2+2(A_{13}^-+a_{15}+a_{35})]\xi^2}\right)\right],$$

або

$$\left[K_1(m\sqrt{\xi^2})\right]^3=\frac{\sqrt{\xi^2}}{2m^3 i}\int\limits_{m^2}^{\infty} da_{15}\,da_{35}\left[K_0\left(\sqrt{[3m^2+2(A_{13}^{+}+a_{15}+a_{35})]\xi^2}\right)-K_0\left(\sqrt{[3m^2+2(A_{13}^{-}+a_{15}+a_{35})]\xi^2}\right)\right]. \qquad (18a)$$

Прийнявши у (18а) $m^2=1$; $\sqrt{\xi^2}=t>0$; $a_{15}=u_1$; $a_{35}=u_2$ і врахувавши (15а), запишемо формулу

$$[K_1(t)]^3=\frac{t}{2i}\int\limits_{1}^{\infty} du_1\,du_2\Big[K_0\big(t\sqrt{3+2(u_1+u_2+u_1u_2)+\sqrt{(u_1^2-1)(u_2^2-1)}}\big)-$$
$$-K_0\big(t\sqrt{3+2(u_1+u_2+u_1u_2-\sqrt{(u_1^2-1)(u_2^2-1)})}\big)\Big], \qquad (19)$$

яку на відміну від (II) прямим обчисленням перевірити важко.

Вищі степені $[K_1(t)]^n$; $(n>3)$ можна одержати з (6), редукційної формули та представлення для Δ_5^+, однак тоді наявні складні $n+1$ кратні інтеграли, незручні для користування.

I. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды, специальные функции. - М.: Наука, 1983. - 750 с. 2. Тапуняк Ш.И. Интегральное представление функций Вайтмана для свободной скалярной теории поля. - Львов, 1983. - 48 с. - Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 819. Ук. 84. Деп. 3. Källen G., Wilhelmsson H. Generalized singular functions. - Mat. Fys. Skr. Dan. Sel. Vid., 1959, 1, N9, p.3-28.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.84