УДК 517.51

Л.М.Лісевич

ПРО ОДИН ВИПАДОК НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ВІД МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Відомо, що обмежений інтеграл від рівномірної майже періодичної (РМП) функції є знову РМП функція.

Розглядаємо випадок, коли невизначений інтеграл від МП функції $f(x)$ має вигляд

$$\int_0^x f(t)\,dt = cx + g(x). \tag{1}$$

Лема 1. Якщо $f(x)$ – РМП функція, а $g(x)$ обмежена на всій дійсній осі, то $g(x)$ також РМП функція.

Доведення. Запишемо співвідношення (1) у вигляді

$$\int_0^x (f(t)-c)\,dt = g(x). \tag{2}$$

Функція $f(x)-c$ є РМП функцією як сума РМП функцій. За умовою $g(x)$ обмежена, тобто обмежений інтеграл (2). Тоді $g(x)$ – РМП функція.

Лема 2. Якщо $f(x)$ – S^P – МП функція, для якої виконується рівність (1) і

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

то

$$\int_0^x f_h(t)\,dt = cx + g_h(x) - \frac{1}{h}\int_0^h g(s)\,ds. \tag{3}$$

Доведення. Маємо

$$F_h(x) = \int_0^x f_h(t)\,dt = \int_0^x \left\{\frac{1}{h}\int_0^h f(t+s)\,ds\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h ds \int_0^x f(t+s)\,dt = \frac{1}{h}\int_0^h ds \int_s^{s+x} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \left\{c(x+s) + g(x+s) - cs - g(s)\right\}ds =$$

$$= cx + g_h(x) - \frac{1}{h}\int_0^h g(s)\,ds.$$

Лема доведена.

9-2748

Теорема. Нехай $f(x) - S^p$ - МП функція, для якої наявне співвідношення (I). Тоді, якщо $g_h(x)$ обмежена, $g(x)$ є РМП функцією.

Доведення. Відомо, коли $f(x) - S^p$ — МП функція, то $f_h(x)$ — РМП функція. З обмеженості $g_h(x)$ на основі лем I і 2 випливає, що $g_h(x)$ РМП функція. Далі маємо

$$F_h(x)=\frac{1}{h}\int_0^h dS\int_S^{x+S} f(t)dt =$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\left(\int_S^0+\int_0^x+\int_x^{x+S}\right)f(t)dt\right\}dS=$$

$$=cx+g(x)+\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\left(\int_x^{x+S}-\int_0^S\right)f(t)dt\right\}dS. \tag{4}$$

Порівнюючи (3) і (4), отримуємо

$$g_h(x)-\frac{1}{h}\int_0^h g(S)dS=g(x)+\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\left(\int_x^{x+S}-\int_0^S\right)f(t)dt\right\}dS.$$

Звідси

$$g_h(x)-g(x)=\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\left(\int_x^{x+S}-\int_0^S\right)f(t)dt\right\}dS+\frac{1}{h}\int_0^h g(S)dS=$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\int_0^S(f(t+x)-f(t))dt\right\}dS+\frac{1}{h}\int_0^h g(S)dS=$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\int_0^S(f(t+x)-f(t))dt+\int_0^S f(t)dt-cs\right\}dS=$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\int_0^S f(t+x)dt-cs\right\}dS.$$

Як відомо, інтеграл $\int_0^S f(t+x)\,dt$ — рівномірно абсолютно неперервна функція на довільній множині дійсної осі Ox. Тому

$$\lim_{h\to 0}\int_0^h|f(t+x)|dt=0$$

і маємо

$$|g_h(x)-g(x)|\leq\frac{1}{h}\int_0^h\left|\int_0^S f(t+x)dt-cs\right|dS\leq$$

$$\leq\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\int_0^h|f(t+x)|dt+|ch|\right\}dS.$$

Звідси

$$\lim_{h\to 0}|g_h(x)-g(x)|=0, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

тобто $g(x)$ – рівномірна границя послідовності РМП функцій $g_h(x)$. Тоді за відомою теоремою $g(x)$ є РМП функція. Теорема доведена.

1. К о в а н ь к о А.С., Л и с е в и ч Л.Н. О некоторых свойствах интеграла и производности от S^p – почти периодической функции.– Вопр. мат. физ. и теории функций, 1964, № 11, с. 63-69. 2. Л е в и т а н Б.М. Почти периодические функции. – М., 1953. – 216 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.85

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

БАГАТОВИМІРНИЙ РОЗПОДІЛ ПОХИБОК

Нехай

$$(x_{11},\dots,x_{m1}),\dots,(x_{1n},\dots,x_{mn}) - \tag{1}$$

результати n незалежних вимірювань деякої m-вимірної величини $(a_1,\dots,a_m)$, виконані в однакових умовах, без систематичної похибки та з однаковою для кожної компоненти своєю точністю. За невідомі значення компоненти $(a_1,\dots,a_m)$ вимірюваної величини згідно з правилом обгрунтування середнього арифметичного в законі великих чисел приймаємо наближено середні арифметичні

$$\bar{x}_1=\frac{x_{11}+\dots+x_{1n}}{n},\dots,\bar{x}_m=\frac{x_{m1}+\dots+x_{mn}}{n}. \tag{2}$$

Допущені похибки вимірювань

$$x_{11}-a_1,\dots,x_{m1}-a_m;\dots;x_{1n}-a_1,\dots,x_{mn}-a_m - \tag{3}$$

випадкові та абсолютно неперервні. Густину розподілу ймовірностей компонент випадкової похибки позначимо через $\varphi(\cdot,\dots,\cdot)$. Очевидно, що похибки (3) обмежені. Тому

$$\varphi(\pm\infty;\dots;)=0,\dots,\varphi(;\dots;\pm\infty)=0. \tag{4}$$