Звідси

$$\lim_{h\to 0} |g_h(x) - g(x)| = 0, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

тобто $g(x)$ – рівномірна границя послідовності РМП функцій $g_h(x)$. Тоді за відомою теоремою $g(x)$ є РМП функція. Теорема доведена.

1. Кованько А.С., Лисевич Л.Н. О некоторых свойствах интеграла и производности от S^p – почти периодической функции.– Вопр. мат. физ. и теории функций, 1964, № 11, с. 63-69. 2. Левитан Б.М. Почти периодические функции. – М., 1953. – 216 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.85

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

БАГАТОВИМІРНИЙ РОЗПОДІЛ ПОХИБОК

Нехай

$$(x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, (x_{1n}, \ldots, x_{mn}) - \tag{1}$$

результати n незалежних вимірювань деякої m-вимірної величини $(a_1, \ldots, a_m)$, виконані в однакових умовах, без систематичної похибки та з однаковою для кожної компоненти своєю точністю. За невідомі значення компоненти $(a_1, \ldots, a_m)$ вимірюваної величини згідно з правилом обгрунтування середнього арифметичного в законі великих чисел приймаємо наближено середні арифметичні

$$\bar{x}_1 = \frac{x_{11} + \ldots + x_{1n}}{n}, \ldots, \bar{x}_m = \frac{x_{m1} + \ldots + x_{mn}}{n}. \tag{2}$$

Допущені похибки вимірювань

$$x_{11} - a_1, \ldots, x_{m1} - a_m; \ldots; x_{1n} - a_1, \ldots, x_{mn} - a_m - \tag{3}$$

випадкові та абсолютно неперервні. Густину розподілу ймовірностей компонент випадкової похибки позначимо через $\varphi(\cdot, \ldots, \cdot)$. Очевидно, що похибки (3) обмежені. Тому

$$\varphi(\pm\infty; \ldots;) = 0, \ldots, \varphi(; \ldots; \pm\infty) = 0. \tag{4}$$

Оскільки вимірювання (I) незалежні, то сумісна густина похибок (3)

$$\varphi(x_{11}-a_1,\dots,x_{m1}-a_m)\cdot\ldots\cdot\varphi(x_{1n}-a_1,\dots,x_{mn}-a_m). \tag{5}$$

Функцію $\varphi(\cdot,\dots,\cdot)$ визначаємо з умови максимуму логарифма функції правдоподібності (5)

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\varphi(x_{1i}-a_1,\dots,x_{mi}-a_m). \tag{6}$$

Необхідні умови екстремуму функції (6) записуємо як

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln\varphi(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1}\Big|_{(x_{1i}-a_1,\dots,x_{mi}-a_m)}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln\varphi(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_m}\Big|_{(x_{1i}-a_1,\dots,x_{mi}-a_m)}=0.\end{gathered} \tag{7}$$

Рівняння (7) повинні задовольняти значення (2); $a_1=\bar{x}_1,\dots,a_m=\bar{x}_m$. При цьому

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-a_1)=\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)=0,\dots,\sum_{i=1}^{n}(x_{mi}-a_m)=\sum_{i=1}^{n}(x_{mi}-\bar{x}_m)=0. \tag{8}$$

Приймемо

$$\begin{gathered}\frac{\partial\ln\varphi(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_j}=\Psi_j(x_1,\dots,x_m),\\ -\infty<x_1,\dots,x_m<\infty,\ (j=1,\dots,m)\end{gathered} \tag{9}$$

і запишемо рівняння (7) у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\Psi_j(x_{1i}-a_1,\dots,x_{mi}-a_m)=0,\ (j=1,\dots,m). \tag{10}$$

Рівності (10) і (8) можна сформулювати так. Сума значень функції $\Psi_j,\ (j=1,\dots,m)$ дорівнює нулю, коли сума значень кожного аргументу дорівнює нулю. Зокрема для всяких дійсних $t_1,\dots,t_m$

$$\Psi_j(t_1,\dots,t_m)+\Psi_j(-t_1,\dots,-t_m)=0,\ (j=1,\dots,m).$$

Функція $\Psi_j(\cdot,\dots,\cdot)$ змінює знак, якщо всі її аргументи його змінюють. Функція Ψ глобально непарна.

Оскільки для довільних дійсних $t_1,\dots,t_m$ і $\tau_1,\dots,\tau_m$

$$\Psi_j(t_1,\dots,t_m)+\Psi_j(\tau_1,\dots,\tau_m)+\Psi_j(-t_1-\tau_1,\dots,-t_m-\tau_m)=0$$

та за глобальною непарністю функції

$$\Psi_j(t_1,\ldots,t_m)+\Psi_j(\tau_1,\ldots,\tau_m)=\Psi_j(t_1+\tau_1,\ldots,t_m+\tau_m),$$

то функція

$$\frac{\partial\Psi_j(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_k}=\omega_{jk}(x_1,\ldots,x_m)$$

задовольняє умови

$$\omega_{jk}(t_1,\ldots,t_m)=\omega_{jk}(t_1+\tau_1,\ldots,t_m+\tau_m),$$

$$\omega_{jk}(\tau_1,\ldots,\tau_m)=\omega_{jk}(t_1+\tau_1,\ldots,t_m+\tau_m).$$

Звідси

$$\omega_{jk}(t_1,\ldots,t_m)=\omega_{jk}(\tau_1,\ldots,\tau_m),\ (j,k=1,\ldots,m),$$

похідна Ψ_j стосовно k -го аргумента стала. Отже, кожна функція Ψ_j лінійна відносно своїх аргументів. Таким чином, співвідношення (9) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial\ln\varphi(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_j}=a_{j1}x_1+\ldots+a_{jm}x_m,\ (j=1,\ldots,m), \tag{II}$$

де a_{jk} - сталі. Оскільки вирази справа - це похідні тієї ж самої функції, та

$$\frac{\partial(a_{j1}x_1+\ldots+a_{jm}x_m)}{\partial x_k}=\frac{\partial(a_{k1}x_1+\ldots+a_{km}x_m)}{\partial x_j},$$

то $a_{jk}=a_{kj}$; матриця $\{a_{jk}\}$ - симетрична.

Із рівняння (II) випливає, що

$$\ln\varphi(x_1,\ldots,x_m)=a_{jj}\frac{x_j^2}{2}+\sum_{k\neq j}a_{jk}x_jx_k+c_j(\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots).$$

Тому що останній вираз повинен мати вигляд виразу справа при всіх $j=1,\ldots,m$, то

$$\ln\varphi(x_1,\ldots,x_m)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}a_{jj}x_j^2+\sum_{1=j<k=m}a_{jk}x_jx_k+\ln C.$$

Отже,

$$\varphi(x_1,\ldots,x_m)=Ce^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}a_{jj}x_j^2+\sum_{1=j<k=m}a_{jk}x_jx_k}, \tag{I2}$$

де a_{jj}, a_{jk}, C – сталі. З умов (4) випливає, що сталі a_{jj} від"ємні. Позначимо їх через $-\frac{1}{\sigma_j^2}$, $\sigma_j > 0$. Сталу a_{jk} при $j \neq k$ позначимо через $-\frac{r_{jk}}{\sigma_j \sigma_k}$, де $-1 < r_{jk} < 1$ та $r_{jk} = r_{kj}$, оскільки $a_{jk} = a_{kj}$. Тепер формула (I2) набуває вигляду

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = Ce^{-\frac{1}{2}Q(x_1, \ldots, x_m)},$$

де квадратична форма

$$Q(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j^2}{\sigma_j^2} + 2 \sum_{1=j<k=m} \frac{r_{jk} x_j x_k}{\sigma_j \sigma_k}$$

задається матрицею

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{r_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} & \cdots & \frac{r_{1m}}{\sigma_1 \sigma_m} \\ \frac{r_{21}}{\sigma_2 \sigma_1} & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & \frac{r_{2m}}{\sigma_2 \sigma_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{r_{m1}}{\sigma_m \sigma_1} & \frac{r_{m2}}{\sigma_m \sigma_2} & \cdots & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix}$$

з визначником

$$|A| = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{(\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m)^2} = \frac{|B|}{(\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m)^2}$$

Сталу C визначаємо з умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_m)\, dx_m \ldots dx_1 = 1 .$$

Тоді маємо

$$C = \sqrt{\frac{|A|}{(2\pi)^m}} .$$

Таким чином, густина розподілу ймовірностей компонент m-вимірної випадкової похибки

$$\varphi(x_1,\ldots,x_m)=\frac{\sqrt{|B|}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sigma_1\ldots\sigma_m}\,e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{x_j^2}{\sigma_j^2}-\sum\limits_{1=j<k=m}\frac{r_{jk}x_jx_k}{\sigma_j\sigma_k}}, \tag{13}$$

$$-\infty<x_1,\ldots,x_m<\infty,(\sigma_1>0,\ldots,\sigma_m>0;-1<r_{jk}<1).$$

Виконання достатніх умов максимуму функції (6) при $\varphi(\cdot,\ldots,\cdot)$, визначеній формулою (13), перевіряється безпосередньо.

Якщо похибку $(x_1,\ldots,x_m)$ виразити через номінальне значення $(a_1,\ldots,a_m)$: $x_1=X_1-a_1,\ldots,x_m=X_m-a_m$, то густина (13) набуде вигляду

$$\varphi(X_1,\ldots,X_m)=\frac{\sqrt{|B|}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sigma_1\ldots\sigma_m}\,e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{(X_j-a_j)^2}{\sigma_j^2}-\sum\limits_{1=j<k=m}\frac{r_{jk}(X_j-a_j)(X_k-a_k)}{\sigma_j\sigma_k}} \tag{14}$$

$$-\infty<X_1,\ldots,X_m<\infty,(-\infty<a_1,\ldots,a_m<\infty;\sigma_1>0,\ldots,\sigma_m>0;-1<r_{jk}<1).$$

Наведемо вираз густини m-вимірної нормальної випадкової змінної у вигляді [3]

$$\rho(x_1,\ldots,x_m)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}s_1\ldots s_m\sqrt{D}}\,e^{-\frac{1}{2D}\left\{\sum\limits_{j=1}^{m}D_{jj}\frac{x_j^2}{s_j^2}+2\sum\limits_{1=j<k=m}D_{jk}\frac{x_jx_k}{s_js_k}\right\}}, \tag{15}$$

де

$$D=\begin{vmatrix}1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m}\\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2m}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & 1\end{vmatrix},-1<\rho_{ij}<1;$$

D_{ij} – відповідний мінор визначника D; $s_1,\ldots,s_m$ – стандартні відхилення; ρ_{ij} – кореляції, що характеризують лінійну залежність між компонентами.

Порівнюючи (13) з (15), бачимо, що m – вимірна випадкова похибка нормально розподілена. Зокрема, при $m=2$ з виразу (15) дістаємо густину похибки розміщення точки на площині

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi s_1s_2\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{s_1^2}+2\rho\frac{xy}{s_1s_2}+\frac{y^2}{s_2^2}\right)}, \tag{16}$$

$$-\infty<x,y<\infty,(s_1>0,s_2>0,-1<\rho<1).$$

Вираз (16) в іншій модифікації наявний у праці [1]. При $m=1$ з виразу (14) одержуємо густину похибки незалежних вимірювань, виконаних в однакових умовах, без систематичної похибки та з однаковою точністю

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (17)$$
$$-\infty < x < \infty, (-\infty < a < \infty, \sigma > 0),$$

де a - номінальне значення вимірюваної величини; σ - характеризує точність або прецизійність вимірювань. Вираз (17) в іншій модифікації вивів Гаус у праці [2].

1. Bertrand J. Calcul des probabilités. Paris, 1888.-332 p. 2. Gauss C.F. Theoria motus corporum coelestium. Hamburg, 1809.- 227 s. 3. Yule G.U., Kendall M.G. Wstęp do teorii statystyki. Warszawa, 1966.-684 s.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.84

УДК 517.512

В.Й. Гукевич

НЕРІВНІСТЬ ТИПУ БЕССЕЛЯ І РІВНІСТЬ ТИПУ ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ МАЙЖЕ ОРТОГОНАЛЬНИХ НА ВСІЙ ОСІ

Нехай $\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$ - простір функцій, заданих на всій осі, для яких

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)\,dt < \infty .$$

Систему функцій $\{\varphi_i(t)\}$ назвемо майже ортогональною за Белманом в $\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$, якщо

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi_i^2(t)\,dt = 1, \quad i=1,2,\ldots$$