виконаних в однакових умовах, без систематичної похибки та з однаковою точністю

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$
$$-\infty < x < \infty, (-\infty < a < \infty, \sigma > 0), \qquad (17)$$

де a – номінальне значення вимірюваної величини; σ – характеризує точність або прецизійність вимірювань. Вираз (17) в іншій модифікації вивів Гаус у праці [2].

1. Bertrand J. Calcul des probabilités. Paris, 1888.-332 p. 2. Gauss C.F. Theoria motus corporum coelestium. Hamburg, 1809.-227 s. 3. Yule G.U., Kendall M.G. Wstęp do teorii statystyki. Warszawa, 1966.-684 s.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.84

УДК 517.512

В.Й. Гукевич

НЕРІВНІСТЬ ТИПУ БЕССЕЛЯ І РІВНІСТЬ ТИПУ ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ МАЙЖЕ ОРТОГОНАЛЬНИХ НА ВСІЙ ОСІ

Нехай $\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$ – простір функцій, заданих на всій осі, для яких

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)\,dt < \infty.$$

Систему функцій $\{\varphi_i(t)\}$ назвемо майже ортогональною за Белманом в $\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$, якщо

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi_i^2(t)\,dt = 1, \quad i = 1, 2, \ldots$$

і
$$A=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{K=1}^{\infty}a_{iK}^2 ,$$
де
$$a_{iK}=\begin{cases}\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_i(t)\varphi_K(t)dt , & i\neq K\\ 0 , & i=K\end{cases} . \qquad (I)$$

Систему $\{\varphi_i(x)\}$ назвемо замкненою в $\tilde{L}_2(-\infty,\infty)$, коли для будь-якої функції $f(x)$ з $\tilde{L}_2(-\infty,\infty)$ та $\varepsilon>0$ існує такий узагальнений многочлен $\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i\varphi_i(x)$, що
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\varphi_i(x)\Big)^2dx<\varepsilon .$$

Нехай $f(x)\in\tilde{L}_2(-\infty,\infty)$ і система функцій $\{\varphi_i(t)\}$ належить простору $\tilde{L}_2(-\infty,\infty)$. Агрегат $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\varphi_i(x)$ назвемо узагальненим многочленом найкращого середньоквадратичного наближення порядку n функції $f(x)$ в $\tilde{L}_2(-\infty,\infty)$, якщо
$$\min\Big(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi_i(x)\big)^2dx\Big)=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\varphi_i(x)\big)^2dx ,$$
де мінімум беремо по всіх можливих значеннях дійсних чисел $x_1, x_2 \dots x_n$.

Відоме таке застосування принципу нерухомої точки до розв"язування безконечної системи лінійних рівнянь (I).

<u>Лема I</u>. Нехай $\sum\limits_{K=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{iK}^2=C<1$ і $\sum\limits_{K=1}^{\infty}b_K^2<\infty$, тоді система
$$x_i=b_i+\sum_{K=1}^{\infty}c_{iK}x_K \qquad i=1,2,\dots \qquad (2)$$
має єдиний розв"язок, що належить l_2 .

<u>Зауваження</u>. Систему
$$x_i=b_i+\sum_{K=1}^{n}c_{iK}x_K \qquad i=1,2,\dots n , \qquad (3)$$

де $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ik}^2 = C < 1$ і $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 \leq B$, причому сталі C і B не залежать від n, можна розглядати як частинний випадок системи (2), приймаючи $c_{ik} = 0$ і $b_k = 0$, коли $i = 1, 2, \ldots,$ $k \geq n+1$.

З леми I випливає, що система (3) має єдиний розв"язок $(\beta_{1n}, \beta_{2n}, \ \beta_{nn})$, який задовольняє нерівність $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_{in}^2 \leq B$, де стала B не залежить від n.

Теорема I. Нехай $\{\varphi_i(t)\}$ майже ортогональна за Белманом система функцій в $L_2(-\infty, \infty)$ і $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Справедлива нерівність

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \leq (1+\sqrt{A}) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(x)\,dx,$$

де

$$b_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\varphi_i(x)\,dx \tag{4}$$

і стала A, як в (I).

Доведення.

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2T}}\int_{-T}^{T} f(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2T}}\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(x)\right)dx \leq$$

$$\leq \lim_{T\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(x)\,dx}\sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(x)\Big)^2 dx}\right)$$

Але

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(x)\Big)^2 dx = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_k b_i \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_k^2 b_i^2}\,.$$

Таким чином,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(x)\Big)^2 dx \leq (1+\sqrt{A})\sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

З цього випливає

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq \lim_{T\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(x)\,dx}\sqrt{(1+\sqrt{A})\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right).$$

Нерівність (4) доведено.

Лема 2. Нехай $f(x)\in \tilde{L}_2(-\infty,\infty)$ і $\{\varphi_i(x)\}$ – майже ортогональна за Белманом в $\tilde{L}_2(-\infty,\infty)$ система функцій, для якої $A<1$, де A те ж, що й в (I). Нехай далі

$$\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi_i(x)\Big)^2dx$$

і

$$b_i=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\varphi_i(x)\,dx \qquad i=1,2,\dots$$

Тоді

$$\min\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}\varphi_i(x)\Big)^2dx,$$

де мінімум береться по всіх можливих значеннях дійсних чисел, $x_1,x_2,\dots x_n$ і $\{\alpha_{in}\}$ – єдиний розв"язок системи

$$b_i=x_i+\sum_{k=1}^{n}x_k a_{ik}, \quad i=1,2\dots n,$$

що задовольняє умову $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}^2\le D$, причому константа D не залежить від n.

Доведення. Зауважимо, що $a_{ik}=a_{ki}$, $k,i=1,2,\dots n$. Знайдемо стаціонарні точки функції $\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=-2b_i+2x_i+2\sum_{k=1}^{n}x_k a_{ik},\ i>k,\ i=1,2,\dots n.$$

Для цього розглянемо систему

$$x_i=b_i-\sum_{k=1}^{n}x_k a_{ik} \qquad i=1,2,\dots,n. \tag{5}$$

На основі теореми I дістаємо $\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2<\infty$. Крім цього,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2=A<1.$$

Отже згідно з зауваженням до леми I система (5) має єдиний розв"язок $(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\dots\alpha_{nn})$, що задовольняє умову $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}^2\le M$, де M не залежить від n.

Покажемо, що в точці $L(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\dots\alpha_{nn})$ функція $\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)$ має мінімум. Справді

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=2,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_k}=2a_{ik},\ i>k \quad i=1,2\dots n,$$

$$d^2\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(2)}\Phi(x_1,x_2,\dots x_n),$$

$$d^2\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)=4\left(\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}dx_i dx_k\right).$$

Але

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}dx_i dx_k\right|\geq\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2-\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}dx_i dx_k\right|$$

і, враховуючи нерівність Шварца,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}dx_i dx_k\right|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(dx_i)^2(dx_k)^2}\leq\sqrt{A}\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2.$$

Отже $d^2\Phi\geq4(1-\sqrt{A})\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2$, де $A<1$.

З останньої нерівності випливає, що $d^2\Phi$ невід"ємне в околі точки L , а отже, функція $\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)$ має в точці L мінімум.

Теорема 2. Нехай $f(x)\in\mathcal{T}_2(-\infty,\infty)$ і $\{\varphi_k(x)\}$ – замкнена майже ортогональна за Белманом в $\mathcal{T}_2(-\infty,\infty)$ система функцій, для якої $A<1$, де A як в (I). Нехай далі $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\varphi_i(x)dx= =b_i$ і $\{\alpha_i\}$ – розв"язок системи

$$b_i=x_i+\sum_{k=1}^{\infty}x_k a_{ik}\qquad i=1,2,\dots ,$$

що належить l_2 . Тоді справедлива рівність

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i b_i=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f^2(t)dt,$$

яка еквівалентна

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(f(t)-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_i(t)\right)^2dt=0.$$

Доведення. З теореми I випливає, що $\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2<\infty$. Крім цього, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2<1$. Отже, за зауваженням до леми I система

$$b_i=x_i+\sum_{k=1}^{n}x_k a_{ik}\qquad i=1,2,\dots n$$

має єдиний розв"язок $\{\alpha_{in}\}$, що задовольняє умову $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}^2\leq D$, де стала D не залежить від n .

Згідно з лемою 2 маємо

$$\min_{(x_1,x_2,\dots x_n)} \Phi(x_1,x_2,\dots x_n)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}\varphi_i(x)\Big)^2dx.$$

Але система $\{\varphi_i(x)\}$ замкнута в $L_2(-\infty,\infty)$. Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\dots\alpha_{nn})=0. \tag{6}$$

Розглянемо систему

$$b_i=x_i+\sum_{k=1}^{\infty}x_k a_{ik}\qquad i=1,2,\dots \tag{7}$$

Згідно з теоремою I $\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2<\infty$ і $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2=A<1$, де A те ж, що і в (I). Система (7) задовольняє умови леми I, а отже, має єдиний розв"язок $(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n;\dots)$, що належить l_2.

Тепер розглянемо різницю

$$V_n=\Phi(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\dots\alpha_{nn})-\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n).$$

$$V_n=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}\varphi_i(x)\Big)^2dx-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)\Big)^2dx=$$

$$=-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}b_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}^2\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}\alpha_{kn}a_{ik}+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\alpha_k a_{ik}.$$

Беручи до уваги, що $(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\dots\alpha_{nn})$ і $(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n,\cdots)$ – розв"язки відповідно систем (5) і (7), маємо

$$V_n=-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}b_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}\Big(\alpha_{in}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}a_{ik}\Big)+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big(\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_k a_{ik}\Big)=-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}b_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}b_i+2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_i\alpha_k a_{ik}=$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\alpha_{in} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} a_{ik}\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} \left(\alpha_i + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_{ik}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_i \alpha_k a_{ik} = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_{in} \alpha_k a_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_i \alpha_k a_{ik} .$$

Таким чином,

$$V_n = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_{in} \alpha_k a_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_i \alpha_k a_{ik} .$$

Але $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 \leq D$, де стала D не залежить від n і $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$. Нехай $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 = M$. Використовуючи нерівність Шварца, записуєм

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_{in} \alpha_k a_{ik} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_{in}^2 \alpha_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\{ (DA) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} .$$ Але $\{\alpha_k\} \in l_2$, отже, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_{in} \times \alpha_k a_{ik} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, якщо $n \to \infty$. Міркуючи аналогічно, одержуємо, що $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_i \alpha_k a_{ik} = 0$, коли $n \to \infty$.

Таким чином, $\lim_{n \to \infty} V_n = 0$. З (6) і останньої рівності випливає

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0 .$$

1. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. - М.: Гостехиздат, 1955. - 506 с. 2. Натансон И.П. Теория функций вещественного переменного. - М.: Гостехиздат, 1950. - 390 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.83