УДК 517.956

І.І.Верба

ПРО ДЕЯКІ ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З ПРЯМОКУТНИМ ВИРІЗОМ

Розглянемо ізотропну необмежену пластинку товщиною 2δ з прямокутним вирізом $|x_i|<a_i$ $(i=1,2)$. Нехай через бічні поверхні пластинки здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем нульової температури, а на прямокутних границях пластинки заданий тепловий потік q_0 . Крім того, припустимо, що на безмежності температура пластинки та її перші похідні прямують до нуля. Тоді для визначення стаціонарного температурного поля в пластинці маємо таку граничну задачу*:

$$\Delta T-\varkappa^2 T=0\,, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x_i}\right|_{x_i=\pm a_i} M(x_{i\pm 1})=\mp Q_0 M(x_{i\pm 1})\,, \tag{2}$$

$$\left.T\right|_{(x_1,x_2)\to\infty}=0\,,\quad \left.\frac{\partial T}{\partial x_i}\right|_{(x_1,x_2)\to\infty}=0\quad (i=1,2), \tag{3}$$

де $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа; $\varkappa^2=\frac{\alpha_3}{\lambda\delta}$; $Q_0=\frac{q_0}{2\lambda\delta}$; λ – коефіцієнт теплопровідності; α_3 – коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь $x_3=\pm\delta$; $M(x_i)=S_+(x_i+a_i)-S_-(x_i-a_i)$;

$$S_\pm(\xi)=\begin{cases}1, & \xi>0\,,\\ 0{,}5\mp 0{,}5, & \xi=0\,,\\ 0, & \xi<0\,,\end{cases}\qquad i\pm 1=\begin{cases}1\,, & i=2\,,\\ 2\,, & i=1\,.\end{cases}$$

Введемо в розгляд функцію θ , що збігається з шуканою функцією T зовні прямокутника і дорівнює нулю в ньому. Враховуючи правила диференціювання узагальнених функцій, симетрію задачі відносно осей координат, граничні умови (2) на контурі прямокутника, для функції θ одержимо таке рівняння з сингулярними коефіцієнтами:

---

* Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.

$$\Delta\theta-\varkappa^2\theta=-\sum_{i=1}^{2}\Big\{Q_0 M(x_{i\pm1})[\delta_+(x_i+a_i)+\delta_-(x_i-a_i)]-\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(i)}\times$$

$$\times\cos\lambda_n^{(i\pm1)}x_{i\pm1}M(x_{i\pm1})[\delta_+'(x_i+a_i)-\delta_-'(x_i-a_i)]\Big\}, \qquad (4)$$

де $\delta_\pm(\xi)$ – асиметричні дельта-функції Дірака; $c_n^{(i)}$ – коефіцієнти Фур"є функції $T\big|_{x_i=a_i}$, $\lambda_n^{(i)}=\frac{\pi n}{a_i}$.

Розв"язок рівняння (4) з врахуванням умов на безмежності (3) одержимо, використовуючи перетворення Фур"є у такому вигляді:

$$\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{x_{i\pm1}-a_{i\pm1}}^{x_{i\pm1}+a_{i\pm1}}\Big\{Q_0 g_2(\xi,x_i,a_i)-\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(i)}\times$$

$$\times\cos\lambda_n^{(i\pm1)}(\xi-x_{i\pm1})[g_1(\xi,x_i+a_i)-g_1(\xi,x_i-a_i)]\Big\}d\xi, \qquad (5)$$

де
$$g_1(\xi,\zeta)=\frac{\varkappa\zeta}{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}K_1(\varkappa\sqrt{\xi^2+\zeta^2});$$

$$g_2(\xi,x,a)=K_0(\varkappa\sqrt{\xi^2+(x+a)^2})+K_0(\varkappa\sqrt{\xi^2+(x-a)^2});$$

$K_\nu(\xi)$ – функції Макдональда порядку ν.

Коефіцієнти Фур"є $c_n^{(i)}$, що входять у розв"язок (5), знаходимо з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$c_k^{(i)}+\sum_{n=0}^{\infty}A_{kn}^{(i,i)}c_n^{(i)}=D_k^{(i)} \quad (i=1,2;\ k=0,1,\dots), \qquad (6)$$

де
$$D_k^{(i)}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{kn}^{(i,i\pm1)}c_n^{(i\pm1)}+B_k^{(i)};$$

$$A_{kn}^{(i,i)}=\frac{1}{\pi a_{i\pm1}}\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}f_1(\xi,a_{i\pm1},\lambda_k^{(i\pm1)},\lambda_n^{(i\pm1)})g_1(\xi,2a_i)d\xi;$$

$$A_{kn}^{(i,i\pm1)}=\frac{(-1)^{n+k+1}}{\pi a_{i\pm1}}2\varepsilon(k)\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}d\xi\int\limits_0^{2a_i}\cos\lambda_k^{(i\pm1)}\xi\cos\lambda_n^{(i)}\zeta g_1(\zeta,\xi)d\xi;$$

$$B_k^{(i)}=\frac{Q_0}{\pi a_{i\pm1}}\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}\Big\{(-1)^k\cos\lambda_k^{(i\pm1)}\xi\int\limits_0^{2a_i}K_0(\varkappa\sqrt{\xi^2+\zeta^2})d\zeta-$$

$$-f_2(\xi, a_{i\pm1}, \lambda_k^{(i\pm1)}) g_2(\xi, a_i, a_i)\Big\} d\xi ;$$

$$f_1(\xi, b, \lambda_k, \lambda_n) = \begin{cases} 2b-\xi, & n=k=0; \\ (2b-\xi)\cos\lambda_k\xi - \frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k\xi, & n=k=1,2,\ldots; \\ \frac{(-1)^{n+k}}{\lambda_n^2-\lambda_k^2} 2\varepsilon(k)(\lambda_k \sin\lambda_k\xi - \lambda_n \sin\lambda_n\xi), & n\neq k,\ n,k=0,1,\ldots; \end{cases}$$

$$f_2(\xi, b, \lambda_k) = \begin{cases} 2b-\xi, & k=0; \\ \frac{2(-1)^k}{\lambda_k}\sin\lambda_k\xi, & k=1,2,\ldots; \end{cases} \quad \varepsilon(k) = \begin{cases} 0{,}5, & k=0; \\ 1, & k=1,2,\ldots \end{cases}$$

У деяких випадках розв"язок задачі можна спростити. Якщо розміри вирізу співвимірні з товщиною пластинки, то у розкладах функцій $T|_{x_i=a_i}$ в ряди Фур"є можна обмежитись першим членом. Тоді розв"язок (5) суттєво спрощується і набуває вигляду

$$\Theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{x_{i\pm1}-a_{i\pm1}}^{x_{i\pm1}+a_{i\pm1}} \Big\{Q_0 g_2(\xi, x_i, a_i) - C_0^{(i)}\big[g_1(\xi, x_i+a_i) - g_1(\xi, x_i-a_i)\big]\Big\} d\xi ,$$

де

$$C_0^{(i)} = \big[B_0^{(i)} A_{00}^{(i\pm1,i)} - A_{00}^{(i,i\pm1)} B_0^{(i\pm1)}\big] \times \big[(1+A_{00}^{(i,i)})(1+A_{00}^{(i\pm1,i\pm1)}) - \\ - A_{00}^{(1,2)} A_{00}^{(2,1)}\big]^{-1}.$$

Розв"язок задачі можна спростити і тоді, коли один із розмірів вирізу значно менший від іншого. Припустимо для визначеності, що $a_2 \ll a_1$. Тоді в розкладі функції $T|_{x_1=a_1}$ в ряд Фур"є можна обмежитись першим членом розкладу. Розв"язок (5) для цього випадку запишемо як

$$\Theta = \frac{1}{2\pi}\Big\{\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{x_{i\pm1}-a_{i\pm1}}^{x_{i\pm1}+a_{i\pm1}} Q_0 g_2(\xi, x_i, a_i) d\xi - C_0^{(1)} \int\limits_{x_2-a_2}^{x_2+a_2} \big[g_1(\xi, x_1+a_1) - g_1(\xi, x_1 - \\ - a_1)\big] d\xi - \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} \int\limits_{x_1-a_1}^{x_1+a_1} \cos\lambda_n^{(1)}(\xi - x_1)\big[g_1(\xi, x_2+a_2) - g_1(\xi, x_2-a_2)\big] d\xi\Big\}.$$

Система для визначення коефіцієнтів Фур"є $C_0^{(1)}$ і $C_n^{(2)}$ $(n=0,1,\ldots)$ набуде вигляду

$$C_k^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} P_{kn} C_n^{(2)} = H_k \quad (k=0,1,\dots), \tag{6}$$

$$C_0^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{0n} C_n^{(2)} + G_0, \tag{7}$$

де $P_{kn} = A_{kn}^{(2,2)} - \frac{A_{k0}^{(2,1)} A_{0n}^{(1,2)}}{1+A_{00}^{(1,1)}}; \quad H_k = \frac{B_0^{(1)} A_{k0}^{(2,1)}}{1+A_{00}^{(1,1)}} + B_k^{(2)},$

$$R_{0n} = \frac{A_{0n}^{(1,2)}}{1+A_{00}^{(1,1)}}; \quad G_0 = \frac{B_0^{(1)}}{1+A_{00}^{(1,1)}}.$$

Система (6) містить тільки невідомі $C_n^{(2)}$. Знайшовши її наближений розв"язок методом редукції і підставляючи $C_n^{(2)}$ в (7), одержимо наближене значення $C_n^{(1)}$.

Спрямуємо один із розмірів вирізу до нуля. Припустимо, що $a_1 \to 0$. Це відповідає випадку, коли у нескінченній пластинці є щілина довжиною $2a_2$, яка розміщена на осі x_2. Тоді (5) запишемо як

$$\theta = \frac{Q_0}{\pi} \int_{x_2-a_2}^{x_2+a_2} K_0\left(\varkappa\sqrt{x_1^2+\xi^2}\right) d\xi. \tag{8}$$

Розв"язок (8) збігається з розв"язком Я.С.Підстригача, Ю.М.Коляно.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.83

УДК 517.944

Ж.С.Свірчевська

ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо існування майже періодичного(МП)по t розв"язку одновимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t = -\varepsilon F(x,t,u,u_x,u_t) \tag{I}$$

з МП по t функцією $F(x,t,u,u_x,u_t)$ рівномірно відносно x та u, де ε – малий параметр, який задовольняє крайові умови

$$u(t,0) = u(t,\pi). \tag{2}$$

Ітераційний процес, що сходиться до розв"язку задачі (I)-(2), будуємо за схемою, запропонованою Рабіновичем [3], який розглядав питання про існування періодичного розв"язку задачі (I)-(2).