$$C_k^{(2)}+\sum_{n=0}^{\infty} P_{kn} C_n^{(2)} = H_k \quad (k=0,1,\dots), \tag{6}$$

$$C_0^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty} R_{0n} C_n^{(2)} + G_0 , \tag{7}$$

де $P_{kn}=A_{kn}^{(2,2)}-\frac{A_{k0}^{(2,1)}A_{0n}^{(1,2)}}{1+A_{0b}^{(1,1)}}$; $H_k=\frac{B_0^{(1)}A_{kb}^{(2,1)}}{1+A_{0b}^{(1,1)}}+B_k^{(2)}$,

$$R_{0n}=\frac{A_{0n}^{(1,2)}}{1+A_{0b}^{(1,1)}} ; \quad G_0=\frac{B_0^{(1)}}{1+A_{0b}^{(1,1)}} .$$

Система (6) містить тільки невідомі $C_n^{(2)}$. Знайшовши її наближений розв"язок методом редукції і підставляючи $C_n^{(2)}$ в (7), одержимо наближене значення $C_n^{(1)}$.

Спрямуємо один із розмірів вирізу до нуля. Припустимо, що $a_1 \to 0$. Це відповідає випадку, коли у нескінченній пластинці є щілина довжиною $2a_2$, яка розміщена на осі x_2. Тоді (5) запишемо як

$$\theta=\frac{Q_0}{\pi}\int_{x_2-a_2}^{x_2+a_2} K_0\left(\varkappa\sqrt{x_1^2+\xi^2}\right)d\xi . \tag{8}$$

Розв"язок (8) збігається з розв"язком Я.С.Підстригача, Ю.М.Коляно.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.83

УДК 517.944

Ж.С.Свірчевська

ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо існування майже періодичного(МП)по t розв"язку одновимірного хвильового рівняння

$$u_{tt}-u_{xx}+\alpha u_t=-\varepsilon F(x,t,u,u_x,u_t) \tag{1}$$

з МП по t функцією $F(x,t,u,u_x,u_t)$ рівномірно відносно x та u, де ε - малий параметр, який задовольняє крайові умови

$$u(t,0)=u(t,\pi) . \tag{2}$$

Ітераційний процес, що сходиться до розв"язку задачі (1)-(2), будуємо за схемою, запропонованою Рабіновичем [3], який розглядав питання про існування періодичного розв"язку задачі (1)-(2).

Для доведення збіжності ітераційного процесу скористаємося теоремами вкладення Соболєва [3] та аналогом нерівності Л.Ніренберга, доведеними для простору МП функцій Мосєєнковим [2].

Нагадаємо позначення з праці [I]: C^{∞} - простір неперервних нескінченно диференційованих функцій дійсних аргументів x і t ; C_0^{∞} - підпростір із C^{∞} МП по t функцій у смузі $(0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t < +\infty)$.

За норму функції $\varphi(x,t) \in C^{\infty}$ приймаємо число

$$\| \varphi(x,t) \| = \left\{ \lim_{T \to +\infty} \int_0^T dt \int_0^{\pi} |\varphi(x,t)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Поповнення в C^{∞} відносно так введеної норми позначаємо H_0 . Розглядаємо ще одну норму функції $\varphi(x,t) \in C^{\infty}$

$$\| \varphi(x,t) \|_m = \left\{ \sum_{|\sigma|=0}^{m} \| D^{\sigma} \varphi \|^2 \right\}^{1/2},$$

де

$$D^{\sigma} = \frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2}}{\partial x^{\sigma_1} \partial t^{\sigma_2}}; \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2); \; |\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2 .$$

Поповнення в C_0^{∞} стосовно цієї норми позначаємо $\overset{0}{H}_m$, а поповнення в C^{∞} – через H_m . Всі простори $H_0, H_m, \overset{0}{H}_m$ гільбертові.

Припустимо, що $F(x,t,u,u_x,u_t) \in C_K$ по всіх своїх аргументах при $0 \leq x \leq \pi$ $-\infty < u, u_x, u_t < +\infty$, причому $\frac{\partial F}{\partial t} \not\equiv 0$ (інакше рівняння може виродитися у звичайне диференціальне рівняння). Вважатимемо також, що $u \in C_1 \cap H_{K+1}$ та $\|F(x,t,u,u_x,u_t)\| \leq C(\|u\|_1)(\|u\|_1+1)$. Розв"язок шукаємо у вигляді $u = \varepsilon \tilde{u}(x,t,\varepsilon)$, де $\tilde{u}$ - гранична функція по ε ; C - константа, що залежить від $\|u\|_1$.

За нульову ітерацію природно прийняти розв"язок (І) при $\varepsilon = 0$, тобто

$$Lu = u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t = 0. \tag{3}$$

Рівняння (3) має в $\overset{0}{H}_1$ єдиний розв"язок $u = 0$, який обираємо за нульову ітерацію $u_0 = 0$.

Будуємо u_1

$$Lu_1 = -F(x,t,0,0,0), \tag{4}$$

що є лінійним рівнянням і за теоремою 2 з праці [I] маємо

$$\|u_1\|_{K+1} \leq C_K \|F(x,t,0,0,0)\|_K \leq C_K C[0] = M .$$

Використовуючи композицію функціональних нерівностей та нерівність Соболева, одержуємо

$$\|u\|_1 \leq a\|u_1\|_3 \leq a\|u_1\|_{k+1} \leq aM = K .$$

Продовжуючи процес далі, бачимо, що кожен раз приходимо до лінійного рівняння, яке має єдиний МП розв"язок, що задовольняє оцінку за нормою

$$Lu_{n+1} = -F(x,t,\varepsilon u_n, \varepsilon u_{nx}, \varepsilon u_{nt}).$$

Припустимо $u_n \in H_{k+1} \cap \overset{0}{H_1}$ та $k \geq 3$. Застосовуючи нерівність Соболева, маємо $u_n \in C_1$. Тоді $F(x,t,\varepsilon u_n, \varepsilon u_{nx}, \varepsilon u_{nt}) \in H_k$, тобто за теоремою 2 з праці [I]

$$u_{n+1} \in H_{k+1} \cap \overset{0}{H_1} \quad \text{та}$$

$$\|u_{n+1}\|_{k+1} \leq C_k \|F(x,t,\varepsilon u_n, \varepsilon u_{nx}, \varepsilon u_{nt})\|_{k+1} \leq$$

$$\leq C_k C[\varepsilon K](\|\varepsilon u_n\|_{k+1} + 1) \leq C_k C[1](1+1) \leq M$$

для $|\varepsilon| K < 1$ та $\varepsilon M < 1$.

Використовуючи нерівність Соболева ще раз, записуємо

$$\|u_{n+1}\|_1 \leq K .$$

Таким чином, послідовності $\{\|u_n\|_{k+1}\}$ та $\{\|u_n\|_1\}$ обмежені.

Доведемо збіжність ітераційного процесу. Розглянемо $u_n - u_{n-1} = \delta u_n$:

$$L\delta u_n = -[F(x,t,\varepsilon u_n, \varepsilon u_{nx}, \varepsilon u_{nt}) -$$
$$- F(x,t,\varepsilon u_{n-1}, \varepsilon u_{(n-1)x}, \varepsilon u_{(n-1)t})] =$$
$$= -\varepsilon[F_u(\text{в серед.т.})\, \delta u_{n-1} + F_{u_x}(\text{в серед.т.})\, \delta u_{(n-1)x} +$$
$$+ F_{u_t}(\text{в серед.т.})\, \delta u_{(n-1)t}]$$

(F_u, F_{u_x}, F_{u_t} – поточково обмежені незалежно від u, згідно з нашими оцінками $\|u_n\|_1$). Обираємо $B = B(M, K)$. Тобто

$$\|\delta u_n\|_1 \leq \varepsilon C_0 |F_u(\text{в серед.т.})\, \delta u_{n-1} + F_{u_x}(\text{в серед.т.})\, \delta u_{(n-1)x} +$$
$$+ F_{u_t}(\text{в серед.т.})\, \delta u_{(n-1)t}|$$

$$\|\delta u_n\|_1 \leq |\varepsilon| C_0 B \|\delta u_{n-1}\|_1$$

Беручи $\varepsilon C_0 B < 1$, одержуємо, що ітераційна схема збігається в H_1^0

$$u_n \longrightarrow \widetilde{u} \in H_1^0 .$$

Згідно з нерівністю Ніренберга маємо інтерполяційну нерівність

$$\|\delta u_n\|_j \leq const \|\delta u_n\|_0^{1-j/k+1} \cdot \|\delta u_n\|_{k+1}^{j/k+1} ,$$

тобто $u_n \to \widetilde{u} \in H_j$ для $j < k+1$. За теоремою Банаха - Сакса маємо $\widetilde{u} \in H_{k+1}$. Таким чином, $u_n \in H_1^0 \cap H_{k+1}$, і ми довели теорему.

Якщо $F(x,t,u,u_x,u_t)$ задовольняє всі висунуті раніше вимоги, то для досить малих $|\varepsilon|$ існує МП розв"язок задачі (I)-(2)

$$u \in H_{k+1} ,$$

крім того, $u = \varepsilon \widetilde{u}(x,t,\varepsilon)$, де $\widetilde{u}$ - гранична функція в H_{k+1}. Розв"язок єдиний в H_1^0, якщо ε - достатньо мале.

I. Лісевич Л.М., Свірчевська Ж.С. Існування майже періодичного розв"язку однієї задачі для гіперболічного рівняння другого порядку.-Доп. АН УРСР, 1973, № 7, с. 611-613.
2. Мосєєнков В.Б. Майже періодичні розв"язки нелінійних хвильових рівнянь.-Укр. мат. журн., 1978, № 1, с. 113-118.
3. Rabinowitz P.H. Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations.- Com. Pure and Appl. Mathem, 1967, N20, p.145-205.

Стаття надійшла до редколегії 25.06.83