УДК 539.3

О.І.Бобик, В.Є.Юринець

ПРО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ, ЯКЕ ОПИСУЄ ЗГИН НЕПЕРЕРВНО-НЕОДНОРІДНИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН

І. Під час деформації пластини, коли серединна поверхня, що прийнята за координатну площину Oxy, викривляється, її напружений стан характеризується згинальними M_x, M_y і скручувальними H_{xy} моментами, перерізувальними силами N_x, N_y, які для ортотропної пластини можна виразити через функцію прогинів $w(x,y)$ відомим чином [2]. При цьому справедливе рівняння

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H_{xy}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=0. \tag{I.I}$$

Припустимо, що коефіцієнти Пуассона сталі, а модулі пружності - диференційовані функції декартової координати y і змінюються з глибиною за законом

$$E_1=E_1^{(0)}e^{-f(y)},\quad E_2=E_2^{(0)}e^{-f(y)},\quad G=G^{(0)}e^{-f(y)}, \tag{I.2}$$

причому між модулями пружності та модулем зсуву в початковій точці існує залежність

$$G^{(0)}=\frac{E_1^{(0)}}{2(\rho_0^2+\nu_1)}\left(\rho_0^2=\sqrt{\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}}\right), \tag{I.3}$$

де $f(y)$ - додатньо визначена диференційована функція декартової координати y.

Підставляючи співвідношення для M_x, M_y, H_{xy} і (I.2) у (I.I), для функції прогину $w(x,y)$ одержуємо

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-2f'\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(f'^2-f''\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\left[\nu_1+2(1-\nu_1\nu_2)\frac{G^{(0)}}{E_2^{(0)}}\right]\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-$$

$$-2f'\left[\nu_1+2(\nu_1\nu_2)\frac{G^{(0)}}{E_2^{(0)}}\right]\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\nu_1\left(f'^2-f''\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \tag{I.4}$$

Розв"язок (I.4) шукаємо у вигляді

$$w(x,y)=e^{-i\lambda x}\theta(y), \tag{I.5}$$

де λ - довільна стала.

Підставляючи (I.3), (I.5) в (I.4), маємо

$$\frac{d^4\theta}{dy^4}-2f'\frac{d^3\theta}{dy^3}+(f'^3-f''-2p_0^2\lambda^2)\frac{d^2\theta}{dy^2}+2p_0^2\lambda^2 f'\frac{d\theta}{dy}+$$
$$+\lambda^2\left[\lambda^2 p_0^4-\nu_1(f'^2-f'')\right]\theta=0. \tag{I.6}$$

Таким чином, задача згину для неперервно-неоднорідних пластин зводиться до розв"язування крайової задачі для лінійного диференціального рівняння (I.6) при відповідних граничних умовах на краях пластини.

2. Вважаючи, що при дії статичного навантаження на пластину розв"язки рівняння (I.6) неколивні, диференціальний оператор можна розкласти на множники

$$\left[\frac{d^2}{dy^2}+\alpha(y)\frac{d}{dy}+\beta(y)\right]\left[\frac{d^2\theta}{dy^2}+\gamma(y)\frac{d\theta}{dy}+\delta(y)\theta\right]=0, \tag{2.I}$$

де коефіцієнти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ визначаємо з системи

$$\alpha+\gamma=-2f', \quad 2\frac{d\gamma}{dy}+\alpha\gamma+\beta+\delta=f'^2-f''-2p_0^2\lambda^2,$$
$$\frac{d^2\gamma}{dy^2}+2\frac{d\delta}{dy}+\alpha\frac{d\gamma}{dy}+\alpha\delta+\beta\gamma=2p_0^2\lambda^2 f',$$
$$\frac{d^2\delta}{dy^2}+\alpha\frac{d\delta}{dy}+\beta\delta=\lambda^2\left[p_0^4\lambda^2-\nu_1(f'^2-f'')\right]. \tag{2.2}$$

Знайти загальний розв"язок системи (2.2), як і (I.6), неможливо, але з її допомогою можна записати в явному вигляді коефіцієнти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ для деяких часткових випадків $f(y)$, коли диференціальний оператор рівняння (I.6) можна розкласти на множники типу (2.I).

Наприклад припустимо, що $f(y)$ – лінійна функція, тобто

$$f(y)=a_0+b_0 y, \tag{2.3}$$

де a_0, b_0 – довільні сталі.

Вважаючи, що β і δ не залежать від y, з першого та четвертого рівнянь системи (2.2) знаходимо

$$\alpha=\gamma=-b_0, \quad \beta=-p_0^2\lambda^2\mp b_0\lambda\sqrt{\nu_1}, \quad \delta=-p_0^2\lambda^2\pm b_0\lambda\sqrt{\nu_1}, \tag{2.4}$$

які задовольняють і решту рівнянь системи (2.2).

3. Знайдемо вид функції $f(y)$, яка задовольняла систему (2.2) при $\gamma = 0$. З першого і третього рівнянь системи (2.2) маємо

$$\frac{d\delta}{dy} - f'\delta = \rho_0^2 \lambda^2 f'. \tag{3.1}$$

Розв"язуючи це диференціальне рівняння і беручи до уваги перші два рівняння системи (2.2), записуємо

$$\alpha = -2f', \quad \delta = -\rho_0^2\lambda^2, \quad \beta = f'^2 - f'' - \rho_0^2\lambda^2. \tag{3.2}$$

Одержані значення $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ повинні задовольняти четверте рівняння системи (2.2), що можливе за виконання умови

$$f'' - f'^2 = 0. \tag{3.3}$$

З (3.3) знаходимо

$$f(y) = -\ln(a - by). \tag{3.4}$$

Тоді, якщо $a - by > 0$, маємо

$$\alpha = -\frac{2b}{a - by}, \quad \beta = \delta = -\rho_0^2\lambda^2, \quad \gamma = 0, \tag{3.5}$$

і рівняння (1.6) для функції (3.4) записуємо у вигляді

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{2b}{a-by}\frac{d}{dy} - \rho_0^2\lambda^2\right)\left(\frac{d^2\theta}{dy^2} - \rho_0^2\lambda^2\theta\right) = 0. \tag{3.6}$$

Отже, функцію $\theta(y)$ необхідно шукати з диференціального неоднорідного рівняння

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} - \rho_0^2\lambda^2\theta = \theta_0, \tag{3.7}$$

де θ_0 – загальний розв"язок рівняння

$$\frac{d^2\theta_0}{dy^2} - \frac{2b}{a-by}\frac{d\theta_0}{dy} - \rho_0^2\lambda^2\theta_0 = 0. \tag{3.8}$$

Розв"язуючи почергово (3.8) і (3.7), остаточно одержуємо

$$\theta = B_1 \exp\left[\frac{\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right] + B_2 \exp\left[-\frac{\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right] + B_3\left\{\exp\left[\frac{\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right]\ln(a-by) - \right.$$
$$\left. - \exp\left[-\frac{\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right] Ei^*\left[\frac{2\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right]\right\} + B_4\left\{\exp\left[-\frac{\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right]\ln(a-by) - \right.$$
$$\left. - \exp\left[\frac{\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right] Ei\left[-\frac{2\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right]\right\}, \tag{3.9}$$

де $Ei^*\left[\frac{2\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right]$, $Ei\left[-\frac{2\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right]$ – інтегральні показникові функції; $B_j\ (j=\overline{1,4})$ – сталі інтегрування, причому C_1 і C_2 входять в B_j .

4. Припустимо, що $f(y)$ – степенева функція типу

$$f(y)=-\ln(q+ky)^s, \tag{4.1}$$

де g, k, s – довільні сталі.

Для функції (4.I) із системи (2.2) знаходимо

$$\alpha=\frac{k(1+s)}{g+ky},\ \beta=-\rho_0^2\lambda^2\pm\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)}}{g+ky}-\frac{k^2(1-s)}{(g+ky)^2}, \tag{4.2}$$

$$\gamma=-\frac{k(1-s)}{g+ky},\ \delta=-\rho_0^2\lambda^2\mp\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)}}{g+ky}.$$

На основі одержаних співвідношень (4.2) рівняння (I.6) для функції (4.I) запишемо як

$$\left\{\frac{d^2}{dy^2}+\frac{k(1+s)}{g+ky}\frac{d}{dy}-\left[\rho_0^2\lambda^2\mp\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)}}{g+ky}+\frac{k^2(1-s)}{(g+ky)^2}\right]\right\}\left\{\frac{d^2\Theta}{dy^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{k(1-s)}{g+ky}\frac{d\Theta}{dy}-\left[\rho_0^2\lambda^2\pm\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)}}{g+ky}\right]\Theta\right\}=0. \tag{4.3}$$

У загальному випадку функцію Θ слід шукати з рівнянь

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2}-\frac{k(1-s)}{g+ky}\frac{d\Theta}{dy}-\left[\rho_0^2\lambda^2\pm\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)}}{g+ky}\right]\Theta=0, \tag{4.4}$$

які підстановкою

$$\Theta=\Psi^{\frac{1-s}{2}}W(\Psi),\ \ \Psi=\frac{2\rho_0\lambda}{b}(g+ky) \tag{4.5}$$

можна звести до рівнянь Уіттекера [I]

$$4\Psi^2\frac{d^2W}{d\Psi^2}=(\Psi^2\pm4n\Psi+4m^2-1)W, \tag{4.6}$$

де

$$n=\frac{1}{2}\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)};\ \ m=1-\frac{s}{2}. \tag{4.7}$$

Використовуючи розв"язки (4.6), що виражаються через функції Уіттекера $W_{\pm n,m}(\pm\Psi)$, і співвідношення (4.5), для Θ

маємо

$$\Theta=(g+ky)^{\frac{1-S}{2}}\left[B_1W_{n,m}(\Psi)+B_2W_{-n,m}(\Psi)+B_3W_{n,m}(-\Psi)+B_4W_{-n,m}(-\Psi)\right], \quad (4.8)$$

де $B_j\ (j=\overline{1,4})$ – сталі інтегрування.

У частковому випадку, коли $n=0$, тобто при $S=1$ або $\nu_1=p_0^2/S$, рівняння (4.4) збігаються і дають лише два незалежних розв"язки.

Якщо $\nu_1=p_0^2/S$ і $S\neq 1$, то функцію Θ слід шукати з диференціального рівняння

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2}-\frac{k(1-s)}{g+ky}\frac{d\Theta}{dy}-p_0^2\lambda^2\Theta=\Theta_0, \quad (4.9)$$

де Θ_0 – загальний розв"язок рівняння

$$\frac{d^2\Theta_0}{dy^2}+\frac{k(1+s)}{g+ky}\frac{d\Theta_0}{dy}-\left[p_0^2\lambda^2+\frac{k^2(1-s)}{(g+ky)^2}\right]\Theta_0=0, \quad (4.10)$$

яке зводиться до рівняння Беселя [3].

Розв"язуючи рівняння (4.10) і (4.9), для Θ остаточно одержуємо

$$\Theta=(g+ky)^m\Big\{B_1I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)+B_2K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)+B_3\Big[I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\int K_m^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi-$$
$$-K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\int I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi\Big]+B_4\Big[K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\int I_m^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi-$$
$$-I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\int I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi\Big]\Big\}, \quad (4.11)$$

де $I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)$, $K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)$ – функції Беселя від уявного аргумента першого та другого роду порядку m.

Якщо $S=1$, то (4.3) зводиться до рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}+\frac{2k}{g+ky}\frac{d}{dy}-p_0^2\lambda^2\right)\left(\frac{d^2\Theta}{dy^2}-p_0^2\lambda^2\Theta\right)=0, \quad (4.12)$$

розв"язок якого знаходять так, як і рівняння (3.7).

1. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с. 2. Л е х н и ц к и й С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 355 с. 3. П о н т р я г и н Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 367 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.06.83