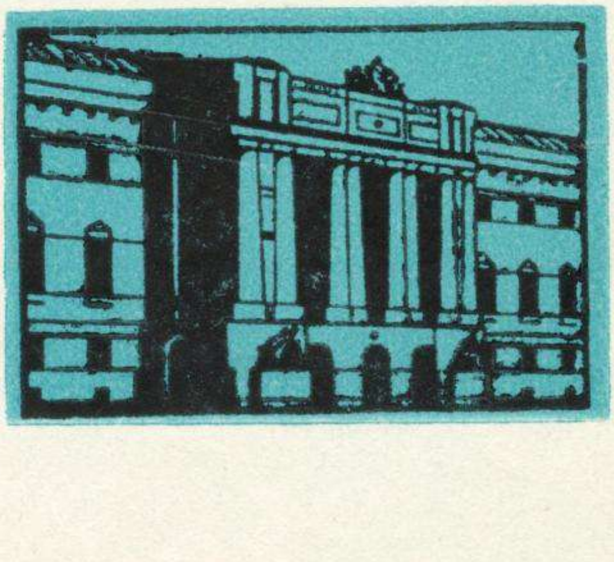
ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПИТАННЯ АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК
25
1986



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
Виходить з 1965 р.
Випуск 25

ПИТАННЯ АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1986

УДК 513

В Вестнике помещены статьи по теории функций, алгебре, топологии, геометрии, теории вероятностей, дифференциальных и интегральных уравнений.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов. Библиогр. в конце статей.

Адреса редколегії: 290000 Львів, вул. Університетська, I. Університет, кафедра диференціальних рівнянь

Редакція науково-технічної літератури
Зав. редакцією М.П.П а р ц е й

В $\frac{1702050000-026}{М225(04)-86}$ Замовне

УДК 517.956

С.П.Лавренюк

НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ І ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Нехай G – область, обмежена в $\mathbb{R}^n$, з межею ∂G. Розглянемо задачу

$$A(x,D,q)u(x,q)+L_0u(x,q)=f(x,q), \quad x\in G,\ q\in Q, \tag{I}$$

$$\left(B_j(x,D,q)u(x,q)+E_ju(x,q)\right)\Big|_{x=x'}=g_j(x',q), \tag{2}$$
$$x'\in\partial G,\ q\in Q,\ j=1,\dots,m,$$

де $A(x,D,q)=\sum\limits_{|\alpha|+\beta\le 2m} a_{\alpha\beta}(x)q^{\beta}D^{\alpha}$; $D^{\alpha}=D_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot D_n^{\alpha_n}$;

$D_j=-i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$; $\quad L_0: H_\ell(G)\to H_{\ell-2m}(G)$ – лінійний обмежений оператор; B_j – диференціальні оператори порядку $m_j\le 2m-1$; $E_j: H_\ell(G)\to H_{\ell-m_j-\frac12}(\partial G)$, $j=1,\dots,m$ – лінійні обмежені оператори; $Q=\{q:\alpha_0\le \arg q\le\beta_0\}\subset\mathbb{R}^2$.

Припускаємо, що виконуються умови I, II з праці [I]. Введемо простір

$$H_\ell(G,\partial G)=H_{\ell-2m}(G)\times\prod_{j=1}^{m}H_{\ell-m_j-\frac12}(\partial G)$$

з нормою

$$\|\omega\|_{\ell,G,\partial G}=\|\omega_0\|_{\ell-2m}+\sum_{j=1}^{m}|||\omega_j|||'_{\ell-m_j-\frac12},$$

де $\omega=(\omega_0,\omega_1,\dots\omega_m)\in H_\ell(G,\partial G)$. Позначення тут і далі – з праці [I].

Разом з (I), (2) розглянемо задачу

$$A(x,D,q)u(x,q)=\omega_0(x,q),\quad x\in G,\ q\in Q,$$
$$B_j(x,D,q)u(x,q)\Big|_{x=x'}=\omega_j(x',q),\ x'\in\partial G,\ q\in Q,$$
$$j=1,\dots,m. \tag{3}$$

Відомо [І], що для всіх $\omega \in H_\ell(G,\partial G)$ $(\ell \geqslant 2m)$ при $|q| \geqslant q_0 > 0$, $q \in Q$ (q_0 - достатньо велике число) існує єдиний розв"язок $u(x,q)$ задачі (3) в просторі $H_\ell(G)$ і справедлива оцінка

$$|||u|||_\ell \leqslant C\|\omega\|_{\ell,G,\partial G}, \tag{4}$$

де стала C визначається лише через коефіцієнти задачі, а також область G. Позначимо

$$E=(L_0,E_1,\ldots,E_m),\ \|E\|=\|L_0\|+\sum_{j=1}^{m}\|E_j\|.$$

<u>Теорема І</u>. Якщо $F=(f,g_1,\ldots,g_m)\in H_\ell(G,\partial G)$, $\|E\|<C^{-1}$, то для $|q|\geqslant q_0>0$ (q_0 - достатньо велике число), $q\in Q$ існує єдиний розв"язок $u(x,q)\in H_\ell(G)$ задачі (І), (2).

<u>Доведення</u>. Оскільки для довільної $\omega\in H_\ell(G,\partial G)$ існує єдиний розв"язок (3), то це визначає лінійний оператор R, який кожній функції з простору $H_\ell(G,\partial G)$ ставить у відповідність функцію з простору $H_\ell(G)$, тобто $u=R\omega$, причому на основі (4) $\|R\|\leqslant C$. Тоді (І), (2) легко звести до рівняння

$$\omega+ER\omega=F \tag{5}$$

з невідомою функцією ω. Оскільки $ER: H_\ell(G,\partial G)\to H_\ell(G,\partial G)$ і $\|ER\|<1$, то (5) має єдиний розв"язок у просторі $H_\ell(G,\partial G)$. Теорема доведена.

Розглянемо тепер в $\Omega_T=G\times(0,T)$ параболічну задачу [І]

$$A\left(x,D_x,\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0,\ (x,t)\in\Omega_T, \tag{6}$$

$$\left(B_j(x,D_x,\frac{\partial}{\partial t})u(x,t)+E_ju(x,t)\right)\Big|_{x=x'}=g_j(x',t),$$
$$(x',t)\in\partial G\times(0,T),\ j=1,\ldots,m, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}=0,\ k=0,1,\ldots,s, \tag{8}$$

$s=\frac{m}{b}$, $2b$ - параболічна вага задачі. Тут B_j - диференціальний оператор порядку $m_j\leqslant 2m-1$;

$$E_j: P_{\ell,\frac{\ell}{2b}}(e^{-\gamma t})\to P_{\lambda_j,\frac{\lambda_j}{2b}}(e^{-\gamma t}) -$$

лінійні обмежені оператори для довільного $\gamma > 0$, $\lambda_j = \ell - m_j - \frac{1}{2}$. Позначимо $E = (E_1, \dots, E_m)$.

Теорема 2. Нехай задача (6) - (8) параболічна, $\ell > 2m$, $\|E\| < C_1$. Тоді існує таке $\gamma > 0$, що (6) - (8) має єдиний розв"язок $u(x,t) \in P_{\ell, \frac{\ell}{2b}}(e^{-\gamma t})$ для довільних функцій $g_j \in P_{\lambda_j, \frac{\lambda_j}{2b}}(e^{-\gamma t})$, $j = 1, \dots, m$. Тут C_1 - деяке число, взагалі кажучи, мале, що залежить від коефіцієнтів задачі й області G.

Доведення. Застосувавши перетворення Лапласа L до (6) - (8) і прийнявши $p = q^{2b}$, приходимо до задачі виду (I) - (2). Далі, як і при доведенні теореми I, записуємо

$$\omega + ER\omega = \tilde{g}, \quad \tilde{g} = (g_1, \dots, g_m),$$

яке розглядається тепер у просторі $E_{\ell, \frac{\ell}{2b}}(\gamma)$. Крім того, $\|R\| \leq C_2$, де стала C_2 визначається коефіцієнтами задачі (6) - (8) і областю G. Отже, якщо $C_1 C_2 < 1$, то рівняння (9) має єдиний розв"язок при деякому $\gamma > 0$. Знайшовши розв"язок рівняння (9) ω, можемо записати розв"язок задачі (6) - (8) у вигляді $u = L^{-1} R\omega$. Теорема 2 доведена.

Відзначимо, що нелокальні задачі для еліптичних і параболічних рівнянь розглянуті у працях [2-8].

I. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. - Успехи мат. наук, 1964, 19, вып. 3, с. 53-161. 2. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. - Докл. АН СССР, 1969, 185, № 4, с. 739-740. 3. Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д. Об одной нелокальной параболической задаче. - В кн.: Мат. исслед., 1970, 5, вып. 3, с. 83-100. 4. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечным краевым условием. - Дифференциальные уравнения, 1979, 15, № 7, с. 1284-1295. 5. Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями. - Журн. вычислит. мат. и мат. физики, 1964, 4, № 6, с. 1006-1024. 6. Панеях Б.П. О некоторых нелокальных краевых задачах для линейных дифференциальных операторов. - Мат. заметки, 1984, 35, № 3, с. 425-435. 7. Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г. Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем. - Сиб. мат. журн., 1972, 13, № 1, с. 165-181. 8. Скубачевский А.Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач. - Мат. сб., 1982, 117, № 4, с. 548-558.

Стаття надійшла до редколегії 18.03.85

УДК 517.946

Я.І.Сідельник

ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ"ЯЗКУ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ В ОБЛАСТІ З РУХОМИМИ МЕЖАМИ

Методом Гальоркіна доведено існування узагальненого розв"язку одномірного хвильового рівняння в області з рухомими межами [1].

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = f(x,t), \qquad (1)$$

де a – стала; $f(x,t)$ – деяка задана функція.

Доведемо існування узагальненого розв"язку рівняння (1) у випадку, коли розглядуваний процес відбувається в області $Q \subset R^2$, межі якої $x = \ell_1(t)$ і $x = \ell_2(t)$ переміщаються з часом $Q = \{\ell_1(t) < x < \ell_2(t),\ 0 < t < T\}$.

Нехай на цих рухомих межах задані граничні умови

$$\begin{cases} U\big|_{x=\ell_1(t)} = 0, & U\big|_{x=\ell_2(t)} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x=\ell_1(t)} = 0, & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{x=\ell_2(t)} = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Разом з цим задані початкові умови

$$U\big|_{t=0} = 0, \quad U_t\big|_{t=0} = 0. \qquad (3)$$

Введемо нові координати ξ, τ зв"язані з x, t співвідношеннями

$$\xi = \frac{x - \ell_1(t)}{\ell_2(t) - \ell_1(t)}, \quad \tau = t.$$

При цьому область Q перейде в прямокутник

$$Q_1 = \{0 < \xi < 1,\ 0 < \tau < T\}.$$

У нових координатах (1) має вигляд

$$MU \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + a_1(\tau)\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} - a_2(\xi,\tau)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2a_3(\xi,\tau)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \tau} -$$

$$- b_1(\xi,\tau)\frac{\partial U}{\partial \xi} = f_1(\xi,\tau) \qquad (4)$$

при початкових

$$U\big|_{\tau=0}=0\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}=0 \tag{5}$$

і граничних умовах

$$U\big|_{\xi=0}=0\,, \qquad U\big|_{\xi=1}=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\Big|_{\xi=0}=0\,, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\Big|_{\xi=1}=0\,. \tag{6}$$

Коефіцієнти $a_2(\xi,\tau)$, $a_3(\xi,\tau)$, $b_1(\xi,\tau)$, визначені в прямокутнику Q_1, $a_1(\tau)$ для $\tau\in(0,T)$, мають вигляд

$$a_1(\tau)=\frac{1}{\ell^4}\,, \quad a_2(\xi,\tau)=\frac{a^2}{\ell^2}-\frac{(\ell_1'+\xi\ell')^2}{\ell^2}\,,$$

$$a_3(\xi,\tau)=\frac{\ell_1'+\xi\ell'}{\ell}\,, \quad b_1(\xi,\tau)=\frac{\ell_1''+\xi\ell''}{\ell}-\frac{(\ell_1'+\xi\ell')\ell'}{\ell^2}=\frac{\partial a_3}{\partial \tau}\,. \tag{7}$$

Очевидно, що $a_2+a_3^2=\frac{a^2}{\ell^2}>0$. Таким чином, задача (1)-(3) для функції $U(x,t)$ зводиться до задачі (4)-(6).

Розглянемо два класи функцій $H_0^{2,1}(Q_1)$ і $\hat{H}_0^{2,1}(Q_1)$. Позначимо через $C_0^{2,1}(\bar{Q}_1)$ множину функцій із $C^{2,1}(\bar{Q}_1)$, які дорівнюють нулю в околі бічної сторони прямокутника Q_1 , а через $\hat{C}_0^{2,1}(\bar{Q}_1)$ ті функції із $C_0^{2,1}(\bar{Q}_1)$, що дорівнюють нулю в околі верхньої межі прямокутника; $H_0^{2,1}(Q_1)$ і $\hat{H}_0^{2,1}(Q_1)$ – відповідно замикання множин $C_0^{2,1}(\bar{Q}_1)$ і $\hat{C}_0^{2,1}(\bar{Q}_1)$ в нормі простору $H^{2,1}(Q_1)$ [2].

Надалі всюди

$$(k,p)=\int\limits_{Q_1} kp\,d\xi\,d\tau\,, \quad [k,p]=\int\limits_0^1 kp\,d\xi\,.$$

Назвемо функцію $U(\xi,\tau)\in H_0^{2,1}(Q_1)$ узагальненим розв"язком задачі (4)-(6), якщо вона задовольняє інтегральну тотожність

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial \tau},\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)+\left(a_1\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2},\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}\right)+\left(a_2\frac{\partial U}{\partial \xi},\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)+\left(\frac{\partial a_2}{\partial \xi}\frac{\partial U}{\partial \xi},\eta\right)+$$

$$+2\left(\frac{\partial a_3}{\partial \xi}\frac{\partial U}{\partial \tau},\eta\right)+2\left(a_3\frac{\partial U}{\partial \tau},\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)-\left(\frac{\partial a_3}{\partial \tau}\frac{\partial U}{\partial \xi},\eta\right)=(f_1,\eta) \tag{8}$$

для будь-якої функції $\eta(\xi,\tau)\in \hat{H}_0^{2,1}(Q_1)$, а також умову $U|_{\tau=0}=0$.

Теорема. Нехай $a_1(\tau)$ неперервна та має обмежену похідну по $\tau(\tau\in(0,T))$; $a_2(\xi,\tau)$, $a_3(\xi,\tau)$ – неперервні і мають обмежені похідні по ξ і τ в Q_1 ; виконуються також нерівності

$$\left|\frac{\partial a_1}{\partial \tau}\right|\leqslant\frac{4K}{\ell^4},\ \left|\frac{\partial a_2}{\partial \tau}\right|\leqslant\frac{2(B+K)a^2}{\ell^2},\ \left|\frac{\partial a_2}{\partial \xi}\right|\leqslant\frac{2KK_1}{|\ell|},$$

$$\left|\frac{\partial a_3}{\partial \tau}\right|\leqslant\frac{Ba}{|\ell|},\ \left|\frac{\partial a_3}{\partial \xi}\right|\leqslant K,\ |a_3|\leqslant\frac{K_1}{|\ell|},\ K_1\leqslant a, \tag{9}$$

де $\ell=\ell_2(\tau)-\ell_1(\tau)$, B,K – додатні сталі. Тоді, якщо $f_1(\xi,\tau)\in L_2(Q_1)$, існує узагальнений розв"язок задачі (4)–(6).

Для доведення існування узагальненого розв"язку застосуємо метод Гальоркіна [2]. Наближений розв"язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{U}_N(\xi,\tau)=\sum_{K=1}^{N}C_K(\tau)\varphi_K(\xi),$$

де $\tilde{U}_N$ повинні задовольняти (8) при $\eta=C_K\varphi_K$. Всі $\varphi_K(\xi)$ утворюють повну ортонормовану систему власних функцій, які задовольняють рівняння

$$a^2\frac{d^2\varphi_K}{d\xi^2}-\frac{d^4\varphi_K}{d\xi^4}+\mu_K\varphi_K=0$$

та крайові умови

$$\varphi_K(0)=0,\quad \varphi_K(1)=0,$$

$$\frac{d^2\varphi_K(0)}{d\xi^2}=0,\quad \frac{d^2\varphi_K(1)}{d\xi^2}=0.$$

Коефіцієнти $C_K(\tau)$ визначаємо зі системи

$$[M\tilde{U}_N,\varphi_i]=[f_1,\varphi_i] \tag{10}$$

при початкових умовах $C_K(0)=0$, $C_K'(0)=0$, $K=1,\dots,N$. У матричному вигляді (10) запишемо як

$$C''(\tau)+A(\tau)C'(\tau)+B(\tau)C(\tau)=F(\tau), \tag{11}$$

причому початкові умови задаються нульовими матрицями. Використовуючи початкові умови та вводячи позначення

$$C''(\tau)=Z(\tau),\ C'(\tau)=\int_0^\tau Z(v)dv,\ C(\tau)=\int_0^\tau (\tau-v)Z(v)dv,$$

(II) можна записати у вигляді еквівалентного йому інтегрального рівняння Вольтера другого роду

$$Z(\tau)=F(\tau)-\int_0^\tau\left[A(\tau)+(\tau-v)B(\tau)\right]Z(v)dv. \tag{I2}$$

Виходячи з умов, ядро цього рівняння не має особливості. З цього випливає існування обмеженого розв"язку (I2). Отже, (I0) має єдиний неперервний розв"язок.

Проведемо оцінки норм наближеного розв"язку та його похідних рівномірно по N.

Лема. Якщо виконуються умови (9), то наявна оцінка

$$\|\widetilde{U}_N\|_{H^{2,1}(Q_1)}\leq P\|f_1\|_{L_2(Q_1)}. \tag{I3}$$

Доведення. Домножимо обидві частини (I0) на $e^{-\gamma\tau}C_s'(\tau)$, сумуємо по s від 1 до N і далі інтегруємо по τ від 0 до τ_1. Використовуючи початкові та граничні умови для функції $\widetilde{U}_N$, одержуємо

$$\frac{1}{2}e^{-\gamma\tau_1}\int_0^1\left[\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\tau}\right]^2_{\tau=\tau_1}d\xi+\frac{\gamma}{2}\left(e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\tau},\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\tau}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}e^{-\gamma\tau_1}\int_0^1 a_1\left[\frac{\partial^2\widetilde{U}_N}{\partial\xi^2}\right]^2_{\tau=\tau_1}d\xi+\frac{\gamma}{2}\left(a_1e^{-\gamma\tau}\frac{\partial^2\widetilde{U}_N}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2\widetilde{U}_N}{\partial\xi^2}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial\tau}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial^2\widetilde{U}_N}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2\widetilde{U}_N}{\partial\xi^2}\right)+\frac{1}{2}e^{-\gamma\tau_1}\int_0^1 a_2\left[\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\xi}\right]^2_{\tau=\tau_1}d\xi+$$
$$+\frac{\gamma}{2}\left(a_2e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\xi},\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\xi}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial\tau}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\xi},\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\xi}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial a_2}{\partial\xi}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\xi},\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\tau}\right)+\left(\frac{\partial a_3}{\partial\xi}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\tau},\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\tau}\right)-$$
$$-\left(\frac{\partial a_3}{\partial\tau}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\xi},\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\tau}\right)=\left(f_1e^{-\gamma\tau},\frac{\partial\widetilde{U}_N}{\partial\tau}\right). \tag{I4}$$

Оцінимо, користуючись нерівністю $|ab| \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ і умовами (9), окремі доданки лівої частини та праву частину (I3). Одержуємо

$$\frac{1}{2}e^{-\gamma\tau_1}\int_0^1\left[\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau}\right]^2_{\tau=\tau_1}d\xi + \frac{1}{2}e^{-\gamma\tau_1}\frac{1}{\ell^4}\int_0^1\left[\frac{\partial^2\tilde{U}_N}{\partial\xi^2}\right]^2_{\tau=\tau_1}d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}e^{-\gamma\tau_1}\left[1-\frac{K_1^2}{a^2}\right]\int_0^1\frac{a^2}{\ell^2}\left[\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi}\right]^2_{\tau=\tau_1}d\xi+\left[\frac{\gamma}{2}-\frac{3}{2}-K\right]\left(e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau},\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau}\right)+$$

$$+\left[\frac{\gamma}{2}\left[1-\frac{K_1^2}{a^2}\right]-(B+K)-\frac{B^2}{2}-\frac{2K^2K_1^2}{a^2}\right]\left(\frac{a^2}{\ell^2}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi},\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi}\right)+$$

$$+\left[\frac{\gamma}{2}-2K\right]\left(\frac{1}{\ell^4}e^{-\gamma\tau}\frac{\partial^2\tilde{U}_N}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2\tilde{U}_N}{\partial\xi^2}\right)\le(f_1,f_1). \tag{I5}$$

Виберемо $\gamma > 0$ достатньо великим. Тоді всі доданки зліва в (I5) будуть невід"ємними, звідки випливає рівномірна по N обмеженість норм

$$\left(\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau},\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\tau}\right)\le P^2(f_1,f_1),\ \left(\frac{a^2}{\ell^2}\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi},\frac{\partial\tilde{U}_N}{\partial\xi}\right)\le P^2(f_1,f_1),$$

$$\left(\frac{1}{\ell^4}\frac{\partial^2\tilde{U}_N}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2\tilde{U}_N}{\partial\xi^2}\right)\le P^2(f_1,f_1). \tag{I6}$$

Із оцінок (I6) на основі теореми про слабу компактність випливає існування підпослідовності індексів N_K такої, що $\partial\tilde{U}_{N_K}/\partial\tau$, $\partial\tilde{U}_{N_K}/\partial\xi$, $\partial^2\tilde{U}_{N_K}/\partial\xi^2$ слабо збігаються до $\partial U/\partial\tau$, $\partial U/\partial\xi$, $\partial^2 U/\partial\xi^2$. При цьому з огляду на те, що оператор вкладення цілком неперервний, $\tilde{U}_{N_K}$ сильно збігається до U. Для граничної функції справедлива оцінка

$$\|U\|_{H^{2,1}(Q_1)}\le P\|f_1\|_{L_2(Q_1)}.$$

Функція U - шуканий узагальнений розв"язок змішаної задачі [2].

I. Драгиева Н.А. Применение метода Галеркина к решению волнового уравнения в области с подвижными границами. - Журн. вычислит. математики и мат. физики, I975, I5, № 4, с. 946-956.
2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, I983. - 424 с.

Стаття надійшла до редколегії 08.03.84

УДК 517.946

В.М.Цимбал

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

В області $D=\{(x,t):0\le x\le \ell, 0\le t\le T\}$ розглянемо задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u = f(x,t), \qquad (1)$$

$$u(0,t)=0\,,\ u(\ell,t)=0,\ u(x,0)+\beta u(x,T)=0, \qquad (2)$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Нехай виконуються умови:

1) $a(x)$, $f(x,t)$ – достатньо гладкі, що забезпечує можливість проведення подальших викладок;

2) $a(x)>0\ (0\le x\le \ell)$, $\beta^2\le 1$, $f(x,0)+\beta f(x,T)=0$.

Зауважимо, що задача (1), (2) при виконанні умов 1), 2) має і притому єдиний розв"язок, що випливає з результатів праці [1].

Побудуємо асимптотичне розвинення розв"язку задачі (1), (2) за степенями малого параметра ε, при цьому використовуємо метод примежового шару [3]. Відзначимо, що випадки $\beta=0$ досліджено у праці [7], $\beta=-1$ методом примежового шару – у працях [2, 4], а методом регуляризації у праці [6].

Асимптотичне розвинення розв"язку задачі (1), (2) шукаємо у виді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\left(V_i(x,t)+\Pi_i(\xi,t)+Q_i(\eta,t)\right)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad (3)$$

де $\xi=x/\varepsilon$; $\eta=(\ell-x)/\varepsilon$; N – натуральне число – точність асимптотики, функції, що входять у (3), визначені нижче.

Рівняння для знаходження регулярної частини асимптотики одержуємо, застосовуючи стандартну процедуру методу збурень

$$\frac{\partial V_0}{dt}+a(x)V_0=f(x,t), \frac{\partial V_i}{\partial t}+a(x)V_i=\frac{\partial^2 V_{i-2}}{\partial x^2}\ (i=1,\dots,N). \qquad (4)$$

Тут і надалі для скорочення запису вважаємо, що функція з від"ємним індексом тотожно дорівнює нулю.

Опишемо, як одержуються рівняння для визначення функцій $\Pi_i(\xi,t)\ (i=0,\dots,N)$. В операторі L_ε зробимо регуляризуюче перетворення $\xi = x/\varepsilon$ і розвинемо коефіцієнт $b(x)$ у скінченну стрічку Тейлора в околі $x=0$. Одержаний таким чином оператор позначимо M_ε. Зрівнюючи в $M_\varepsilon\left(\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i \Pi_i(\xi,t)\right)=0$ коефіцієнти при однакових степенях ε дістаємо рівняння для визначення $\Pi_i(\xi,t)$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial t}-\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2}+a(0)\ \Pi_i=g_i(\xi,t)\,(\,i=0,\dots,N), \tag{5}$$

де $g_0(\xi,t)=0$, $g_i(\xi,t)$ $(i=1,\dots,N)$ лінійно виражаються через $\Pi_j(\xi,t)$ $(j<i)$.

Рівняння для визначення $Q_i(\eta,t)\,(i=0,\dots,N)$ одержуємо аналогічно (регуляризуюче перетворення у околі $x=\ell, \eta=(\ell-x)/\varepsilon$)

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}-\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \eta^2}+a(\ell)Q_i=h_i(\eta,t)\,, \tag{6}$$

де $h_i(\eta,t)\,(i=0,\dots,N)$ легко виписати в явному вигляді.

Рекурентні процеси визначення функцій, що входять у (3), зв"язані між собою. Для знаходження цього зв"язку використаємо (3) і умови (2). У результаті записуємо

$$V_i(x,0)+\beta V_i(x,T)=0 \quad (i=0,\dots,N)\,, \tag{7}$$

$$\Pi_i(0,t)=-V_i(0,t),\ \Pi_i(\xi,0)+\beta\Pi_i(\xi,T)=0\ (i=0,\dots,N), \tag{8}$$

$$Q_i(0,t)=-V_i(\ell,t),\ Q_i(\eta,0)+\beta Q_i(\eta,T)=0\ (\,i=0,\dots,N)\,. \tag{9}$$

Отже, функції $V_i(x,t)$ визначаємо з розв"язування граничних задач (4), (7) для звичайних диференціальних рівнянь. Функції $\Pi_i(\xi,t)$ і $Q_i(\eta,t)$ шукаємо як розв"язки відповідно задач (5), (8) і (6), (9) для параболічних рівнянь. Функції визначають рекурентно у такому порядку: $V_0(x,t)$, $\Pi_0(\xi,t)$, $Q_0(\eta,t)$, $V_1(x,t)$ і т.д. Однозначна розв"язальність задач (4), (7) очевидна. Функції $\Pi_i(\xi,t)$ і $Q_i(\eta,t)$ є функціями типу примежового шару в околі меж відповідно $x=0$ та $x=\ell$. Доведення цього проводиться аналогічно [2, 4] (суттєво використовується друга з умов 2)) і тому опускається.

Залишковий член є розв"язком задачі аналогічної задачі (I), (2). Методом інтегралів енергії [5] одержана оцінка

$$\|R_N\|_{L_2(D)} \leq C\varepsilon^{N+1}, \tag{I0}$$

де константа C не залежить від ε.

На закінчення сформулюємо результат роботи.

Теорема. Нехай виконуються умови I), 2). Тоді розв"язок задачі (I), (2) допускає асимптотичне розвинення (3), де $U_i(x,t)$, функції типу примежового шару $\Pi_i(\xi,t)$ та $Q_i(\eta,t)$ визначаються рекурентно і є розв"язками відповідно задач (4), (7); (5), (8); (6), (9), залишковий член $R_N(x,t,\varepsilon)$ допускає оцінку (I0).

I. Вабищевич П.Н. Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности. - Дифференциальные уравнения, 1981, 17, № 7, с. 1193-1199. 2. Васильева А.Б., Дворянинов С.В. О периодических решениях сингулярно возмущенных уравнений параболического типа. - Науч. тр. Куйбышевского гос. пед. ин-та, 1979, № 232, с. 145-154. 3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3-122. 4. Дворянинов С.В. Об асимптотике периодических решений сингулярно возмущенных уравнений параболического типа. - М., 1978. - 18 с. Рукопись деп. ВИНИТИ, № 3535. 5. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. - 840 с. 6. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981.- 400 с. 7. Треногин В.А. Об асимптотике решения почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем. - Успехи мат. наук, 1961, 12, № 1, с. 163-170.

Стаття надійшла до редколегії 01.09.82

УДК 517.946

В.М.Флюд

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

В області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq \ell, 0\leq t\leq T, T>0, \ell>0\}$ розглянемо задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,t)u=f(x,t), \tag{I}$$

$$u(x,0;\varepsilon)=\varphi(x),\ u_t(x,0;\varepsilon)=\psi(x), \tag{2}$$

$$u(0,t;\varepsilon)=\mu_1(t),\ u(\ell,t;\varepsilon)=\mu_2(t), \tag{3}$$

де $0<\varepsilon\ll 1$ - малий параметр.

Методом примежового шару [2, 3], застосовуючи функції кутового примежового шару, побудуємо асимтотичний до деякого порядку $N>0$ розклад розв"язку задачі (I) - (3).

Нехай виконуються умови:

I) всі дані задачі (I)-(3) достатньо гладкі для справедливості проведених нижче викладок;

2) $a(x,t)>0\ \forall(x,t)\in D,\ b(0,t)<0,\ b(\ell,t)>0\ \forall t\in[0,T]$;

3) справедливі такі умови узгодженості:

$$\varphi(0)=\mu_1(0),\ \psi(0)=\mu_1'(0),$$

$$\varphi(\ell)=\mu_2(0),\ \psi(\ell)=\mu_2'(0),$$

$$\varphi''(0)=\mu_1''(0),\ \varphi''(\ell)=\mu_2''(0),$$

$$a(0,0)\psi(0)+b(0,0)\varphi'(0)+c(0,0)\varphi(0)=f(0,0),$$

$$a(\ell,0)\psi(\ell)+b(\ell,0)\varphi'(\ell)+c(\ell,0)\varphi(\ell)=f(\ell,0);$$

4) $|b(x,t)|<a(x,t)\ \forall(x,t)\in D$.

Умови 2), 3), 4) відіграють важливу роль при побудові функцій примежових шарів різної природи, які виникають у задачі та під час оцінки залишкового члена.

Змішана задача виду (I)-(3) розглянута М.Г.Джавадовим [4] (у випадку $n>2$ незалежних змінних) і Р.Гілом [6] (у випадку двох незалежних змінних) за умови, що функція $b(x,t)$ одного знака в розглядуваній області. Асимптотику розв"язку порядку $N>0$ вони будували без використання функцій кутового примежового шару, але на дані задачі накладались більш жорсткі умови узгодженості.

Асимптотичний розклад розв"язку задачі (I)-(3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i(x,t)+\varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(\xi,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i^*(\zeta,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i(\xi,\tau)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i^*(\zeta,\tau)+R_N(x,t;\varepsilon), \tag{4}$$

де $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$, $\xi=\dfrac{x}{\varepsilon}$; $\zeta=\dfrac{\ell-x}{\varepsilon}$ - регуляризуючі перетворення, функції, що входять у (4), визначимо нижче.

Регулярна частина асимптотики $V(x,t;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i V_i(x,t)$ визначається із задач (тут і надалі для скорочення запису вважаємо, що функція з від"ємним індексом тотожно дорівнює нулеві)

$$\begin{cases} a(x,t)\dfrac{\partial V_k}{\partial t}+b(x,t)\dfrac{\partial V_k}{\partial x}+c(x,t)V_k=f_k(x,t), \\ V_k(x,0)=\varphi_k(x), \qquad (k=\overline{0,N}), \end{cases} \tag{5}$$

де $f_0(x,t)=f(x,t),\ f_k(x,t)=-\dfrac{\partial^2 V_{k-1}}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 V_{k-1}}{\partial x^2},\ (k\geq 1),\ \varphi_0(x)=\varphi(x),$

$$\varphi_k(x)=-\Pi_{k-1}(x,0),\ (k\geq 1).$$

Функції $\Pi(x,\tau;\varepsilon)=\varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)$, $Q(\xi,t;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(\xi,t)$, $Q^*(\zeta,t;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i^*(\zeta,t)$ повинні в сумі з регулярною частиною асимптотики $V(x,t;\varepsilon)$ задоволняти відповідно другу початкову умову (2), першу та другу граничні умови (3). Задачі для знаходження $\Pi_i(x,\tau),\ Q_i(\xi,t),\ Q_i^*(\zeta,t)$ отримуємо [1] стандартним способом. Вони мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Pi_k}{\partial\tau^2}+a(x,0)\dfrac{\partial\Pi_k}{\partial\tau}=\pi_k(x,\tau), \\ \dfrac{\partial\Pi_k}{\partial\tau}(x,0)=\psi_k(x),\ \Pi_k(x,\tau)\xrightarrow[\tau\to\infty]{}0, \end{cases} \tag{6}$$

де $\pi_k(x,\tau)$ – деяка лінійна комбінація $\Pi_s(x,\tau)$ $(s<k)$ і їх похідних, причому $\pi_0(x,\tau)\equiv 0;\ \psi_0(x)=\psi(x)-\dfrac{\partial V_0}{\partial t}(x,0),\ \psi_k(x)=-\dfrac{\partial V_k}{\partial t}(x,0)\,(k\geq 1);$

$$-\frac{\partial^2 Q_k}{\partial\xi^2}+b(0,t)\frac{\partial Q_k}{\partial\xi}=q_k(\xi,t),$$

$$Q_k(0,t)=\mu_{1k}(t),\ Q_k(\xi,t)\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0,\ (k=\overline{0,N}); \tag{7}$$

$$-\frac{\partial^2 Q_k^*}{\partial\zeta^2}-b(\ell,t)\frac{\partial Q_k^*}{\partial\zeta}=q_k^*(\zeta,t),$$

$$Q_k^*(0,t)=\mu_{2k}(t),\ Q_k^*(\zeta,t)\xrightarrow[\zeta\to\infty]{}0,\ (k=\overline{0,N}); \tag{8}$$

$q_k(\xi,t)$ і $q_k^*(\zeta,t)$ певним чином виражаються відповідно через $Q_s(\xi,t)$ і $Q_s^*(\zeta,t)$ $(s<k)$, причому $q_0(\xi,t)\equiv 0$, $q_0^*(\zeta,t)\equiv 0$, $\mu_{10}(t)=\mu_1(t)-V_0(0,t)$, $\mu_{20}=\mu_2(t)-V_0(\ell,t)$, $\mu_{1k}(t)=-V_k(0,t)$, $\mu_{2k}(t)=-V_k(\ell,t)$, $(k\geq 1)$.

Таким чином, функції $\Pi_i(x,\tau), Q_i(\xi,t), Q_i^*(\zeta,t)$ знаходять відповідно з (6) – (8) як розв"язки задач для звичайних диференціальних рівнянь (x і t у відповідних задачах – параметри). Легко переконатись, що при виконанні умови 2) ці функції являються функціями примежового шару.

Функція $\Pi(x,\tau;\varepsilon)$, задовольняючи другу початкову умову з $v(x,t;\varepsilon)$, вносить нев"язку в граничні умови при $x=0$ і $x=\ell$. Аналогічно функції $Q(\xi,t;\varepsilon)$ і $Q^*(\zeta,t;\varepsilon)$ вносять нев"язки в початкові умови. Для їх усунення будують функції кутових примежових шарів $P(\xi,\tau;\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i(\xi,\tau)$ і $P^*(\zeta,\tau;\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i^*(\zeta,\tau)$ які відіграють роль відповідно в точках $(0,0)$ і $(\ell,0)$.

Розглянемо кутовий примежовий шар $P(\xi,\tau;\varepsilon)$, а $P^*(\zeta,\tau;\varepsilon)$ будуємо аналогічно. Враховуючи сказане, для знаходження $P_\kappa(\xi,\tau)$ записуємо задачі

$$\frac{\partial^2 P_\kappa}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 P_\kappa}{\partial\xi^2}+a(0,0)\frac{\partial P_\kappa}{\partial\tau}+b(0,0)\frac{\partial P_\kappa}{\partial\xi}=g_\kappa(\xi,\tau),$$

$$P_\kappa(\xi,0)=-Q_\kappa(\xi,0),\ \frac{\partial P_\kappa}{\partial\tau}(\xi,0)=-\frac{\partial Q_{\kappa-1}}{\partial t}(\xi,0),$$

$$P_\kappa(0,\tau)=-\Pi_{\kappa-1}(0,\tau),\ P_\kappa(\xi,\tau)\xrightarrow[\xi,\tau\to\infty]{}0, \tag{9}$$

де $g_\kappa(\xi,\tau)$ лінійно виражається через $P_s(\xi,\tau)$ $(s<\kappa)$ і їх похідні, причому $g_0(\xi,\tau)\equiv 0$.

Отже, для визначення функцій $P_\kappa(\xi,\tau)$ $(\kappa=\overline{0,N})$ маємо граничну задачу в чверті площини для гіперболічного рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Записавши явний вигляд розв"язків задач (6), (7), можна переконатись, що початкові та гранична умови задачі (9) узгоджені в кутовій точці $(0,0)$.

Розв"язок задачі (9) можна записати в явному вигляді за допомогою функції Рімана [5]. Доведемо лему, аналогічну лемі з праці [4], і покажемо, що $P_\kappa(\xi,\tau)$ дійсно функції кутового примежового шару. Для залишкового члена $R_N(x,t;\varepsilon)$ методом інтегралів енергії [5] одержимо оцінку

$$\| R_N(x,t;\varepsilon)\|_{L_2(D)}\leq C\varepsilon^{N+1}. \tag{10}$$

Сформулюємо цей результат у вигляді теореми.

Теорема. Нехай виконуються умови 1) – 4). Тоді розв"язок задачі (1)-(3) допускає асимптотичне зображення виду (4), де функції $V_i(x,t)$ знаходяться як розв"язки задач (5), звичайні примежові шари $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $Q_i^*(\zeta,t)$ являються відповідно розв"язками задач (6), (7), (8); $P_i(\xi,\tau)$, $P_i^*(\zeta,\tau)$ – функції кутового примежового шару, залишковий член задовольняє (10).

Висловлюємо вдячність В.М.Цимбалу за керівництво роботою.

1. Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. – Мат. сб., 1977, 104, № 3, с. 460–485. 2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 278 с. 3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Успехи мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3–122. 4. Джавадов М.Г. Смешанная задача для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных. – Докл. АН СССР, 1963, 152, № 4, с. 790–793. 5. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с. 6. Geel R. On Initial-Boundary Value Problems of Hyperbolic Type in Singular Perturbation Theory. – In.: Report of the Mat. Institute of Amsterdam, 1975, p. 1–30.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.85

УДК 517.946

Г.П.Лопушанська

РОЗВ"ЯЗОК ДРУГОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

У ряді праць [3 – 5] доведено існування розв"язку загальної параболічної крайової задачі в різних функціональних просторах, у деяких просторах узагальнених функцій. За допомогою функції Гріна і фундаментальної функції побудуємо розв"язок другої крайової задачі для параболічного рівняння другого порядку у просторі узагальнених функцій D'.

Нехай Ω_0 – область в R^n, обмежена замкненою $n-1$ -вимірною поверхнею Ω_1, класу C^∞; $Q_i=[0,T]\times\Omega_i$, $i=0,1$; $D(\overline{\Omega}_0)$, $D(\overline{Q}_0)$, $D(Q_1)$ – простори нескінченно диференційованих функцій відповідно у $\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \cup \Omega_1$, $\bar{Q}_0$, Q_1 . В $\bar{Q}_0$ розглядаємо рівномірно параболічний оператор

$$L\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(t,x)$$

з коефіцієнтами $a_{ij}(t,x)$, $a_i(t,x)$, $a_0(t,x)$ із простору $D(\bar{Q}_0)$.

Для довільних $u, v \in D(\bar{Q}_0)$ наявна формула Гріна

$$\int_{Q_0} vLu\,dt\,dx - \int_{Q_1} Cvu\,dt\,dx + \int_{\Omega_0} v(0,x)u(0,x)\,dx =$$

$$= \int_{Q_0} L^* v u\,dt\,dx - \int_{Q_1} v \cdot Bu\,dt\,dx + \int_{\Omega_0} v(T,x)u(T,x)\,dx ,$$

де L^* – оператор, формально спряжений до оператора L ;

$$B\left(t,x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u = a(t,x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)n_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \beta(t,x)u ;$$

$$C\left(t,x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u = a(t,x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)n_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \left[\beta(t,x) + b(t,x)\right]u ;$$

$$a(t,x) = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t,x)n_i(x)\right)^2\right]^{1/2} ;$$

$$b(t,x) = \sum_{i=1}^{n}\left[a_i(t,x) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}(t,x)}{\partial x_j}\right]n_i(x) ;$$

$\beta(t,x) \in D(Q_1)$, $\beta|_{Q_1} > 0$, $n_i(x)$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі $n(x)$ до Ω_1 у точці x .

Нехай $\overset{\circ}{D}(\bar{Q}_i) = \left\{\varphi(t,x) \in D(\bar{Q}_i) : \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \varphi(t,x)\Big|_{t=T} = 0,\ k = 0,1,\dots\right\}$,

$i = 0,1$; $X_2(\bar{Q}_0) = \left\{\varphi(t,x) \in \overset{\circ}{D}(\bar{Q}_0) : C\varphi\,|_{Q_1} = 0\right\}$, $Z(\bar{Q}_0)$ – простір функцій, який задовольняє умову $X_2(\bar{Q}_0) \subset Z(\bar{Q}_0) \subset \overset{\circ}{D}(\bar{Q}_0)$; $D'(\bar{Q}_i)$, $\overset{\circ}{D}'(\bar{Q}_i)$, $D'(\bar{\Omega}_0)$, $Z'(\bar{Q}_0)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій [1] на відповідних просторах функцій; $(\varphi, F)_0$ – дія узагальненої функції $F \in \overset{\circ}{D}'(\bar{Q}_0)$ на основну функцію $\varphi \in \overset{\circ}{D}(\bar{Q}_0)$, а також дія $F \in Z'(\bar{Q}_0)$ на $\varphi \in Z(\bar{Q}_0)$, $(\varphi, F)_1$ – дія $F \in \overset{\circ}{D}'(Q_1)$ на $\varphi \in \overset{\circ}{D}(Q_1)$, $[\varphi, F]_0$ – дія $F \in D'(\bar{\Omega}_0)$ на $\varphi \in D(\bar{\Omega}_0)$.

Здійснимо постановку узагальненої другої крайової задачі.

Нехай $F\in Z'(\bar{Q}_0)$, $F_1\in\overset{\circ}{D}'(Q_1)$, $F_2\in D'(\bar{\Omega}_0)$. Знайти в Q_0 розв"язок задачі

$$Lu=F\ ,\quad Bu\big|_{Q_1}=F_1\ ,\quad u\big|_{t=0}=F_2\ . \tag{I}$$

Узагальнену функцію $u\in\overset{\circ}{D}'(\bar{Q}_0)$ вважаємо розв"язком задачі (I), якщо для довільної $\psi\in X_2(\bar{Q}_0)$

$$(L^*\psi,u)_0=(\psi,F)_0+(\psi,F_1)_1+[\psi(0,x),F_2]\,. \tag{2}$$

Теорема I. Розв"язок другої узагальненої крайової задачі єдиний у просторі $\overset{\circ}{D}'(\bar{Q}_0)$.

Теорема 2. Нехай $F\in Z'(\bar{Q}_0)$, $F_1\in\overset{\circ}{D}'(Q_1)$, $F_2\in D'(\bar{\Omega}_0)$. Функція $u\in\overset{\circ}{D}'(\bar{Q}_0)$ визначена за формулою

$$(\varphi,u)_0=\Big(\int_\tau^T dt\int_{\Omega_0}\varphi(t,x)G(t,x;\tau,y)\,dx,F\Big)_0+ \tag{3}$$

$$+\Big(\int_\tau^T dt\int_{\Omega_0}\varphi(t,x)G(t,x;\tau,y)\,dx,F_1\Big)_1+\Big[\int_0^T dt\int_{\Omega_0}\varphi(t,x)G(t,x;0,y)\,dx,F_2\Big],$$
$$\varphi(t,x)\in\overset{\circ}{D}(\bar{Q}_0),$$

де $G(t,x;\tau,y)$ - функція Гріна другої крайової задачі для оператора L є розв"язком узагальненої другої крайової задачі.

Теореми доводяться так само, як і відповідні теореми для узагальнених еліптичних граничних задач [2]. При цьому використовують лему й основні властивості функції Гріна [3, 4].

Теорема 3. Нехай $F=F_2=0$, $F_1\in\overset{\circ}{D}'(Q_1)$. Функція u є розв"язком узагальненої другої крайової задачі в сенсі (2) тоді і тільки тоді, коли

$$Lu(t,x)=0\,,\ (t,x)\in Q_0\,,\ u\big|_{t=0}=0\,, \tag{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q_{1\varepsilon}}\varphi(t,x_\varepsilon)\,B\Big(t,x_\varepsilon,\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\Big)u(t,x_\varepsilon)\,dt\,dx_\varepsilon=(\varphi,F_1)_1 \tag{5}$$

для довільної $\varphi(t,x)\in\overset{\circ}{D}(Q_1)$ (тут $Q_{1\varepsilon}=[\varepsilon,T]\times\Omega_{1\varepsilon}$, $\Omega_{1\varepsilon}$ - паралельна до Ω_1 поверхня в Ω_0 ; $x_\varepsilon=x-\varepsilon\nu(x)$, якщо $x_\varepsilon\in\Omega_{1\varepsilon}$, $x\in\Omega_1$; $\nu(x)$ - орт нормалі $n(x)$; $\varphi(t,x_\varepsilon)\in D(Q_{1\varepsilon})$ - продовження функції $\varphi(t,x)$).

Доведення. Приймаючи у (2) $\psi(t,x)\in D(Q_0)$, дістаємо $Lu=0$ в Q_0 , а тоді, як відомо, $u\in D(Q_0)$. Для довільної $\psi\in X_2(\bar{Q}_0)$ записуємо ліву частину (2) як $\int_{Q_0}L^*\psi u\,dt\,dx=$ $=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q_{0\varepsilon}}L^*\psi u\,dt\,dx$ і перетворюємо з допомогою формули Гріна.

Отримуємо $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}}\psi(\varepsilon,x)u(\varepsilon,x)dx=0\ \ \forall\psi(0,x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi(\varepsilon,x)\in D(\bar{\Omega}_0)$ (це означає, що $\lim\limits_{t\to 0}u(t,x)=0$) і

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_{1\varepsilon}}[C\psi(t,x_\varepsilon)u(t,x_\varepsilon)-\psi(t,x_\varepsilon)Bu(t,x_\varepsilon)]dtdx_\varepsilon=(\psi,F_1)_1\ \ \forall\psi\in X_2(\bar{Q}_0).$$

Для кожної $\varphi(t,x_\varepsilon)\in\mathring{D}(Q_{1\varepsilon})$ при досить малих значеннях ε існує $\psi(t,x)\in X_2(Q_{0\varepsilon})$, така що $\psi(t,x_\varepsilon)=\varphi(t,x_\varepsilon)$ і $C\psi(t,x_\varepsilon)=0$ на $Q_{1\varepsilon}$. Вважаючи, що $\varphi(t,x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varphi(t,x_\varepsilon)$, із останньої рівності дістаємо (5). Для доведення оберненого твердження досить перевірити, що функція $u(t,x)=(\theta(t-\tau)G(t,x;\tau,y),F_1)_1$ є розв"язком розглядуваної задачі в обох визначеннях. Тут $\theta(t-\tau)=\theta(t)\theta(\tau)\times\theta(t-\tau)\theta(T-t)$, так що $(\varphi(\tau),\theta(t-\tau))=\int_0^t\varphi(\tau)d\tau$, $(\varphi(t),\theta(t-\tau))=\int_\tau^T\varphi(t)dt$ для довільної $\varphi(t)\in D([0,T])$.

<u>Теорема 4</u>. Нехай $F\in Z'(\bar{Q}_0)$, $F_1\in\mathring{D}'(Q_1)$, $F_2\in D'(\bar{\Omega}_0)$. Узагальнена функція $u\in\mathring{D}'(\bar{Q}_0)$, визначена формулою

$$(\varphi,u)_0=\Big(\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_0}\varphi(t,x)\Gamma(t,x;\tau,y)dx,F\Big)_0+ \tag{6}$$

$$+\Big[\int_0^T dt\int\limits_{\Omega_0}\varphi(t,x)\Gamma(t,x;0,y)dx,F_2\Big]+\Big(\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_0}\varphi(t,x)\Gamma(t,x;\tau,y)dx,R\Big)_1,\quad \varphi(t,x)\in\mathring{D}(\bar{Q}_0),$$

де $\Gamma(t,x;\tau,y)$ – фундаментальна функція оператора L;

$$(g,R)_1=(\varphi_g,F_1)_1-\Big(\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_1}\varphi(t,x)\Gamma(t,x;\tau,y)dx,F\Big)_0-$$

$$-\Big[\int_0^T dt\int\limits_{\Omega_1}\varphi(t,x)\Gamma(t,x;0,y)dx,F_2\Big]; \tag{7}$$

$g\in\mathring{D}(Q_1)$, $\varphi_g\in\mathring{D}(Q_1)$ – розв"язок інтегрального рівняння

$$\frac{1}{2}\varphi(\tau,y)+\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_1}\varphi(t,x)H(t,x;\tau,y)dx=g(\tau,y), \tag{8}$$

$H(t,x;\tau,y)=B(t,x,\frac{\partial}{\partial x})\Gamma(t,x;\tau,y)$ є розв"язком узагальненої другої крайової задачі.

<u>Доведення</u>. Застосовуючи лему до функцій $u=\theta(t-\tau)\Gamma(t,x;\tau,y)$, $u=\Gamma(t,x;0,y)$, дістаємо $\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_0}L^*\psi(t,x)\Gamma(t,x;\tau,y)dx-\psi(\tau,y)=$
$=\int_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_1}\psi(t,x)B(t,x,\frac{\partial}{\partial x})\Gamma(t,x;\tau,y)dx$, $(\tau,y)\in Q_0$, $\tau\geq 0$ для кожної $\psi\in X_2(\bar{Q}_0)$.
Використовуючи (2) і отриману тотожність, можна показати, що узагальнена функція $v\in\mathring{D}'(\bar{Q}_0)$ така, що для кожної $\varphi\in\mathring{D}(\bar{Q}_0)$

$(\varphi, v)_0$ дорівнює сумі двох перших доданків у (6), є розв"язком задачі: $Lv=F$, $v|_{t=0}=F_2$, $Bv|_{Q_1}=\widetilde{F}_1$, де $\widetilde{F}_1\in \mathring{D}'(Q_1)$ однозначно визначається узагальненими функціями F і F_2.
Розв"язок $w(t,x)$ задачі $Lw=0$, $w|_{t=0}=0$, $Bw|_{Q_1}=F_1-\widetilde{F}_1$ шукаємо у вигляді

$$w(t,x)=(\Theta(t-\tau)\Gamma(t,x;\tau,y),R)_1,\ (t,x)\in Q_0 \tag{9}$$

з невідомою $R\in \mathring{D}'(Q_1)$. За теоремою 3 R можна шукати з умови (5), у якій u замінено на w, а F_1 – на $F_1-\widetilde{F}_1$. Приходимо до (7), (8). Розв"язок вихідної задачі $u=v+w$ має вигляд (6).

I. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, I98I. – 5I2 с. 2. Гупало А.С., Лопушанская Г.П. Об одном представлении решения обобщенной граничной задачи для эллиптической по Петровскому системы дифференциальных уравнений. – Укр. мат. журн., I985, 37, № I, с. I28-I3I. 3. Ивасишен С.Д. Сопряженные операторы Грина и корректная разрешимость параболических граничных задач в негативных пространствах Гельдера. – Дифференциальные уравнения, I984, № 4, с. 470-48I. 4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, I967. – 736 с. 5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, I97I. – 37I с. 6. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, I968. – 427 с.

Стаття надійшла до редколегії I8.02.85

УДК 5I7.946

Г.-В.С.Гупало

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ КОШІ В ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай x і t – одновимірні дійсні змінні, $-\infty<x<+\infty$, $0<t<+\infty$. Розглянемо диференціальне рівняння в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами:

$$D_t^2u=a^2D_x^2u+c^2u,\ a>0. \tag{I}$$

Замість (I) можна розглядати рівняння, в яке входять похідні першого порядку по x і t зі сталими коефіцієнтами, але воно заміною змінних $u(x,t)=e^{\lambda x+\mu t}v(x,t)$ зводиться до вигляду (I).

Шукаємо розв"язок (I) у вигляді $u=u_t(x)$, де $u_t(x)$ – узагальнена функція на $-\infty<x<+\infty$, яка залежить від параметра t (індекс t в u_t не означає диференціювання по t).

В (I) D_x^2 – оператор узагальненого диференціювання, D_t^2 – оператор диференціювання по параметру. Крім того, вимагаємо виконання (I) тільки в сенсі рівності в $\mathcal{D}'$. Задаємо початкові умови: при $t \to +0$ узагальнена функція $u_t(x)$ збігається в D' до $f(x)$, а $D_t u_t(x)$ збігається в $\mathcal{D}'$ до $g(x)$, де f і g – задані елементи з $\mathcal{D}'$.

Припустивши, що f і g – перетворювані за Лапласом узагальнені функції [5] зі смугами збіжності, що перетинаються, формально одержимо розв"язок за допомогою перетворення Лапласа. Потім покажемо, що цей формальний розв"язок дійсно задовольняє диференціальне рівняння (I) і початкові умови.

При застосуванні перетворення Лапласа розглядаємо t як параметр і x як незалежну змінну. У зв"язку з цим використаємо позначення $L[u_t(x)] = U_t(s)$. Функція $U_t(s)$ – звичайна по t і s, де $0<t<+\infty$ і s змінюється в деякій смузі збіжності $\Omega_u \neq \emptyset$.

Вважаючи, що операції L і D_t комутують, за допомогою перетворення Лапласа і його властивостей (I) перетворимо в

$$D_t^2 U_t(s) = (a^2 s^2 + c^2) U_t(s), \tag{2}$$

загальний розв"язок якого

$$U_t(s) = A(s) e^{-\sqrt{a^2s^2+c^2}\,t} + B(s) e^{\sqrt{a^2s^2+c^2}\,t}. \tag{3}$$

Нехай $L[f] = F(s)$, якщо $s \in \Omega_f$ і $L[g] = G(s)$, коли $s \in \Omega_g$. Вважаючи, що операція переходу до границі при $t \to +0$ і L переставні, з початкових умов дістаємо при $s \in \Omega_f \cap \Omega_g$ співвідношення

$$F(s) = U_t(s)\Big|_{t \to +0} = A(s) + B(s), \tag{4}$$

$$G(s) = D_t U_t(s)\Big|_{t \to +0} = -\sqrt{a^2s^2+c^2}\,A(s) + \sqrt{a^2s^2+c^2}\,B(s),$$

з яких визначаємо $A(s)$ і $B(s)$. Підставивши їх в (3), одержимо

$$U_t(s) = \frac{1}{2}\left[F(s) - \frac{G(s)}{\sqrt{a^2s^2+c^2}}\right] e^{-\sqrt{a^2s^2+c^2}\,t} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[F(s) + \frac{G(s)}{\sqrt{a^2s^2+c^2}}\right] e^{\sqrt{a^2s^2+c^2}\,t}. \tag{5}$$

Використовуючи властивості, а також таблиці перетворення Лапласа [1, 2, 4, 5, 6], повертаємось від зображень до оригіналів, і бачимо, що розв"язок розглядуваної задачі Коші набуває вигляду (детальних викладок не проводимо внаслідок їх громіздкості)

$$u_t(x)=\frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right]+$$

$$+\frac{ct}{a}\left[h(x+at)-h(x-at)\right]+\frac{1}{a}\left[p(x+at)-p(x-at)\right], \tag{6}$$

де

$$h(x)=\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}}*f(x);$$

$$p(x)=I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}\right)*g(x);$$

$I_0(z), I_1(z)$ – модифіковані функції Бесселя нульового та першого порядків; $I_0(z)=J_0(iz)$, $I_1(z)=-iJ_1(iz)$, причому $I_0'(z)=I_1(z)$.

Отримавши формально розв"язок (6), безпосередньою перевіркою показуємо, що він задовольняє рівняння (1) в сенсі D' і накладеним початковим умовам. Причому під час перевірки ніде не використовується той факт, що розв"язок і початкові умови належать класові узагальнених функцій перетворюваних за Лапласом (тут також не пишемо викладок, внаслідок їх громіздкості).

Отже, формула (6) дає представлення розв"язку задачі Коші для рівняння (1) і тоді, коли узагальнені функції f і g не є перетворюваними за Лапласом. Якщо f і g – звичайні функції, то формула (6) збігається з відповідним класичним розв"язком [3].

Таким чином, метод перетворення Лапласа при розв"язуванні диференціальних рівнянь у частинних похідних можна використовувати для знаходження вигляду розв"язку навіть у тому випадку, коли задані функції не належать до класу функцій, які допускають перетворення.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, 1969. – 318 с. 2. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977. – 286 с. 3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 687 с. 4. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z – преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с. 5. Земанян А.Г.

Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1974. – 398 с. 6. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л е ш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.02.85

УДК 517.946

Т.О.Мельник, В.М.Кирилич

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ТИПУ СТЕФАНА ДЛЯ СЛАБОЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо слаболінійну гіперболічну систему першого порядку у півплощині $t>0$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x}=F_i(x,t,u),\ i=\overline{1,n},$$
$$u=(u_1(x,t),\dots,u_n(x,t)). \qquad (1)$$

Нехай ℓ_1, ℓ_2 – гладкі криві, задані відповідно рівняннями $x=a(t)$ і $x=b(t)$ ($a(0)=a$, $b(0)=b$, $a,b-const$, $a(t)<b(t)$ для всіх $t>0$), а T – задане число.

Припускаємо, що перші k із величин $\lambda_i(a(t),t)-a'(t)$ ($i=\overline{1,n}$) – додатні, решта $n-k$ від"ємні при всіх $t\in[0,T]$. Аналогічні припущення вважаються виконаними і відносно величин $\lambda_i(b(t),t)-b'(t)$ ($i=\overline{1,n}$). При цьому $0<k<n$. Випадки $k=0$ і $k=n$ – тривіальні.

Розглянемо таку задачу: в області $G_T=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:\ a(t)<x<b(t),\ 0<t\leq T\}$ знайти розв"язки $u_1(x,t),\dots,u_n(x,t)$ системи (1) і функції $a(t)$, $b(t)$ на інтервалі $]0,T]$ так, щоб задовольнялись початкові

$$u_i(x,0)=g_i(x)\ (x\in[a,b],\ i=\overline{1,n}), \qquad (2)$$

граничні

$$\int\limits_{a(t)}^{b(t)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{si}(x,t)u_i(x,t)dx=h_s(\rho(t),t),\quad s=\overline{1,n} \qquad (3)$$

та додаткові умови на ℓ_1 і ℓ_2

$$H_i(\rho(t),t,\rho'(t),u(\rho(t),t))=0,\ i=1,2, \qquad (4)$$

де $p(t)=(a(t), b(t))$. Всі задані функції в (I)-(4) - дійснозначні.

Ця задача є варіантом однофазної двосторонньої задачі типу Стефана для системи (I). Задачі типу Стефана для гіперболічних рівнянь і систем вивчались у працях [2, 3, 5-7, 9-10]. Нелокальні граничні задачі для системи (I)розглянуті в працях [1, 4, 8].

Задачі типу Стефана для гіперболічних рівнянь і систем з нелокальними інтегральними умовами в літературі не вивчались.

Припустимо додатково, що задані $a'(0)$, $b'(0)$, виконується умова

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}(a,0)\ldots\alpha_{1k}(a,0)\alpha_{1,k+1}(b,0)\ldots\alpha_{1n}(b,0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}(a,0)\ldots\alpha_{nk}(a,0)\alpha_{n,k+1}(b,0)\ldots\alpha_{nn}(b,0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

і умови узгодження рівняння (I), початкових умов (2) і умов (3)-(4):

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \alpha_{si}(x,0) g_i(x)dx = h_s(p,0),\ s=\overline{1,n}\ , \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \Big\{\alpha_{si}(b,0)g_i(b)b'(0)-\alpha_{si}(a,0)g_i(a)a'(0)+ \\ &+\int_a^b\Big[\frac{\partial\alpha_{si}(x,0)}{\partial t}g_i(x)+\alpha_{si}(x,0)(-\lambda_i(x,0)g_i'(x)+ \\ &\qquad + F_i(x,0,g(x)))\Big]dx\Big\} = \\ &=(a'(0)+b'(0))\frac{\partial h_s(p,0)}{\partial x}+\frac{\partial h_s(p,0)}{\partial t},\ s=\overline{1,n}\ , \end{aligned} \tag{7}$$

$$H_i(p,0,p'(0),g(p))=0,\ i=1,2, \quad p=(a,b),\ g=(g_1(x),\ldots,g_n(x)). \tag{8}$$

Теорема. Нехай:

1) коефіцієнти $\lambda_i\in C^1(\overline{G}_{\varepsilon_0})$, $i=\overline{1,n}$, $\overline{G}_{\varepsilon_0}=\{(x,t): a(t)<x<b(t),\ t\in[0,\varepsilon_0]\}$ для деякого $\varepsilon_0>0$;

2) функції $F_i(x,t,u)\in C(\overline{G}_{\varepsilon_0}\times R^n)$, $i=\overline{1,n}$ задовольняють по u локальну умову Ліпшиця:

$$\forall \varepsilon>0, \forall U>0, \exists L>0: |F(x,t,\bar{u})-F(x,t,\bar{\bar{u}})| \leq$$
$$\leq L|\bar{u}-\bar{\bar{u}}|,\ t\in[0,\varepsilon],\ a\leq x\leq b,\ |\bar{u}|,|\bar{\bar{u}}|\in U,\ \varepsilon\leq\varepsilon_0 ;$$

3) функції $g_i(x)\in C^1[a,b]$, $i=\overline{1,n}$;

4) коефіцієнти $\alpha_{si}\in C^1(\bar{G}_{\varepsilon_0})$, $i=\overline{1,n}$,

$$h_s\in C^1([a,b]^2\times[0,\varepsilon_0]),\ s=\overline{1,n} ;$$

5) функції $H_i\in C^1([a,b]^2\times[0,\varepsilon_0]\times[a'(0),b'(0)]^2\times R^{2n})$,

$$H'_{ip'(t)}\Big|_{t=0}\neq 0,\ i=1,2 ;$$

6) виконуються умови (5)-(8).

Тоді існує $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0=T]$ таке, що задача (I)-(4) має в $\bar{G}_\varepsilon$ єдиний неперервний узагальнений розв"язок, визначений для всіх $t\in[0,\varepsilon]$.

Доведення. Задамо $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $h>0$ і позначимо через D^h_ε множину функцій $p=(a,b)\in[C^1[0,\varepsilon]]^2$, для яких

$$|p(t)|<\varepsilon,\ |p'(t)-p'(0)|\leq h,\ 0\leq t\leq\varepsilon .$$

ε і h вважатимемо настільки малими, щоб виконувались припущення відносно знаків величин $\lambda_i(p(0),0)-p'(0)$ $(i=\overline{1,n})$.

Використовуючи результати праць [I, 4, 6] і умову 2) даної теореми, кожній функції $p\in D^h_\varepsilon$ відповідає неперервний узагальнений розв"язок задачі (I)-(3) в $\bar{G}_\varepsilon$; цей розв"язок позначаємо через $U(x,t;p)$, причому

$$|U(x,t;p)|\leq U_0=const,$$
$$(x,t)\in\bar{G}_\varepsilon,\ p\in D^h_\varepsilon .$$

Легко довести, що залежність $U(p(t),t;p)$ задовольняє умову Ліпшиця $\exists L\geq 0, \forall p^1,p^2\in D^h_\varepsilon$:

$$\max_{0\leq t\leq\varepsilon}|U(p^1(t),t;p^1)-U(p^2(t),t;p^2)|\leq$$

$$\leq L\left[\max_{0\leq t\leq\varepsilon}|p^1(t)-p^2(t)|+\max_{0\leq t\leq\varepsilon}|p^{1\prime}(t)-p^{2\prime}(t)|\right].$$

Підставивши $U(x,t;p)$ в (4), згідно з умовою 5) одержимо

$$p'(t)=\bar{H}(p(t),t,U(p(t),t;p)).$$

Розглянемо оператор $B: p \to Bp$, який діє за формулою

$$(Bp)(t) = \int_0^t \bar{H}(\tau, p(\tau), U(p(\tau), \tau; p))d\tau, \; t \in [0, \varepsilon].$$

Шуканий розв"язок оператора B є його нерухомою точкою. З умови узгодження (8) випливає, що коли при фіксованому h, достатньо зменшити ε, то оператор B відображає D_ε^h в себе і в метриці $[C^1[0,\varepsilon]]^2$ – стискуючий. Звідси за теоремою Банаха випливає існування і єдиність шуканого розв"язку, який можна знайти методом ітерацій. Теорема доведена.

1. Мельник З.О., Кирилич В.М. Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой. – Укр. мат. журн., 1983, 35, № 6, с. 721-727. 2. Мельник З.О. Задача с неизвестными границами для гиперболической системы первого порядка. – В кн.: Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. К.: Наук. думка, 1983, с. 77-79. 3. Мельник З.О. Смешанная задача с неизвестной границей для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8, с. 13-15. 4. Мельник З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем. – Дифференциальные уравнения, 1985, 21, № 2, с. 246-253. 5. Мельник Т.Е. Сопряжение решений гиперболического уравнения второго порядка вдоль неизвестной границы. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 12, с. 10-12. 6. Мельник Т.Е. Задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка. – Укр. мат. журн., 1982, 34, с. 380-384. 7. Мельник Т.Е. Двухфазная задача типа Стефана для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка. – В кн.: Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. К.: Наук. думка, 1983, с. 77-79. 8. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. – Дифференциальные уравнения, 1983, 19, № 1, с. 86-94. 9. Hill C. Denson A hyperbolic free boundary problem. – J. Math. Anal. and Appl., 1970, 31, N1, p. 117-119. 10. Socio L.M., Gualtieri G. A hyperbolic Stefan problem. – Quart. Appl. Math., 1983, 41, N2, p. 253-259.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.85

УДК 517.946

В.Г.Костенко, Л.О.Губаль

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

На прикладі задачі для системи двох рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Du-f(x,t) \tag{1}$$

у півсмузі $\Pi\left\{0<x<x_0, t>0\right\}$ з початковими

$$u\big|_{t=0}=\psi(x) \tag{2}$$

та крайовими

$$A\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\mu(t),\ u\big|_{x=x_0}=\nu(t) \tag{3}$$

умовами пропонуємо ефективний алгоритм її розв"язування з допомогою ЕОМ, який базується на застосуванні методу прямих з наступною побудовою матриці Гріна.

Тут $A=\|a_{ij}\|$, $D=\|d_{ij}\|_{i,j=1,2}$ – сталі матриці; $f(x,t)$ $\psi(x)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ – задані; $u(x,t)$ – шукана вектор-функція.

Розв"язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t)=v(x,t)+W(x,t), \tag{4}$$

де $W(x,t)=(x-x_0)A^{-1}\mu(t)+\nu(t)$. Тоді $v(x,t)$ має бути розв"язком задачі

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+Dv-F(x,t) \quad \text{в } \Pi, \tag{5}$$

$$v\big|_{t=0}=\varphi(x), \tag{6}$$

$$A\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\ v\big|_{x=x_0}=0, \tag{7}$$

де $F(x,t)=f(x,t)+\frac{\partial W}{\partial t}-DW$; $\varphi(x)=\psi(x)-W(x,0)$.

Прямими $t=k\tau$ / $k=1,2,\dots$ (розсікаємо півсмугу Π на частини, вводимо позначення $v(x,k\tau)=v_k(x)/k=0,1,2,\dots)$ і замінюємо в (5)-(7) $\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=k\tau}$ кінцево-різницевим відношенням $\frac{v_k(x)-v_{k-1}(x)}{\tau}$.

Після цього (5)-(7) перетворюється в крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$A\frac{d^2 v_k}{dx^2}+\left(D-\frac{1}{\tau}E\right)v_k=\Phi_k(x),\ k=1,2,\dots \tag{8}$$

$$v_0(x)=\varphi(x), \tag{9}$$

$$A\frac{dv_k}{dx}\Big|_{x=0}=0\,,\quad v_k(x)\Big|_{x=x_0}=0\,, \tag{10}$$

де $\Phi_k(x)=F_k(x)-\frac{v_{k-1}(x)}{\tau}$.

Нехай α_i – дійсні прості корені характеристичного рівняння

$$\alpha^4+\frac{1}{\det A}\left\{\left[a_{11}\left(d_{22}-\frac{1}{\tau}\right)+a_{22}\left(d_{11}-\frac{1}{\tau}\right)-a_{12}d_{21}-a_{21}d_{12}\right]\alpha^2+\left(d_{11}-\frac{1}{\tau}\right)\left(d_{12}-\frac{1}{\tau}\right)-d_{12}d_{21}\right\}=0 \tag{11}$$

для відповідної однорідної системи (8) і

$$\gamma_{2i}=-\frac{a_{11}\alpha_i^2+d_{11}-\frac{1}{\tau}}{a_{12}\alpha_i^2+d_{12}}\,,\quad i=\overline{1,4}\,. \tag{12}$$

Тоді $\left\|\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{21}\end{pmatrix}e^{\alpha_1 x},\ \begin{pmatrix}1\\ \gamma_{22}\end{pmatrix}e^{\alpha_2 x},\ \begin{pmatrix}1\\ \gamma_{23}\end{pmatrix}e^{\alpha_3 x},\ \begin{pmatrix}1\\ \gamma_{24}\end{pmatrix}e^{\alpha_4 x}\right\|$ – фундаментальна матриця розв"язків відповідної однорідної системи (8). Остання дає змогу знайти в явному вигляді матрицю Гріна $G(x,\xi)$, яка визначається умовами:

а) $G(x,\xi)$ два рази неперервно диференційовна по x для $x\neq\xi$,

б) $G(x,\xi)$ задовольняє рівняння $A\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\left(D-\frac{1}{\tau}E\right)G=0$ для $x\neq\xi$ і крайові умови $A\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$, $G\Big|_{x=x_0}=0$,

в) $G(x,\xi)$ неперервна, включаючи і $x=\xi$,

г) $\frac{\partial G(\xi+0,\xi)}{\partial x}-\frac{\partial G(\xi-0,\xi)}{\partial x}=A^{-1}$.

Перший стовпчик матриці $G(x,\xi)$ шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix}G_{11}(x,\xi)\\ \\ G_{21}(x,\xi)\end{pmatrix}=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{4}(a_i+b_i)\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{2i}\end{pmatrix}e^{\alpha_i x}, & 0\le x\le\xi,\\ \sum\limits_{i=1}^{4}(a_i-b_i)\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{2i}\end{pmatrix}e^{\alpha_i x}, & \xi\le x\le x_0.\end{cases} \tag{13}$$

Задовольняючи спочатку умови в) і г) означення матриці $G(x,\xi)$, знаходимо однозначно b_1, b_2, b_3, b_4 як розв"язок системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{4}b_i e^{\alpha_i\xi}=0,\quad \sum_{i=1}^{4}b_i\gamma_{2i}e^{\alpha_i\xi}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{4}b_i\alpha_i e^{\alpha_i\xi}=-\frac{a_{22}}{2\det A}\,,\quad \sum_{i=1}^{4}b_i\gamma_{2i}\alpha_i e^{\alpha_i\xi}=\frac{a_{21}}{2\det A}\,. \tag{14}$$

Після цього умови а) і б) означення $G(x,\xi)$ також дають змогу знайти однозначно a_1, a_2, a_3, a_4 із системи рівнянь

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(a_{11}+a_{12}\gamma_{2i})a_i=-\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(a_{11}+a_{12}\gamma_{2i})b_i\,,\\
\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(a_{21}+a_{22}\gamma_{2i})a_i=-\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(a_{21}+a_{22}\gamma_{2i})b_i\,,\\
\sum_{i=1}^{4}e^{\alpha_i x_0}a_i=\sum_{i=1}^{4}e^{\alpha_i x_0}b_i\,,\\
\sum_{i=1}^{4}\gamma_{2i}e^{\alpha_i x_0}a_i=\sum_{i=1}^{4}\gamma_{2i}e^{\alpha_i x_0}b_i\,.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Тому що (11) біквадратне, то можемо прийняти $\alpha_1=-\alpha_2=\lambda$, $\alpha_3=-\alpha_4=\beta$ і тоді з формул (12) маємо $\gamma_{21}=\gamma_{22}$, $\gamma_{23}=\gamma_{24}$.
З врахуванням останнього розв"язки систем (14) і (15) зображаються формулами

$$
b_1=\frac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})e^{-\lambda\xi}}{4\lambda(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A}\,,\quad b_2=-\frac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})e^{\lambda\xi}}{4\lambda(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A}\,,
$$

$$
b_3=-\frac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})e^{-\beta\xi}}{4\beta(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A}\,,\quad b_4=\frac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})e^{\beta\xi}}{4\beta(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A}\,;
$$

$$
a_1=\frac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})[sh\,\lambda(x_0-\xi)-e^{-\lambda x_0}ch\,\lambda\xi]}{4\lambda(\gamma_{21}-\gamma_{23})ch\,\lambda x_0\det A}\,,
$$

$$
a_2=\frac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})[sh\,\lambda(x_0-\xi)+e^{\lambda x_0}ch\,\lambda\xi]}{4\lambda(\gamma_{21}-\gamma_{23})ch\,\lambda x_0\det A}\,,
$$

$$
a_3=\frac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})[e^{-\beta x_0}ch\,\beta\xi-sh\,\beta(x_0-\xi)]}{4\beta(\gamma_{21}-\gamma_{23})ch\,\beta x_0\det A}\,,
$$

$$
a_4=-\frac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})[e^{\beta x_0}ch\,\beta\xi+sh\,\beta(x_0-\xi)]}{4\beta(\gamma_{21}-\gamma_{23})ch\,\beta x_0\det A}\,,
$$

а перший стовпчик матриці $G(x,\xi)$ (I3) набуває вигляду

$$(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A\begin{pmatrix} G_{11}(x,\xi)\\ G_{21}(x,\xi)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})sh\lambda(x_0-\xi)}{\lambda ch\lambda x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{21}\end{pmatrix}ch\lambda x-\dfrac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})sh\beta(x_0-\xi)}{\beta ch\beta x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{23}\end{pmatrix}ch\beta x,\ 0\le x\le\xi\\[2ex] \dfrac{(a_{22}\gamma_{23}+a_{21})ch\lambda\xi}{\lambda ch\lambda x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{21}\end{pmatrix}sh\lambda(x_0-x)-\dfrac{(a_{22}\gamma_{21}+a_{21})ch\beta\xi}{\beta ch\beta x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{23}\end{pmatrix}sh\beta(x_0-x),\\ \xi\le x\le x_0.\end{cases} \quad (I6)$$

Аналогічно знаходимо і другий стовпчик матриці $G(x,\xi)$:

$$(\gamma_{21}-\gamma_{23})\det A\begin{pmatrix} G_{12}(x,\xi)\\ G_{22}(x,\xi)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{(a_{12}\gamma_{23}+a_{11})sh\lambda(x_0-\xi)}{\lambda ch\lambda x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{21}\end{pmatrix}ch\lambda x+\dfrac{(a_{12}\gamma_{21}+a_{11})sh\beta(x_0-\xi)}{\beta ch\beta x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{23}\end{pmatrix}ch\beta x,\ 0\le x\le\xi\\[2ex] -\dfrac{(a_{12}\gamma_{23}+a_{11})ch\lambda\xi}{\lambda ch\lambda x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{21}\end{pmatrix}sh\lambda(x_0-x)+\dfrac{(a_{12}\gamma_{21}+a_{11})ch\beta\xi}{\beta ch\beta x_0}\begin{pmatrix}1\\ \gamma_{23}\end{pmatrix}sh\beta(x_0-x),\\ \xi\le x\le x_0.\end{cases} \quad (I7)$$

Наближений розв"язок задачі (I)-(3) на відрізках прямих $0\le x\le x_0,\ t=k\tau$ зображається формулами

$$U(x,k\tau)=\int_0^{x_0}G(x,\xi)\Phi_k(\xi)d\xi+(x-x_0)A^{-1}\mu(k\tau)+\nu(k\tau), \quad (I8)$$

$k=1,2,\ldots$. Тут $G(x,\xi)$ - матриця Гріна (I6), (I7):

$$\Phi_k(\xi)=F_k(\xi)-\frac{v_{k-1}(\xi)}{\tau}=f(\xi,k\tau)+(\xi-x_0)A^{-1}\mu'(k\tau)+$$

$$+\nu'(k\tau)-D\left[(\xi-x_0)A^{-1}\mu(k\tau)+\nu(k\tau)\right]-\frac{v_{k-1}(\xi)}{\tau},$$

причому $v_0(\xi)=\varphi(\xi)=\psi(\xi)-(\xi-x_0)A^{-1}\mu(0)-\nu(0)$.

Формула (I8) ефективно реалізується на ЕОМ і дає наближений розв"язок цієї задачі з похибкою, яка не перевищує 0,I% при використанні кроку за часом $\tau<0{,}3$.

Зауваження. Ця методика поширюється на різні змішані задачі для більш загальних систем рівнянь параболічного типу, для яких практично можна знайти відповідні матриці Гріна.

Стаття надійшла до редколегії 30.03.85

УДК 539.3

Д.Г.Хлєбніков, Р.М.Бурда, А.О.Музичук

ПІДБІР ОПТИМАЛЬНОЇ ТОВЩИНИ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Розглянемо кругову конічну оболонку сталої товщини h. Нижній її край підкріплено тонким пружним кільцем прямокутного поперечного перерізу, яке вільно лежить на масивній опорі. Оболонка знаходиться під дією рівномірного внутрішнього тиску p та осьового зусилля P, що передається на оболонку через жорстке ядро, яке жорстко з"єднане з верхнім краєм.

Внутрішні силові фактори, переміщення та кут повороту нормалі конічної оболонки відомим чином [2] виражаються через функції Томсона.

Для визначення чотирьох сталих інтегрування використовуємо граничні умови на краях оболонки:

1) на верхньому жорстко защемленому краї $S = S_1$ для радіального переміщення U_z та кута повороту нормалі до серединної поверхні оболонки ϑ маємо

$$U_z(S_1) = 0, \quad \vartheta(S_1) = 0; \tag{1}$$

2) на нижньому краю $S = S_2$ відсутнє осьове переміщення U_z

$$U_z(S_2) = 0, \tag{2}$$

а також виконується умова рівності радіальних зусиль взаємодії оболонки та кільця [3]:

$$\frac{1}{S_2 \cdot \cos\alpha}(U_z \cdot D_0 + \vartheta D_1) = N_S \cos\alpha + Q \sin\alpha, \tag{3}$$

де $$D_0 = E_K \, b \, d; \; D_1 = E_K \, b d b_1; \; b_1 = \frac{1}{2}\left(b - \frac{h}{\cos\alpha}\right); \tag{4}$$

E_K – модуль пружності матеріалу кільця; b, d – висота та ширина кільця; N_S, Q – нормальне і перерізуюче зусилля в круговому перерізі оболонки; α – кут при основі конуса.

Знайшовши з системи чотирьох алгебраїчних рівнянь постійні інтегрування, за відомими формулами визначаємо поле напружень. З допомогою отриманих результатів шукаємо оптимальну товщину конічної оболонки.

Умову міцності оболонки записуємо згідно з енергетичною теорією формозміни

$$\sigma_{екв} = (\sigma_S^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_S \cdot \sigma_\varphi)^{1/2} \leq [\sigma] \ , \tag{5}$$

де σ_S, σ_φ – меридіональні та кільцеві напруження в оболонці, $[\sigma]$ – допустимі напруження.

Оптимальну товщину конічної оболонки визначаємо, використовуючи швидкозбіжний ітераційний процес [I]:

$$h^{(n+1)} = h^{(n)} \left[\frac{\max\limits_{S_1 \leq S \leq S_2} \sigma_{екв}^{(n)}}{[\sigma]} \right]^{1/2} , \tag{6}$$

де $\max\limits_{S_1 \leq S \leq S_2} \sigma_{екв}^{(n)}$ – максимальне значення $\sigma_{екв}$ по всій довжині оболонки товщини $h^{(n)}$.

Наведемо деякі з отриманих з допомогою ЕОМ числових значень (мм) оптимальної товщини конічної оболонки при таких значеннях параметрів: $E = E_к = 2{,}0 \cdot 10^5 \ МПа$; $\nu = 0{,}3$; $\alpha = \pi/6$; $P = \pi R^2 p + P_0$; $R = 30 мм$; $r = 0{,}25R$; $b = 2мм$; $d = 1мм$

(R, r – радіуси нижнього та верхнього торця серединної поверхні конічної оболонки):

	$P_0 = 0$	$P_0 = 50$	$P_0 = 100$	$P_0 = 150$
$p = 0{,}0$	0,0	0,45	0,51	0,55
$p = 1{,}0$	1,68	1,77	1,81	1,83
$p = 2{,}0$	3,12	3,16	3,18	3,19

Значення P_0 дано в ньютонах, а p – в мегапаскалях.

I. Хлебников Д.Г., Янчак В.Я. Оптимальное распределение толщины в плоских криволинейных рамах. – Строительная механика и расчет сооружений, 1976, вып. 7, с. 23-24. 2. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. – М.: Наука, 1968. – 456 с. 3. Шереметьев М.П., Ярема С.Я., Хлебников Д.Г. Подбор оптимальной формы круглого металло-стеклянного кинескопа. – Вопр. машиноведения и прочности в машиностроении, 1961, вып. 7, с. 96-109.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.85

УДК 517.984

Г.І.Чуйко

ПРО ОДНУ НЕСАМОСПРЯЖЕНУ ЕВОЛЮЦІЙНУ ЗАДАЧУ

Розглядаємо оператор A, породжений у просторі $L^2(\mathbb{R}^2_+)$ $\left(\mathbb{R}^2_+ \overset{def}{=}]0,\infty[\times]0,\infty[\right)$ диференціальним виразом

$$\ell[y] = -\Delta y + (p_1(x_1) + p_2(x_2))y \tag{1}$$

і крайовою умовою

$$y\big|_{\partial\mathbb{R}^2_+} = 0, \tag{2}$$

де Δ – оператор Лапласа; комплекснозначні функції $p_j(x_j)$ задоволняють умову

$$|p_j(x_j)| \leq const \cdot exp(-2\varepsilon x_j),\ \varepsilon > 0,\ j = 1,2.$$

Область визначення $D(A)$ оператора A – це множина тих функцій з простору Соболєва $H^2(\mathbb{R}^2_+)$, які задовольняють (2), і $Af = \ell[f]$ при $f \in D(A)$.

Припущення, що потенціал в (1) допускає відокремлення змінних, дає змогу використати оператори A_j, $j = 1,2$, породжені в просторі $L^2(\mathbb{R}_+)$ диференціальними виразами

$$\ell_j[y] = -y'' + p_j(x)y,\ j = 1,2$$

і крайовою умовою $y(0) = 0$. Тоді оператор A можна записати у вигляді

$$A = A_1 \bar{\otimes} 1 + 1 \bar{\otimes} A_2.$$

У праці [3] розглянуто спектральні властивості оператора A, зокрема побудовано A – перетворення Фур"є для функцій $f \in L^2(\mathbb{R}^2_+)$ і розвинення таких функцій за головними функціями оператора A. Оскільки таке розвинення містить добутки головних функцій спектральних особливостей операторів A_1, A_2, які не належать до простору $L^2(\mathbb{R}^2_+)$, природно поширити A – перетворення Фур"є на більш широкі класи функцій, ніж $L^2(\mathbb{R}^2_+)$. A –перетворення Фур"є досить легко поширити [1] на клас помірно зростаючих функцій. Не вдаючись в деталі відзначимо, що, як і в одновимірному випадку, продовжене A –перетворення Фур"є має дефектний підпростір. Він породжений добутками головних функцій операторів A_1, A_2; з яких хоча б одна відповідає спектральним особливостям цих операторів.

Наша мета - показати, що наявність дефектного підпростору не впливає на існування розв"язків деяких еволюційних задач.

Для кожної пари цілих чисел ν_1, ν_2 позначимо через $L^2_{\nu_1,\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$ гільбертів простір, що відповідає нормі

$$\|f\|_{\nu_1,\nu_2}=\Big(\int_{\mathbb{R}^2_+}|(1+x_1)^{\nu_1}(1+x_2)^{\nu_2}f(x_1,x_2)|^2dx_1dx_2\Big)^{1/2}.$$

Тоді простір помірно зростаючих функцій

$$\mathbb{F}=\bigcup_{\nu_1,\nu_2\geq 0}L^2_{-\nu_1,-\nu_2}(\mathbb{R}^2_+).$$

Позначимо через Ψ_0 підпростір простору $\bigcap_{\nu_1,\nu_2\geq 0}L^2_{\nu_1,\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$ функцій, що ортогональні до добутків головних функцій операторів A_1, A_2, з яких хоча б одна відповідає спектральним особливостям цих операторів. Кожна функція $f\in\mathbb{F}$ визначає на Ψ_0 лінійний і неперервний функціонал, який позначаємо тією ж буквою, за формулою

$$\langle\varphi,f\rangle=\int_{\mathbb{R}^2_+}\varphi(x_1,x_2)f(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

Шукаємо тепер оператори, породжені диференціальним виразом (I) і крайовою умовою (2), у просторах Ψ_0 і $\mathbb{F}$. Позначимо через $D_{\nu_1,\nu_2}(A)$ множину функцій h, які разом із узагальненими похідними до другого порядку включно належать до простору $L^2_{\nu_1,\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$, задовольняють крайову умову (2) і такі, що $\ell[h]\in L^2_{\nu_1,\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$.

Приймемо

$$D_{\mathbb{F}}(A)=\bigcup_{\nu_1,\nu_2\geq 0}D_{-\nu_1,-\nu_2}(A),$$

$$D_{\Psi_0}(A)=\Psi_0\cap\Big(\bigcap_{\nu_1,\nu_2\geq 0}D_{\nu_1,\nu_2}(A)\Big).$$

<u>Лема I</u>. Нехай $f,g\in\mathbb{F}$. Для того, щоб $f\in D_{\mathbb{F}}(A)$ і $Af=g$, необхідно і достатньо для всіх $\varphi\in D_{\Psi_0}(A)$ виконування співвідношення

$$\langle A\varphi,f\rangle=\langle\varphi,g\rangle.$$

Позначимо через (A) клас функцій $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, аналітичних у деякому (залежному від F) околі P-спектра оператора A і таких, що задовольняють умову

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \frac{|F(z^2)|}{1+|z|^{2k}} < \infty \tag{3}$$

при деякому невід"ємному k.

Тоді, як випливає з теореми 2.2.II [2], замкнений щільно заданий у $L^2(\mathbb{R}^2_+)$ оператор $F(A)$ є узагальненим спектральним оператором.

Лема 2. Якщо $F\in(A)$ і $k=0$, то оператор $F(A)$ визначений на всьому просторі $\mathbb{F}$ і здійснює неперервне відображення простору $L^2_{-\nu_1,\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$ в себе.

Лема 3. Відповідність $F\longmapsto F(A)$ має таку властивість неперервності. Нехай $\{F_t\}$ – сім"я функцій $F_t\in(A)$, що

1) $\sup_{z\in\mathbb{R}} |F_t(z^2)| < C < \infty$,

де C не залежить від t;

2) $F_t(z)\to 0$ при $t\to 0$ рівномірно у кожній компактній підмножині P-спектра оператора A. Тоді

$$\langle\varphi, F_t(A)f\rangle \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \qquad \text{для всіх } \varphi\in\Psi_{\gamma 0},\ f\in D_{\mathbb{F}}(A).$$

Відповідність $F\longmapsto F(A)$ використовується при побудові розв"язків еволюційних задач в області $\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+,\ t>0\}$.

Теорема. Нехай еволюційна задача визначається співвідношеннями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au, \quad u\big|_{t=+0} = f. \tag{4}$$

Тоді для кожної функції $f\in L^2_{-\nu_1,-\nu_2}(\mathbb{R}^2_+)$ задача (4) має єдиний розв"язок $u(x,t)\in\mathbb{F}$; при $t>0$ функція $u(x,t)\in D_{-\nu_1,\nu_2}(A)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=-Au$ і для кожного $\varphi\in\Psi_{\gamma 0}$

$$\lim_{t\to+0}\langle\varphi, u(x,t)\rangle = \langle\varphi, f\rangle. \tag{5}$$

Доведення. Зауважимо, що функція $F_t(z)=e^{-zt}$ належить до класу (A), причому $\sup_{z\in\mathbb{R}}|z^2 e^{-z^2 t}|<\infty$. З огляду на леми 2, 3, функція $u(x,t)=F_t(A)f\in D_{-\nu_1,-\nu_2}(A)$ диференційовна по t в сенсі норми $\|\cdot\|_{-\nu_1,-\nu_2}$, задовольняє рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=-Au$ і має місце (5).

Для доведення єдиності зауважимо, що коли $\varphi\in\Psi_{\gamma 0}$, то функція $e^{-tA}\varphi$ є розв"язком задачі (4) з початковою функцією φ.

Нехай тепер $u(x,t)$ – розв"язок задачі (4), який задовольняє початкову умову $u(x,+0)=0$. Доведемо, що коли $u(x,t)\in \mathbb{F}$, то $u(x,t)\equiv 0$. Приймемо $\alpha(\tau)=\langle\varphi(x,t-\tau),u(x,\tau)\rangle$, де $\varphi(x,t)$ – розв"язок задачі (4) з початковою функцією $\varphi\in\xi_0$. Тоді

$$\alpha'(\tau)=-\langle\varphi'_t(x,t-\tau),\ u(x,\tau)\rangle+\langle\varphi(x,t-\tau),\ u'_t(x,\tau)\rangle=$$
$$=\langle A\varphi(x,t-\tau),u(x,\tau)\rangle-\langle\varphi(x,t-\tau),Au(x,\tau)\rangle=0,$$

з огляду на лему І. Оскільки $\alpha(+0)=\langle\varphi(x,t),0\rangle=0$, то $\alpha(\tau)=0$ при $0\le\tau\le t$. Таким чином, для довільної функції $\varphi\in\xi_0$ $\langle\varphi,u(x,t)\rangle=0$, тобто $u(x,t)$ належить до дефектного підпростору A -перетворення Фур"є. Тому $u(x,t)$ є лінійною комбінацією (з коефіцієнтами, що залежать від t) добутків головних функцій операторів A_1, A_2, в яких хоча б одна функція відповідає спектральним особливостям цих операторів. Використовуючи те, що $u'_t(x,t)+\ell[u]=0$ і $\ell[s_1(x_1,\lambda_1)s_2(x_2,\lambda_2)]=(\lambda_1+\lambda_2)s_1(x_1,\lambda_1)\times$ $\times s_2(x_2,\lambda_2)/s_j(x_j,\lambda_j)$ – головна функція оператора A_j, $j=1,2$, а також початкову умову $u(x,+0)=0$, доводимо, що коефіцієнти цієї лінійної комбінації тотожно дорівнюють нулю.

Таким чином, відсутність взаємної однозначності A -перетворення Фур"є після виходу з простору $L^2(\mathbb{R}^2_+)$ не впливає на обгрунтування методу Фур"є.

І. Лянце В.Е. Добавление І. – В кн.: Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, с. 443–498. 2. Лянце В.Е., Чуйко Г.И. К теории спектральных операторов. – Львов, 1980. – 14 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4744-80 деп. 3. Чуйко Г.І. Розклад за власними елементами одного несамоспряженого оператора. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981, вип. 28, с. 57–61.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.85

УДК 517.98

М.М.Федик

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ ОСНАЩЕНИХ ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРІВ

Нехай (H_+, H, H_-) - оснащений гільбертів простір [1, 4]. Норму та скалярний добуток у просторі H_α позначаємо відповідно через $\|\cdot\|_\alpha$ і $(\cdot|\cdot)_\alpha$. Вираз $(u|v)$ застосовуємо як скалярний добуток елементів u і v з H, а також значення функціоналу $v \in H_-$ на елементі $u \in H_+$. Всі простори вважаємо сепарабельними. Під підпростором розуміємо лінійний многовид, замкнений у даному гільбертовому просторі. Через $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ позначаємо простір лінійних неперервних операторів $H_1 \to H_2$, через $\mathcal{C}(H)$ - множину замкнених лінійних операторів $H \to H$ з щільною в H областю визначення. Знаки $\oplus$ і $\ominus$ - це відповідно ортогональна сума й ортогональне доповнення в тому гільбертовому просторі, до якого вони застосовані в конкретній ситуації. Через $\hat{\Lambda} \in \mathcal{B}(H_+, H_-)$ позначаємо оператор, такий що $\forall u, v \in H_+ \ (u/v)_+ = (\hat{\Lambda} u/v) = (u/\hat{\Lambda} v)$ і $\Lambda \subset \hat{\Lambda}, D(\Lambda) = \{u \in H_+ | \hat{\Lambda} u \in H\}$. Властивості оператора $\hat{\Lambda}$ описані в праці [4], зауважимо лише, що множина $D(\Lambda)$ щільна в H і H_+. Якщо $T \in \mathcal{C}(H)$, то $D(T)$ зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)_T$, де $\forall u, v \in D(T) \ (u/v)_T \stackrel{df}{=} (u/v) + (Tu/Tv)$ - гільбертів простір, який позначаємо через $D[T]$.

Лема. Нехай X - лінійний многовид в H_+. X щільний в H тоді і тільки тоді, коли $(H_+ \ominus X) \cap D(\Lambda) = \{0\}$.

Вказана лема є деяким узагальненням аналогічного твердження з праці [4]. Доведення аналогічне.

Наслідок 1. Нехай X - підпростір в H_+, $\bar{X} = H$ і $\dim(H_+ \ominus X) < \infty$. Тоді $X \cap D(\Lambda) \neq \{0\}$.

Наслідок 2. Нехай $T \in \mathcal{C}(H)$ і $T_0 \subset T$. Оператор $T_0 \in \mathcal{C}(H)$ тоді і тільки тоді, коли існує такий підпростір $V \subset (D[T])'$, що $V \cap H = \{0\}$ і $\forall u \in D(T_0) \ \forall v \in V \ (u/v) = 0$.

Теорема 1. Нехай X - підпростір в H_+, $\bar{X} = H$, $\dim(H_+ \ominus X) = 1$ і $U \stackrel{df}{=} X \cap D(\Lambda)$. Тоді множина U щільна в H і є підпростором в $D[\Lambda]$.

Доведення. Покажемо щільність множини U в H. Нехай $Y \stackrel{df}{=} H_+ \ominus X$, $y \in Y$, причому $\|y\|_+ = 1$. Далі $(h_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(\Lambda)$ - повна ортонормована система в H_+. Оскільки $H_+ = X \oplus Y$, то

$$\forall n\in N\ \exists \lambda_n\in \mathbb{C}\ \exists x_n\in X\quad h_n=x_n+\lambda_n y\ , \tag{I}$$

причому система $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ лінійно незалежна, бо $Y\cap D(\Lambda)=\{0\}$. Випадок, коли всі $\lambda_n=0$, тривіальний, тому, не втрачаючи загальності, вважаємо, що $\lambda_1\neq 0$. З (I) отримуємо $\forall k,\ell\in N\ V_{k\ell}\overset{df}{=}\lambda_\ell h_k-\lambda_k h_\ell\in U$, тому що $V_{k\ell}=\lambda_\ell x_k-\lambda_k x_\ell$.

Нехай $W\overset{df}{=}H_+\ominus U$. Покажемо, що $W\cap D(\Lambda)=\{0\}$. Оскільки $\{h_n\}$ повна ортонормована система в H_+, а множина W ортогональна в H_+ до $\{V_{k\ell}\}$, то (для $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i h_i\in W$) необхідно, щоб $\forall k,\ell\ \alpha_k\bar\lambda_\ell-\alpha_\ell\bar\lambda_k=0$. Легко бачити, що для цього досить виконання умови

$$\forall k\in N\ \alpha_k\bar\lambda_1-\alpha_1\bar\lambda_k=0\ . \tag{2}$$

З (2) отримуємо, що елементи з W мають вигляд $c\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i h_i$, де $c\in\mathbb{C}$, а λ_i з (I). Не втрачаючи загальності, візьмемо $W\ni w=\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i h_i$ і припустимо, що $w\in D(\Lambda)$. Враховуючи (I), маємо $w=\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i h_i=y\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^2+\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i x_i$. Приймемо $a\overset{df}{=}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^2$, $v\overset{df}{=}\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i x_i$, тобто $w=ay+v$. При цьому $a\neq 0$, а $v\in X$, оскільки множина X замкнена в H_+. Тому що за припущенням $w\in D(\Lambda)$, то $\forall k\ w-\frac{a}{\lambda_k}h_k\in D(\Lambda)$. З іншого боку, $v-\frac{a}{\lambda_k}x_k\in X$, отже, $\forall k\ w-\frac{a}{\lambda_k}h_k\in U$. Оскільки $w\in W=H_+\ominus U$, то $0=(w|w-\frac{a}{\lambda_k}h_k)_+=\|w\|_+^2-(\sum_{i=1}^{\infty}\bar\lambda_i h_i|\frac{a}{\lambda_k}h_k)_+=\|w\|_+^2-a$. Оскільки $w=ay+v,(v/y)_+=0$ і $\|y\|_+=1$, то $\|w\|_+^2=a^2+\|v\|_+^2$. Отже справедлива рівність $a=a^2+\|v\|_+^2$, яка можлива лише при $a\leq 1$. Але коли $a=1$, то $\|v\|_+^2=0$, тобто $ay\in D(\Lambda)$, що суперечить умові теореми. Візьмемо $a<1$ і розглянемо системи $\{h_i\}$ і $\{x_i\}$. Тому що $\|y\|_+=1$, то $\|h_i-x_i\|_+^2=|\lambda_i|^2$ і $\sum_{i=1}^{\infty}\|h_i-x_i\|_+^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^2=a<1$. Згідно з теоремою про збурення ортонормованих систем [3] це означає, що $\{x_i\}$ є базисом в H_+. Разом з тим $\forall i(y/x_i)_+=0$. Таким чином, $w\notin D(\Lambda)$, тобто $W\cap D(\Lambda)=\{0\}$ і згідно з лемою множина $U=X\cap D(\Lambda)$ щільна в H.

Для доведення другої частини твердження зауважимо, що оператори $(1+\Lambda^2)^{-1}$, $\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}$ належать $B(H)$ [5], причому $(1+\Lambda^2)^{-1}H=D(\Lambda^2)$, $\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}H=D(\Lambda)$. Тоді $\forall g\in H_+\ \forall h\in D(\Lambda)\ (\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}g|h)_\Lambda=(\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}g|h)+(\Lambda^2(1+\Lambda^2)^{-1}g\,|\Lambda h)=(g|\Lambda h)=(g|h)_+$. Тому $\forall w\in H_+\ominus U\ \forall u\in U\ (\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}w/u)_\Lambda=0$, тобто $U=X\cap D(\Lambda)$ підпростір в $D[\Lambda]$.

Зауваження. Щільність U в H можна показати і по-іншому. Розглянемо множину $V=\{u\in D(\Lambda)\,|\,\forall y\in Y\ (\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1}y/u)_\Lambda=0\}$. Проводячи ті ж перетворення, що й при доведенні другої частини теореми I, маємо $V \subset X \cap D(\Lambda) = U$. При цьому $\dim V = \infty$, тому що $\dim \Lambda(1+\Lambda^2)^{-1} Y = 1$ і $V = D[\Lambda] \ominus \Lambda(1+\Lambda^2)^{-1} Y$. Оскільки $(\Lambda^2(1+\Lambda^2)^{-1} Y) \cap \cap D(\Lambda) = \{x / x = y - (1+\Lambda^2)^{-1} y,\ y \in Y\} \cap D(\Lambda) = \{0\}$, то $\Lambda(1+\Lambda^2)^{-1} Y \cap D(1+\Lambda^2) = \{0\}$, а тоді, згідно з лемою, множина V щільна в H.

З доведення теореми випливає також, що замиканням множини U в H_+ є множина X.

Теорема 2. Нехай X - підпростір в H_+, $\overline{X} = H$ і $\dim(H_+ \ominus X) = 1$; $(\widetilde{H}_+, H, \widetilde{H}_-)$ - інший оснащений гільбертів простір, такий що $\widetilde{H}_+ \subset H_+$, причому вкладення неперервне і щільне. Тоді множина $X \cap \widetilde{H}_+$ щільна в H і є підпростором в $\widetilde{H}_+$.

Доведення теореми подібне до доведення теореми I.

Наслідок I. Нехай $T_0, T \in \mathcal{C}(H)$, $T_0 \subset T$ і $\dim D(T)/D(T_0) = 1$. Тоді $\overline{D(T_0) \cap D(T^* T)} = H$.

Наслідок 2. Якщо $T_0, T \in \mathcal{C}(H)$ такі ж, як вище, і $\rho(T) \neq \emptyset$, то

$$\forall n \in N \quad \overline{D(T_0) \cap D(T^n)} = H. \tag{3}$$

Справедливість (3) випливає з того, що $\forall n\ T^n \in \mathcal{C}(H)$ [2].

Подібним твердженням у більш загальних ситуаціях присвячена наша інша стаття.

Автор вдячний В.Е.Лянце за обговорення результатів праці.

I. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. - К.: Наук. думка, 1965. - 798 с. 2. Данфорд Е., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. - М.: Изд-во иностр. лит. 1962. - 896 с. 3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. - М.: Мир, 1972. - 740 с. 4. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. - К.: Наук. думка, 1983. - 212 с. 5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. - М.: Мир, 1979. - 592 с.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.85

УДК 513.88

Я.В.Микитюк

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО УНІТАРНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай Γ – борелівська множина в $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, яка задовольняє такі умови: 1) відображення $\Gamma\times]0;\infty[\ni(\omega,t)\mapsto t\omega\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ є бієкцією; 2) на Γ існує зліченно адитивна міра μ задана на всіх борелівських підмножинах Γ і така, що $t^{n-1}dtd\mu=dx$, де $dt(dx)$ елемент об"єму на $]0;\infty[\,(\mathbb{R}^n)$; 3) $\gamma\stackrel{def}{=}\sup_{\omega\in\Gamma}|\omega|<\infty$, $(|\cdot|$ – евклідова норма в $\mathbb{R}^n)$.

Розглянемо унітарний оператор $V:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}_+;G)$, де $\mathbb{R}_+\stackrel{def}{=}]0;\infty[$, $G\stackrel{def}{=}L_2(\Gamma;\mu)$ заданий формулою

$$Vf(t)=t^{(n-1)/2}f(t\omega),\ t\in\mathbb{R}_+ . \tag{1}$$

Оператори V виду (1) зустрічаються при вивченні спектральних властивостей деяких псевдодиференціальних операторів. При цьому важливо знати, як діє оператор V на гладкі функції, зокрема на функції з простору Соболева $H_2^s(\mathbb{R}^n)$, $s\in\mathbb{R}_+$.

<u>Теорема</u>. Нехай $n=2m+1$, $m\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{R}_+$. Тоді оператор V неперервно відображає $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^s(\mathbb{R}_+;G)$.

<u>Доведення</u>. Розглянемо ізометричний оператор $\widetilde{V}:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R};G)$, заданий формулою $\widetilde{V}f(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}t^mf(t\omega)$, $t\in\mathbb{R}$. Покажемо, що $\widetilde{V}$ неперервно відображає $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^s(\mathbb{R};G)$. Для цього розглянемо допоміжний оператор $U=F_1^{-1}\widetilde{V}F$, де $F\ (F_1)$ – оператор Фур"є – Планшереля в $L_2(\mathbb{R}^n)\,(L_2(\mathbb{R};G))$. Нехай $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$ і $f(x)=0$ при $|x|>c>0$. Покажемо, що функція Uf дорівнює нулю майже скрізь при $|t|>\gamma c$. Справді, розглянемо перетворення Радона [2] функції f, тобто

$$\widetilde{f}(\xi,\omega)=(2\pi)^{-n/2}\int_{X_{\xi,\omega}}f(x')dx',$$

де $X_{\xi,\omega}=\{x\in\mathbb{R}^n:(x,\omega)=\xi\}$, $(x,\omega)=x_1\omega_1+\ldots+x_n\omega_n$, $\xi\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Gamma$; dx' – елемент об"єму на $X_{\xi,\omega}$. Функція $\widetilde{f}$ неперервна за змінними ξ,ω і дорівнює нулю при $|\xi|>\gamma c$. Оскільки

$$t^m\hat{f}(t\omega)=t^m\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi t}\widetilde{f}(\xi,\omega)d\xi,$$

де $\hat{f}=Ff$, то при будь-якому $\omega\in\Gamma$ функція $t\mapsto t^m\hat{f}(t\omega)$ є цілою функцією експоненціального типу γc [1]. Враховуючи рівність

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma}|t^m\hat{f}(t\omega)|^2d\mu dt=\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(x)|^2dx,$$

6-2748

на основі теореми Фубіні робимо висновок, що майже для всіх $\omega \in \Gamma$ функція $t \to t^m \hat{f}(t\omega)$ належить $L_2(\mathbb{R})$. Звідси, беручи до уваги теорему Пелі – Вінера, дістаємо, що при $|t| > \gamma c$ функція Uf дорівнює нулю майже скрізь. З огляду на ізометричність оператора U маємо, що для всіх $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{|t| \geq \gamma\xi} \|Uf(t)\|_G^2 dt \leq \int_{|x| \geq \xi} |f(x)|^2 dx .$$

Нехай $q : [0;\infty[\to [0;\infty[$ – неперервна, монотоннозростаюча функція. З попередньої нерівності випливає

$$\int_0^\infty q'(\xi) \int_{|t| \geq \gamma\xi} \|Uf(t)\|_G^2 dt \leq \int_0^\infty q'(\xi) \int_{|x| \geq \xi} |f(x)|^2 dx .$$

Змінюючи порядок інтегрування, зазначаємо

$$\int_{\mathbb{R}} \|Uf(t)\|_G^2 \, q(\gamma^{-1}|t|)\, dt \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 q(|x|)\, dx .$$

Звідси легко отримуємо, що $\widetilde{V}$ неперервно відображає $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^s(\mathbb{R}, G)$, а отже V неперервно відображає $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^s(\mathbb{R}_+; G)$. Теорема доведена.

Зауваження. Вірогідно, що теорема справедлива і для парних n. Але довести цього не вдалося.

1. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на эвклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
2. Хелгасон С. Преобразование Радона. – М.: Мир, 1983. – 148 с.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.85

УДК 539.377

В.З.Дідик, Б.В.Ковальчук

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ПЛАСТИНЦІ ПРИ ЗАЛЕЖНОМУ ВІД КООРДИНАТИ КОЕФІЦІЄНТІ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Розглянемо однорідну ізотропну півбезмежну пластинку товщини 2δ, яка нагрівається зовнішнім середовищем температури $t_0 = const$ по області $d \leq x \leq c$, $z = \pm\delta$ на деякій відстані d від її краю. Через бічні поверхні $z = \pm\delta$ пластинки здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем температури $t_c = t_0 N(x)$, причому коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь області нагріву дорівнює α_0, а поза ними – α_1, де $c = d + 2b$, $N(x) = S_-(x-d) - S_+(x-c)$; $S_\pm(\xi)$ – асиметричні одиничні функції.

Стаціонарне температурне поле у пластинці визначаємо з рівняння теплопровідності [1]

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \left[\varkappa_1^2 + \varkappa N(x)\right]T = -\varkappa_0^2 t_0 N(x) \tag{I}$$

при граничних умовах

$$T\Big|_{x=0} = 0, \quad T\Big|_{x\to\infty} = 0, \tag{2}$$

де $\varkappa = \varkappa_0^2 - \varkappa_1^2$; $\varkappa_i = \alpha_i/\lambda\delta$, $i = 0, 1$; λ – коефіцієнт теплопровідності.

Розв"язок (I) знаходимо таким чином. Помноживши рівняння (I) на $N(x)$, ввівши заміну [1]

$$U = T(x)N(x) \tag{3}$$

та використавши співвідношення [3]

$$S_\pm(x - x_i)S_\pm(x - x_j) = S_\pm(x - x_{max\,i,j}), \tag{4}$$

$$f(x - x_0)\delta_\pm'(x - x_0) = f(x_0)\delta_\pm'(x - x_0) - f'(x_0)\delta_\pm(x - x_0), \tag{5}$$

прийдемо до рівняння відносно функції U

$$U'' - \varkappa_0^2 U = T(2d - x)\delta_-'(x - d) -$$

$$-T(2c - x)\delta_+'(x - c) - \varkappa_0^2 t_0 N(x), \tag{6}$$

де $\delta_\pm(\xi) = \dfrac{dS_\pm(\xi)}{d\xi}$ – дельта-функції Дірака.

Загальний розв"язок рівняння (6) має вигляд

$$U = Ae^{-\varkappa_0 x} + Be^{\varkappa_0 x} + \varphi(x,d)S_-(x-d) - \\ -\varphi(x,c)S_+(x-c), \tag{7}$$

де
$$\varphi(x,x_0) = T(x_0)\,ch\,\varkappa_0(x-x_0) + \\ +\frac{1}{\varkappa_0}T'(x_0)\,sh\,\varkappa_0(x-x_0) + t_0[1-ch\,\varkappa_0(x-x_0)].$$

З рівності (3) випливає, що $U \equiv 0$ при $x<d$. Отже, у виразі (7) $A=B=0$.

На підставі (3) і (7) рівняння (I) зводиться до вигляду

$$T'' - \varkappa_1^2 T = \varkappa[\varphi(x,d)S_-(x-d) - \varphi(x,c)S_+(x-c)] - \\ -\varkappa_0^2 t_0 N(x). \tag{8}$$

Загальний розв"язок (8), який є загальним розв"язком (I), шукаємо як

$$T = c_1 ch\,\varkappa_1 x + c_2 sh\,\varkappa_1 x + \varphi_1(x,d)S_-(x-d) - \\ -\varphi_2(x,c)S_+(x-c), \tag{9}$$

де
$$\varphi_1(x,x_0) = T(x_0)[ch\,\varkappa_0(x-x_0) - ch\,\varkappa_1(x-x_0)] + \\ +T'(x_0)\left[\frac{1}{\varkappa_0}sh\,\varkappa_0(x-x_0) - \frac{1}{\varkappa_1}sh\,\varkappa_1(x-x_0)\right] + t_0[1-ch\,\varkappa_0(x-x_0)].$$

З допомогою (9) знаходимо значення $T(d), T(c), T'(d), T'(c)$, підставляємо їх у (9), після чого записуємо

$$T = c_1\Big\{ch\,\varkappa_1 x + \Big[-ch\,\varkappa_1 x + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}sh\,\varkappa_1 d\,sh\,\varkappa_0(x-d) + \\ + ch\,\varkappa_1 d\,ch\,\varkappa_0(x-d)\Big]S_-(x-d) + \Big[ch\,2\varkappa_0 b\,ch\,\varkappa_1(x-2b) - \\ -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}sh\,\varkappa_1 d\,sh\,\varkappa_0(x-d) - ch\,\varkappa_1 d\,ch\,\varkappa_0(x-d) + \\ +sh\,2\varkappa_0 b\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}ch\,\varkappa_1 d\,sh\,\varkappa_1(x-c) + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}sh\,\varkappa_1 d\,ch\,\varkappa_1(x-c)\right)\Big]S_+(x-c)\Big\} + \\ + c_2\Big\{sh\,\varkappa_1 x + \Big[-sh\,\varkappa_1 x + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}ch\,\varkappa_1 d\,sh\,\varkappa_0(x-d) + \\ +sh\,\varkappa_1 d\,ch\,\varkappa_0(x-d)\Big]S_-(x-d) + \Big[ch\,2\varkappa_0 b\,sh\,\varkappa_1(x-2b) - \\ -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}ch\,\varkappa_1 d\,sh\,\varkappa_0(x-d) - sh\,\varkappa_1 d\,ch\,\varkappa_0(x-d) +$$

$$+\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1 d\operatorname{sh}\varkappa_1(x-c)+\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\operatorname{ch}\varkappa_1 d\operatorname{ch}\varkappa_1(x-c)\right)\Big]S_+(x-c)\Big\}+$$

$$+t_0\Big\{[1-\operatorname{ch}\varkappa_0(x-d)]S_-(x-d)-\big[1-\operatorname{ch}\varkappa_0(x-c)+$$

$$+(1-\operatorname{ch}2\varkappa_0 b)(\operatorname{ch}\varkappa_0(x-c)-\operatorname{ch}\varkappa_1(x-c))-$$

$$-\varkappa_0\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\frac{1}{\varkappa_0}\operatorname{sh}\varkappa_0(x-c)-\frac{1}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1(x-c)\right)\Big]S_+(x-c)\Big\}. \quad (10)$$

Задовольнивши граничні умови (2), знаходимо

$$C_1=0,\ C_2=\frac{t_0\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}2\varkappa_0 b+\operatorname{ch}2\varkappa_0 b-1\right)}{\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1 d+\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{ch}\varkappa_1 d\right)+e^{\varkappa_1 d}\operatorname{ch}2\varkappa_0 b}. \quad (11)$$

Підставивши вирази (11) в формулу (10), одержимо такий загальний розв"язок задачі теплопровідності для розглядуваної пластинки:

$$T=t_0\Big\{\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}2\varkappa_0 b+\operatorname{ch}2\varkappa_0 b-1\right)\operatorname{sh}\varkappa_1 x\,S_+(d-x)+$$

$$+\Big[\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1 d+\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\operatorname{ch}\varkappa_1 d\right)+e^{\varkappa_1 d}\operatorname{ch}2\varkappa_0 b-$$

$$-\operatorname{sh}\varkappa_1 d\operatorname{ch}\varkappa_0(x-d)-\operatorname{ch}\varkappa_1 d\operatorname{ch}\varkappa_0(x-c)-$$

$$-\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\operatorname{ch}\varkappa_1 d(\operatorname{sh}\varkappa_0(x-d)-\operatorname{sh}\varkappa_0(x-c))\Big]N(x)+$$

$$+\Big[\operatorname{ch}2\varkappa_0 b(\operatorname{ch}2\varkappa_0 b-1)(\operatorname{sh}\varkappa_1(x-2b)-e^{\varkappa_1 d}\operatorname{ch}\varkappa_1(x-c))+$$

$$+\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\operatorname{ch}\varkappa_1 d+\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1 d\right)e^{-\varkappa_1(x-c)}\Big]S_+(x-c)\Big\}\times$$

$$\times\left[\operatorname{sh}2\varkappa_0 b\left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\operatorname{sh}\varkappa_1 d+\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\operatorname{ch}\varkappa_1 d\right)+e^{\varkappa_1 d}\operatorname{ch}2\varkappa_0 b\right]^{-1}.$$

(12)

При $d=0$ температурне поле (12) набуває вигляду

$$T=t_0\Big\{\Big[\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}(\operatorname{sh}2\varkappa_0 b-\operatorname{sh}\varkappa_0 x+\operatorname{sh}\varkappa_0(x-2b))+$$
$$+\operatorname{ch}2\varkappa_0 b-\operatorname{ch}\varkappa_0(x-2b)\Big]S_-(2b-x)-$$

$$-(1-ch 2\varkappa_0 b)e^{-\varkappa_1(x-2b)}S_+(x-2b)\Big\}\times$$
$$\times\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}sh 2\varkappa_0 b+ch 2\varkappa_0 b\right)^{-1}. \tag{13}$$

Виконавши в (12) заміну $x_1=x-d-b$ і спрямувавши після того $d\to\infty$, одержимо розв"язок задачі для безмежної пластинки

$$T=t_0\Big\{\varkappa_0[\varkappa_0 sh 2\varkappa_0 b-\varkappa_1(1-ch 2\varkappa_0 b)]\times$$
$$\times[e^{\varkappa_1(x_1+b)}S_+(-x_1-b)+e^{-\varkappa_1(x_1-b)}S_+(x_1-b)]+$$
$$+[(\varkappa_0^2+\varkappa_1^2)sh 2\varkappa_0 b+2\varkappa_0\varkappa_1 ch 2\varkappa_0 b-$$
$$-2\varkappa_1(\varkappa_1 sh\varkappa_0 b+\varkappa_0 ch\varkappa_0 b)ch\varkappa_0 x_1][S_-(x_1+b)-S_+(x_1-b)]\Big\}\times$$
$$\times[(\varkappa_0^2+\varkappa_1^2)sh 2\varkappa_0 b+2\varkappa_1\varkappa_0 ch 2\varkappa_0 b]^{-1}, \tag{14}$$

який збігається з відповідним результатом праці [2].

Після заміни $x'=x_1+b$ і переходу до границі при $b\to\infty$ у виразі (14) знаходимо температурне поле у безмежній пластинці, яка нагрівається зовнішнім середовищем по області $x'\geq 0,\ z=\pm\delta$

$$T=\frac{t_0}{\varkappa_0+\varkappa_1}\Big\{\varkappa_0 e^{\varkappa_1 x'}+[(\varkappa_0+\varkappa_1)-(\varkappa_0 e^{\varkappa_1 x'}+\varkappa_1 e^{-\varkappa_0 x'})]S_-(x')\Big\}. \tag{15}$$

Якщо у наведених виразах для температурних полів замінити $\alpha_0 t_0/\delta$ на q_0, то матимемо результати, що відповідають нагріву пластинок внутрішніми джерелами тепла потужністю q_0.

1. Коляно Ю.М., Дидык В.З., Кордуба Б.М. Температурные напряжения в полубесконечной цилиндрической оболочке, локально нагреваемой путем конвективного теплообмена. - Пробл. прочности, 1983, № 4, с. 10-13. 2. Коляно Ю.М., Дідик В.З., Кордуба Б.М. Температурні напруження в пластинках при залежних від координати коефіцієнтах тепловіддачі. - Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 6, с. 516-519. 3. Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. - М.: Машиностроение, 1973. - 659 с. 4. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. - М.: Наука, 1984. - 368 с.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.85

УДК 514

С.В.Дениско, С.І.Кубів

ПОШУК РОЗГОРТНИХ ПОВЕРХОНЬ СЕРЕД ВІДТВОРЮВАНИХ З ДОПОМОГОЮ ПЕВНОГО МЕХАНІЗМУ ЛІНІЙЧАСТИХ ПОВЕРХОНЬ

Нехай пряма M_1M_2 проходить через кінці M_1, M_2 радіусів двох кіл Γ_1, Γ_2, розміщених відповідно у площинах α_1, α_2, а точки O_1, O_2 - центри кіл Γ_1, Γ_2.

Радіус O_1M_1 повертається навколо точки O_1 в площині α_1, а радіус O_2M_2 навколо точки O_2 в площині α_2 так, що відношення кута повороту одного радіуса до кута повороту другого - величина стала. При цьому пряма M_1M_2 відтворюватиме лінійчасту поверхню. Це відтворювання можна реалізувати з допомогою певного механізму.

Для того щоб поверхня з названого класу була розгортною, необхідне і достатнє виконання умови

$$\begin{gathered}2a(A\sin\varphi\sin k\varphi + B\cos\varphi\sin k\varphi + \\ + C\sin\varphi\cos k\varphi + D\cos\varphi\cos k\varphi) + \\ + R_1(L\sin k\varphi + K\cos k\varphi) - R_2(N\sin\varphi - M\cos\varphi) = 0,\end{gathered} \qquad (1)$$

де R_1, R_2 - радіуси кіл Γ_1, Γ_2; φ, $k\varphi$ - кути повороту радіусів O_1M_1, O_2M_2; $A=(\bar{e}_3\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2)$, $B=(\bar{e}_3\bar{\nu}_1\bar{\mu}_2)$,

$$C=(\bar{e}_3\bar{\mu}_1\bar{\nu}_2),\quad D=(\bar{e}_3\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2),\quad K=(\bar{\mu}_1\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2),$$

$$L=(\bar{\nu}_1\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2),\quad M=(\bar{\mu}_2\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2),\quad N=(\bar{\nu}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2),$$

причому $\bar{\mu}_1\perp\bar{\nu}_1$, $\bar{\mu}_2\perp\bar{\nu}_2$, $|\bar{\mu}_i|=|\bar{\nu}_i|=1$, $\bar{e}_3$ належить ортонормальному координатному реперу $\{O,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, вибраному так, що $\overline{OO_1}=a\bar{e}_3$, $\overline{OO_2}=-a\bar{e}_3$; $\overline{O_1M_1}=R_1(\bar{\mu}_1\cos\varphi+\bar{\nu}_1\sin\varphi)$,

$$\overline{O_2M_2}=R_2(\bar{\mu}_2\cos k\varphi+\bar{\nu}_2\sin k\varphi).$$

Розшук розгортних поверхонь для випадку, коли площини α_1, α_2 паралельні, розглянуто нами раніше*.

Тепер пошук розгортних поверхонь розглядаємо без будь-якого обмеження на положення площин α_1, α_2, але тривіальний випадок, коли α_1, α_2 суміщаються, виключаємо.

---

* Д е н и с к о С.В. Про деякі способи відтворення розгортних поверхонь. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1982, вип. 20, с. 83-86.

З умови (I) випливають такі необхідні умови існування розгортної поверхні:

$$2aD + R_1K - R_2M = 0 ,$$

$$2aB\kappa + 2aC + R_1\kappa L - R_2N = 0 ,$$

$$2aA\kappa - a(\kappa^2-1)D - \frac{1}{2}R_1K\kappa^2 + \frac{1}{2}R_2M = 0 ,$$

$$-2aB\left(\frac{1}{3!}\kappa^2 + \frac{1}{2!}\right)\kappa - 2aC\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\kappa^2\right) - \frac{1}{3!}\kappa^3LR_1 + \frac{1}{3!}NR_2 = 0,$$

$$-\frac{2}{3!}a\kappa A(\kappa^2+1) + 2aD\left(\frac{1}{4!}\kappa^4 + \frac{1}{2!}\frac{1}{2!}\kappa^2 + \frac{1}{4!}\right) + R_1K\frac{1}{4!}\kappa^4 -$$
$$- R_2M\frac{1}{4!} = 0 ,$$

$$2aB\left(\frac{1}{5!}\kappa^5 + \frac{1}{3!}\frac{1}{2!}\kappa^3 + \frac{1}{4!}\kappa\right) + 2aC\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{3!}\frac{1}{2!}\kappa^2 +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4!}\kappa^4\right) + R_1L\frac{1}{5!}\kappa^5 - R_2\frac{1}{5!}N = 0 ,$$

$$2aA\left(\frac{1}{5!}\kappa^5 + \frac{1}{3!}\frac{1}{3!}\kappa^3 + \frac{1}{5!}\kappa\right) + 2aD\left(-\frac{1}{6!}\kappa^6 -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{4!}\frac{1}{2!}\kappa^4 - \frac{1}{4!}\frac{1}{2!}\kappa^2 - \frac{1}{6!}\right) - R_1K\frac{1}{6!}\kappa^6 + R_2M\frac{1}{6!} = 0 ,$$

$$2aB\left(-\frac{1}{7!}\kappa^7 - \frac{1}{5!}\frac{1}{2!}\kappa^5 - \frac{1}{3!}\frac{1}{4!}\kappa^3 - \frac{1}{6!}\kappa\right) + 2aC\left(-\frac{1}{7!} -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{5!}\frac{1}{2!}\kappa^2 - \frac{1}{3!}\frac{1}{4!}\kappa^4 - \frac{1}{6!}\kappa^6\right) - \frac{1}{7!}\kappa^7R_1L + \frac{1}{7!}R_2N = 0 .$$

Звідси $\kappa = 1$. Крім того, якщо $a \neq 0$, необхідні умови існування розгортної поверхні такі:

$$B + C = 0 , \quad R_1K - R_2M = 0 ,$$

$$A=0\,,\quad D=0\,,\quad R_1L-R_2N=0\,.$$

Коли ж $a=0$, то умови набирають вигляду

$$R_1K-R_2M=0\,,$$
$$R_1L-R_2N=0\,.$$

У першому випадку маємо всі еліптичні конуси та еліптичні циліндри. Для еліптичного конуса кола Γ_1, Γ_2 належать одній і тій же сім"ї кругових перерізів, а для еліптичного циліндра – одній або різним сім"ям кругових перерізів.

У другому випадку матимемо всі еліптичні циліндри. Причому кола Γ_1, Γ_2 належать різним круговим перерізам.

Стаття надійшла до редколегії 18.03.85

УДК 512.553

О.Д.Артемович, О.Л.Горбачук

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ I - РАДИКАЛИ

Всі розглядувані кільця – асоціативні, а всі модулі – праві й унітарні. Крім того, надалі користуватимемося термінологією з праць [2, 3]. Категорію всіх правих диференціальних модулів над диференціальним кільцем R позначимо через $D\,mod\text{-}R$.

Кожному правому диференціальному ідеалу I диференціального кільця R зіставимо диференціальний радикал σ_I [3], який називається диференціальним I-радикалом, причому такий, що клас $T_I=\{M\in D\,mod\text{-}R\,/\,MI=M\}$ радикальний для σ_I.

<u>Зауваження 1</u>. Кожний диференціальний I-радикал задається також двостороннім диференціальним ідеалом $S=RI$.

Перенесемо деякі результати статті [2] на диференціальний випадок. Для цього введемо декілька понять і доведемо необхідні твердження.

<u>Означення 1</u>. Диференціальним радикалом Джекобсона $J^{\alpha}(M)$ правого диференціального R-модуля M називається перетин його максимальних диференціальних підмодулів.

<u>Означення 2</u>. Диференціальний підмодуль K диференціального модуля M називається диференціально косуттєвим, якщо з умови

$K+S=M$, де S – деякий диференціальний підмодуль, випливає $S=M$.

<u>Лема I</u>. Якщо M – диференціальний модуль, в якого кожний власний диференціальний підмодуль N міститься у максимальному диференціальному підмодулі S, то $J^{\alpha}(M)$ диференціально косуттєвий в M.

<u>Доведення</u> випливає з того, що $S \supseteq N+J^{\alpha}(M)$.

<u>Лема 2</u>. Якщо L – правий диференціальний ніль-ідеал диференціального кільця R, то $L \subseteq J^{\alpha}(R)$.

<u>Доведення</u> ведемо від супротивного. Нехай S – такий максимальний правий диференціальний ідеал кільця R, що $S \not\supseteq L$. Тоді $S+L=R$ і, як наслідок, $s+\ell=1$ для деяких елементів $s\in S, \ell \in L$. З огляду на те, що L – правий ніль-ідеал, отримуємо зворотний $s=1-\ell$. Отже, $S=R$, що неможливо. Це свідчить, що $L\subseteq J^{\alpha}(R)$. Лема доведена.

<u>Теорема I</u>. Нехай I – правий диференціальний ідеал диференціального кільця R. Якщо для довільного ненульового скінченно породженого диференціального модуля M $MI \neq M$, то $I\subseteq J^{\alpha}(R)$.

<u>Доведення</u>. Покажемо, що MI – диференціально косуттєвий диференціальний підмодуль в M. Якщо K – деякий диференціальний підмодуль і $M=K+MI$, то $G=M/K$ – скінченно породжений диференціальний модуль і $GI=G$. Тоді з умови теореми випливає $G=0$, тобто $M=K$, і, таким чином, MI – диференціально косуттєвий диференціальний підмодуль.

Нехай $M=R$. Тоді $RI\supseteq I$ і RI – диференціально косуттєвий диференціальний ідеал кільця R, і тому $I\subseteq J^{\alpha}(R)$. Справді, якщо I – диференціально косуттєвий правий диференціальний ідеал і S максимальний правий диференціальний ідеал кільця R, то $I+S\neq R$. Отже, $I\subseteq S$ і $I\subseteq J^{\alpha}(R)$. Теорема доведена.

<u>Лема 3</u>. T –нільпотентного справа правого диференціального ідеала I наступні твердження рівносильні:

$$MI=M, \tag{I}$$

де $M\in Dmod\text{-}R$;

$$M=0. \tag{2}$$

<u>Доведення</u>. Якщо $MI=M$, то кожний елемент $m\in M$ зображається у вигляді $m=\sum_j m_j i_j$ для деяких $m_j \in M, i_j \in I$. Тоді з того, що $m_j=\sum_k m_{kj} i_{kj}$ з деякими $m_{kj} \in M, i_{kj} \in I$, випли-

ває

$$m=\sum_{j,k} m_{kj}\, i_{kj}\, i_j \ . \tag{3}$$

Розписуючи подібно елементи модуля M в зображенні (I), з огляду на T- нільпотентність правого диференціального ідеала отримуємо $M=0$. Лема доведена.

Лема 4. Якщо I - радикал, що задається правим диференціальним ідеалом I диференціального кільця R , тривіальний, то $I \subseteq J^{\alpha}(R)$.

Доведення. Оскільки диференціальний I -радикал σ_I тривіальний, то клас $T_I=\{0\}$ радикальний. Це рівносильно тому, що $MI=M$ тоді і лише тоді, коли $M=0$ для $M \in \mathcal{D}mod\text{-}R$. За теоремою I $I \subseteq J^{\alpha}(R)$. Лема доведена.

Теорема 2. Якщо над диференціальним кільцем R всі диференціальні I -радикали тривіальні, то кільце $R/J^{\alpha}(R)$ - диференціально просте.

Доведення. Справді, за лемою 4 всі праві диференціальні ідеали лежать в $J^{\alpha}(R)$.

Теорема 3. Якщо фактор-кільце $R/J^{\alpha}(R)$ диференціального кільця R диференціально просте, а $J^{\alpha}(R)$ - T-нільпотентний справа, тоді всі диференціальні I -радикали тривіальні.

Доведення. З диференціальної простоти кільця $R/J^{\alpha}(R)$ випливає, що всі праві диференціальні ідеали лежать в $J^{\alpha}(R)$, і отже, будуть T -нільпотентними справа. Тоді за лемою 3 диференціальний I -радикал тривіальний для кожного правого диференціального ідеала I диференціального кільця R .
Теорема доведена.

1. Горбачук О.Л., Комарницький М.Я. Про диференціальні кручення. - В кн.: Теоретичні і прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. . К., 1977, с. 16-22.
2. Горбачук Е.Л., Комарницкий Н.Я. I -радикалы и их свойства. - Укр. мат. журн., 1978. 30, № 2. с. 212-217.
3. Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. - Кишинев: Штиинца, 1983. - 152 с.

Стаття надійшла до редколегії 16.05.83

УДК 513.83

М.М.Зарічний

КАТЕГОРІЯ НОРМАЛЬНИХ ФУНКТОРІВ

Останнім часом зросла кількість праць, присвячених дослідженню поняття нормального функтора, що діє на категорії $\mathcal{B}omp$ компактів та їх неперервних відображень в себе [I, 2, 4]. Розглянемо деякі категорні властивості нормальних функторів. Наведені в п. I результати дають змогу будувати нові приклади нормальних функторів; одне застосування дано в п. Ш, де розв"язано (негативно) три проблеми, поставлені Є.В.Щепіном в [4]. В п. П побудована внутрішня категорія категорії Top, що є в якомусь сенсі неперервним аналогом категорії метризовних компактів. Виявляється, що нормальні функтори можна інтерпретувати як внутрішні ендофунктори цієї внутрішньої категорії. Поряд з теоремою Щепіна про те, що нормальні функтори неперервні на морфізмах [4], побудови п. П свідчать, що нормальні функтори "неперервні на об"єктах".

Всі необхідні означення можна знайти в працях [4, 5].

I. Означимо категорію NF, об"єктами якої є нормальні функтори, що діють на категорії $\mathcal{B}omp$, а морфізмами – природні перетворення таких функторів. Коректність цього означення випливає з такого факту.

<u>Твердження I</u>. Нехай $\varphi_1, \varphi_2 : F \to G$ – природні перетворення нормальних функторів. Тоді $\varphi_1 = \varphi_2$, коли і тільки коли $\varphi_{1Q} = \varphi_{2Q}$ ($Q \cong I^{\omega}$ – гільбертовий куб).

Доведення нетривіальної частини. Для кожного кардинала τ розглянемо обернену систему $\varphi = \{Q^A, p^A_B \ ; \ P_\omega(\tau)\}$ з границею (Q^τ, p_A) (де $P_\omega(\tau)$ – множина злічениих підмножин множини τ, частково впорядкована відношенням $\subset$;

$p^A_B : Q^A \to Q^B$, $B \subset A$ і $p_A : Q^\tau \to Q^A$ – проектування). З комутативності діаграми

$$\begin{tikzcd} F(Q^A) \arrow[r, "\varphi_{iQ^A}"] \arrow[d, "F(p^A_B)"'] & G(Q^A) \arrow[d, "G(p^A_B)"] \\ F(Q^B) \arrow[r, "\varphi_{iQ^B}"] & G(Q^B) \end{tikzcd}$$

для всіх $A, B \in P_\omega(\tau)$, $A \supset B$ і неперервності функторів F, G одержуємо $\varphi_{1Q^\tau} = \varprojlim \{\varphi_{1Q^A}\} = \varprojlim \{\varphi_{2Q^A}\} = \varphi_{2Q^\tau}$.

Нехай X – довільний компакт, $i: X \to Q^{\tau}$ – вкладення для деякого τ. Тоді $G(i)\varphi_{1X} = \varphi_{1Q^\tau}F(i) = \varphi_{2Q^\tau}F(i) = G(i)\varphi_{2X}$. Оскільки $G(i)$ – вкладення, то $\varphi_{1X} = \varphi_{2X}$.

Твердження 2. У категорії NF існують добутки непорожних сімей потужності $\leqslant \omega$, а також еквілізатори довільних сімей морфізмів.

Доведення. Добутки й еквілізатори визначаються поаргументно: $(\Pi\{F_\alpha | \alpha \in \mathfrak{A}\})(X) = \Pi\{F_\alpha(X) | \alpha \in \mathfrak{A}\}$, $Ker\{\varphi_\alpha : F \to G, \alpha \in \mathfrak{A}\} = (F', i)$, де $i_X : F'(X) = \{x \in F(X) | \varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(x), \alpha, \beta \in \mathfrak{A}\} \hookrightarrow F(X)$. Нескладно перевірити, що ці операції не виводять за межі класу нормальних функторів.

Наслідок I. В категорії NF існують границі діаграм потужності $\leqslant \omega$.

II. Для кожного компакта X позначимо через $exp'(X)$ простір $exp(X) \sqcup \{\varnothing\}$. Означимо внутрішню категорію $\mathbb{C} = \langle C_0, C_1, u, s, b, c \rangle$ [5], прийнявши $C_0 = exp'(Q)$, $C_1 = \{\langle x, y, z\rangle \in exp'(Q) \times exp'(Q) \times exp'(Q \times Q) |$, z – графік неперервного відображення з x в $y\} \subset exp'(Q) \times exp'(Q) \times exp'(Q \times Q)$. Відображення $u : C_0 \to C_1$, $s, b : C_1 \to C_0$, $c : C_2 \to C_1$ визначаються такими формулами (C_2 знаходять з універсального квадрата

$$\begin{tikzcd}
C_2 = C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d, "b"] \\
C_1 \arrow[r, "s"] & C_0
\end{tikzcd}$$

$C_2 = \{\langle\langle x, y, z\rangle, \langle x', y', z'\rangle\rangle | x' = y\} \subset C_1 \times C_2) : u(x) = \langle x, x, 1_x \rangle \in C_1$, $s\langle x, y, z\rangle = x$, $b\langle x, y, z\rangle = y$, $c(\langle x, y, z\rangle, \langle x', y', z'\rangle) = \langle x, y', t\rangle$,

де $t = \{\langle a, b\rangle |$ існує $d \in Q$ т. , що $\langle a, d\rangle \in z, \langle d, b\rangle \in z'\} \subset Q \times Q$.

Нескладно перевірити, що тим самим задається внутрішня категорія категорії Top.

Нехай тепер F – нормальний функтор. Вважатимемо, що $F(Q) \subset Q$. Побудуємо внутрішній функтор $F^* = \langle F_0, F_1\rangle : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, прийнявши $F_0(x) = F(x) \subset F(Q) \subset Q$, $F_1(\langle x, y, z\rangle) = \langle F(x), F(y), F(z)\rangle$, де вкладення $F(z)$. в $F(x)\times F(y)$ задається морфізмом $\langle F(p_1), F(p_2)\rangle (p_1: x\times y \to x, p_2: x\times y \to y$ – проекції).

Неперервність відображень F_0 і F_1 випливає з наступного твердження.

Твердження 3. Для кожного нормального функтора F відображення $\gamma: exp(X) \to exp(F(X))$, $\gamma(A)=F(A)\subset F(X)$ – неперервне.

На жаль, зіставлення $F \mapsto F^*$ не канонічне, воно залежить від вибору вкладення $F(Q)\subset Q$. Зафіксуємо такі вкладення для всіх нормальних функторів.

Твердження 4. Відображення $F \longmapsto F^*$ – ін"єктивне.

Теорема I. $|Ob\, NF| = c$.

Доведення. Нерівність $|Ob\, NF| \leq c$ випливає з твердження 4. Обернена нерівність випливає з такого факту.

Твердження 5. Для кожного $n \geq 1$ категорія $S_n-Mcomp$ метризовних S_n – компактів (S_n – симетрична група) вкладається як повна підкатегорія категорії NF. Можна додатково вимагати, що образ категорії $S_n-Mcomp$ при цьому вкладенні складається з функторів степеня $\leq n$ з неперервними восіями.

Ш. Нехай $\{F_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – непорожна сім"я нормальних функторів, $|\mathfrak{A}| \leq \omega$ і $F = \Pi\{F_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Лема I. Нехай $x \in F(X)$ і $x = \langle x_\alpha \rangle$, де $x_\alpha \in F(X_\alpha), \alpha \in \mathfrak{A}$. Тоді $sup\, p_F(x) = Cl(\cup\{supp_{F_\alpha}(x_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{A}\})$.

Безпосередньо з цієї леми випливає таке твердження.

Твердження 6. Для довільної сім"ї нормальних функторів $\{F_i \mid i < \omega\}$ виконується:

а) $deg(F_0 \times \ldots \times F_k) = deg F_0 + \ldots + deg F_k$,

б) $deg(\Pi\{F_i \mid i < \omega\}) = \infty$.

Як відомо [3], суперпозиція $G \circ F$ нормальних функторів F і G є нормальним функтором.

Лема 2. Для кожного компакта X, нормальних функторів F, G і точки $x \in (G\circ F)(X)$

$$supp_{G\circ F}(x) = \cup\{supp_F(y) \mid y \in supp_G(x)\}.$$

Доведення. Приймемо $\cup\{supp_F(y) \mid y \in supp_G(x)\} = A$. Нехай $y_0 \in supp_G(x)$. Тоді $supp_F(y_0) \subset A$ і отже, $y_0 \in F(A)$. Звідси одержуємо, що $supp_G(x) \subset F(A)$, а тому $x \in G(F(A)) = (G\circ F)(A)$ і $supp_{G\circ F}(x) \subset A$.

Навпаки, нехай $A \setminus B \neq \emptyset$ для замкнутої множини $B \subset X$. Тоді існує точка $y_0 \in supp_G(x)$, для якої $supp_F(y_0) \setminus B \neq \emptyset$.

Отже, $y_0 \notin F(B)$ і $x \notin G(F(B)) = (G \circ F)(B)$, а тому $supp_{G\circ F}(x) \supset A$. З леми 2 випливає наступне твердження.

Твердження 7. Для довільних нормальних функторів F, G

$$deg(G\circ F) = deg F \, deg G .$$

Говоримо [4], що функтор F ділиться справа на степінь, якщо $F = F' \circ (-)^k$ для деякого функтора F' і $k > 1$. З твердження 7 випливає, що в цьому випадку $deg F$ ділиться на k.

Є.В.Щепін сформулював наступні питання.

Чи для кожного гомеоморфізму $h : F(K^\tau) \longrightarrow F(K^\tau)$, де K - метризовний компакт, $\tau > \omega_1$; F - нормальний функтор, що не ділиться справа на степінь, виконується $deg\, h(x) = deg(x)$ проблема I2, а також загальніша проблема I3 [4].

Нехай функтори F_1, F_2 не діляться справа на степінь. Чи випливає з гомеоморфності просторів $F_1(K_1^\tau)$ і $F_2(K_2^\tau)$, де K_1, K_2 - метризовні компакти і $\tau > \omega_1$, гомеоморфізм просторів K_1^τ, K_2^τ та ізоморфізм функторів F_1, F_2 проблема I4 [4].

Наведені нижче приклади дають негативні відповіді на ці запитання.

Приклад I. Приймемо $F = exp_2 \times Id$. Тоді за твердженням 6 $deg F = 3$ і, отже, F не ділиться справа на степінь, оскільки $F \not\cong (-)^3$. Розглянемо точку $x \in F(I^{\omega_2})$ таку, що $x = \langle \{x_1, x_2\}, x_3 \rangle$, де x_1, x_2, x_3 - різні точки тихоновського куба I^{ω_2}. За лемою I $deg(x) = |\{x_1, x_2, x_3\}| = 3$. Нехай $g : I^{\omega_2} \longrightarrow I^{\omega_2}$ - такий гомеоморфізм, що $g(x_3) = x_2$, а також $h = id_{exp_2 I^{\omega_2}} \times g$. Тоді $h(x) = \langle \{x_1, x_2\}, x_2 \rangle$ і $deg\, h(x) = |\{x_1, x_2\}| = 2 \neq deg(x)$.

Приклад 2. Приймемо $F_1 = exp_2 \times Id$, $F_2 = exp_2 \times (-)^3$. Тоді $deg F_1 = 3$, $deg F_2 = 5$ і, отже, F_1, F_2 - неізоморфні нормальні функтори, що не діляться справа на степінь. Але $F_1(I^{\omega_2}) = exp_2(I^{\omega_2}) \times I^{\omega_2} \cong exp_2(I^{\omega_2}) \times (I^{\omega_2})^3 = F_2(I^{\omega_2})$.

I. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q -многообразия. - Успехи мат. наук, I98I, 36,№3, с. I77-I95. 2. Федорчук В.В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов. - Успехи мат. наук, I984, 39,№5, с. I69-208. 3. Щепин Е.В. О некоторых свойствах функторов экспоненциального типа. - В кн.: IУ Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее применениям. Кишинев: Штиинца, I979, с. I63-I64. 4. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов. - Успехи мат. наук, I98I, 36, 3, с. 3-62. 5. Radu A. Gh. Teoria toposurilor. - Editura Akademiei Republici Socialista Romania, 1976, vol. 2, p. 12-21.

Стаття надійшла до редколегії II.02.85

УДК 5I3.88+83

І.Й. Гуран, І.Я. Пукач

ВКЛАДЕННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРІВ І МІНІМАЛЬНІ ВЕКТОРНІ ТОПОЛОГІЇ

У теорії топологічних векторних просторів (ТВП) важливими є теореми про зображення простору з широкого класу у вигляді проективної границі більш простих. Наведемо одну з найбільш відомих [4]. Будь-який повний локально випуклий ТВП є проективною границею банахових просторів (проективною границею називаємо, як звичайно, границю оберненого спектра [9], що дещо відрізняється від термінології, прийнятої у праці [4]. Такі теореми природно розглядати як апроксимаційні, що дають змогу редукувати вивчення складних просторів до більш простих.

Дамо внутрішнє описання проективних границь повних сепарабельних метризовних ТВП (далі польських ТВП) і повних метризовних ТВП (далі F - просторів) [5]. Ці результати отримані як наслідки відповідних теорем вкладення. На завершення доведемо збігання характеру та псевдохарактеру в мінімальних топологічних векторних просторах [I, 7].

Надалі скрізь ω - перший нескінченний кардинал. Незначною модифікацією методу Какутані- Біркгофа [8, I0] доводяться наступні дві леми.

<u>Лема I</u>. Нехай $\{U_i \mid i \in N\}$ - спадна послідовність відкритих підмножин ТВП X така, що I) $0 \in U_i$; 2) $U_i = -U_i$; 3) $U_{i+1} + U_{i+1} \subset U_i$; 4) U_i - врівноважені для всіх $i \in \omega$.

Тоді в просторі X існує така неперервна, невід"ємна функція M, що

а) $\{x \in X \mid M(x) < \frac{1}{2^i}\} \subset U_i \subset \{x \in X \mid M(x) \leq \frac{1}{2^{i-1}}\}$

для всіх $i \in \omega$,

б) $M(x+y) \leq M(x) + M(y)$;

в) $|M(x) - M(y)| \leq M(x-y)$;

Лема 2. Нехай $\{U_i \mid i \in \omega\}$ – сім"я відкритих підмножин у ТВП X, які задовольняють умови леми I; $Q=\{2^n M \mid M$ – функція, що задовольняє висновки леми I; $n \in N\}$ – сім"я функцій на ТВП X.

Тоді множини $\{x \in X \mid f(x) < 1\}$, де $f \in Q$, утворюють базу околів нуля ТВП.

Зауваження. Топологія ТВП, породжена сім"єю $\{x \in X \mid f<1, f \in Q\}$, взагалі кажучи, нехаусдорфова і нелокально випукла.

Теорема I. Будь-який ТВП X топологічно ізоморфний підпростору прямого добутку метризованих ТВП.

Доведення. Зафіксуємо деяку базу $B=\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ околів нуля ТВП X. Для кожного $\alpha \in A$ рекурсією до ω будуємо послідовність $\{V_i^\alpha \mid i<\omega\}$ околів нуля в X, яка задовольняє умови

а) $V^\alpha \supset V_1^\alpha \supset V_2^\alpha \supset \ldots$;

б) V_i^α – симетричні та врівноважені множини;

в) $V_{i+1}^\alpha + V_{i+1}^\alpha \subset V_i^\alpha$ для кожного $i \in \omega$.

З умов а) – в) випливає, що при будь-якому $\alpha \in N$ до системи $\{V_i^\alpha \mid i \in \omega\}$ можна застосувати лему I. Нехай M_α – функція, що існує з огляду на лему для цієї системи. Позначимо через $F_\alpha=\{x \in X \mid M_\alpha(x)=0\}$ множину нулів цієї функції. Очевидно, $F_\alpha=\cap\{V_i^\alpha \mid i<\omega\}$ – замкнутий підпростір в X. Дійсно,

I) нехай $x, y \in F_\alpha$. Тоді $M_\alpha(x)=0$ і $M_\alpha(y)=0$. Враховуючи висновок б) леми I, $M_\alpha(x+y) \leq M_\alpha(x)+M_\alpha(y)=0$;

2) нехай $x \in F_\alpha$ і λ – скаляр. Оскільки з $x \in F_\alpha$ випливає, що $x \in \cap\{V_i^\alpha\}$ і $x \in V_i^\alpha \subset V_k^\alpha$ для $k=i-[|\lambda|]$, то

$$\lambda x=\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot |\lambda|\right) x=|\lambda|\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} x\right) \in |\lambda| V_i^\alpha=(|\lambda|+\{\lambda\}) V_i^\alpha \subseteq$$
$$\subseteq [|\lambda|] V_i^\alpha+\{|\lambda|\} V_i^\alpha \subseteq V_{i-[|\lambda|]}^\alpha+V_i^\alpha \subseteq V_k^\alpha+V_i^\alpha \subseteq$$
$$\subseteq V_k^\alpha+V_k^\alpha \subseteq V_{k+1}^\alpha$$

для всіх $k \in \omega$. Тобто $\lambda x \in F_\alpha$.

Отже, F_α – замкнутий підпростір в X. Розглянемо тепер фактор-простір $X_\alpha = X/F_\alpha = X_\alpha$. Визначимо на X_α функцію M_α^*, прийнявши $M_\alpha^*(x_\alpha)=M_\alpha(x)$, де x –й елемент простору X, що належить суміжному класу x_α по замкнутому підпростору F_α. Покажемо, що таким чином коректно визначено функцію M_α^*. Нехай x і y – довільні різні елементи простору X, які належать одному і тому ж суміжному класу x_α. Припустимо $M_\alpha(x) \neq M_\alpha(y)$. Згідно з висновком в) леми I $0 \leq |M_\alpha(x)-M_\alpha(y)| \leq 0$. Таким чином, $M_\alpha(x)=M_\alpha(y)$ для всіх $x, y \in x_\alpha$ і функція M_α^* визначена коректно. За лемою 2 сім"я функцій $Q=\{2^n M_\alpha^* \mid n \in N\}$ визначає хаусдорфову τ_α топологію ТВП, база околів нуля якої злічена і складається з множин $\{x_\alpha \in X_\alpha \mid 2^n M_\alpha^*(x_\alpha)<1\}$. Отже, X_α у цій топології метризовний ТВП. Позначимо через π_α природну проекцію π_α : $X \to X/F_\alpha$, а через $Y=\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ – тихоновський добуток просторів (X_α, τ_α). Діагональне відображення $\Delta: X \to Y$, $\Delta: x \to \{\pi_\alpha(x)\}$ є вкладенням. Покажемо, що відображення $\Delta^{-1}: \Delta(X) \to X$ неперервне.

Нехай U – окіл нуля в X. Тоді існує $\alpha \in A$, для якого $V^\alpha \subset U$. Виберемо W_α – окіл нуля в X_α такий, що $\pi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \subset U$ і розглянемо $\tilde{W}_\alpha$ – циліндр над W_α в Y. Очевидно, $\Delta^{-1}(\tilde{W}_\alpha \cap \Delta(X)) \subset U$. Отже, Δ^{-1} – неперервне відображення і Δ – топологічний ізоморфізм. Теорема доведена.

<u>Означення I</u>. ТВП X називається τ – обмеженим (де $\tau \geq \omega$), якщо для будь-якого околу нуля U простору X існує така підмножина $A \subset X$, що $|A| \leq \tau$ і $U + A = X$.

Аналогічно, як у категорії топологічних груп [2], доводяться наступні теореми.

<u>Теорема 2</u>. Для кожного кардинала τ клас τ – обмежених ТВП замкнутий відносно добутків, образів непервних гомоморфізмів, підпросторів, поповнень.

<u>Теорема 3</u>. Топологічний векторний простір τ – обмежений тоді і тільки тоді, коли він топологічно ізоморфний підпростору прямого добутку топологічних векторних просторів, вага яких не перевищує τ.

<u>Доведення</u>. Достатність безпосередньо випливає з теореми 2 і того факту, що метризовна топологічна група ваги $\leq \tau$ τ - обмежена [2].

<u>Необхідність</u>. Нехай X τ – обмежений ТВП. Тоді X топологічно ізоморфний підпростору добутку $Y=\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ сім"ї метризовних просторів. Але $X \subset \Pi\{\pi_\alpha(X)\}$. З теореми 2 випливає, що для кожного $\alpha \in A$, $\pi_\alpha(X)$ – метризовний ТВП ваги $\leq \tau$.

<u>Наслідок I</u>. ТВП X ω – обмежений тоді і тільки тоді, коли X топологічно ізоморфний підпростору добутку сепарабельних метризовних ТВП.

<u>Наслідок 2</u>. Топологічний векторний простір повний тоді і тільки тоді, коли він є проективною границею F –просторів.

Наслідок 3. Повний топологічний векторний простір ω - обмежений тоді і тільки тоді, коли він є проективною границею польських ТВП.

Доведення наслідків 2 і 3 безпосередньо випливає з теорем I, 2, 3 і теореми 2.5.8 з праці [9].

Зауваження. У задачі 312 праці [3] вимагається довести, що будь-який локально випуклий простір допускає неперервне вкладення у добуток прямих $\mathbb{R}$. Відзначено, що воно не зобов"язане бути топологічним ізоморфізмом з огляду на наслідок I, оскільки метризовний не ω - обмежений, тобто сепарабельний неметризовний (такі існують [6 7]) простір не допускає вкладення в добуток прямих.

У ТВП характер, взагалі кажучи, не збігається з псевдохарактером [I]. Наприклад, якщо X - строга індуктивна границя [4] прямих. Але в мінімальних ТВП [7] характер і псевдохарактер збігаються.

Означення 3. Хаусдорфовий ТВП називається мінімальним, якщо його топологію не можна послабити до хаусдорфової векторної топології.

Теорема 4. Нехай X - ТВП і $\psi=\psi(X)\leq\chi(X)$. Тоді існує на X векторна топологія Γ, для якої $\chi(X,\Gamma)\leq\psi$.

Доведення. Нехай B - сім"я околів нуля, де $|B|\leq\psi$. Для кожного $U\in B$ по рекурсії до ω побудуємо сім"ю околів нуля, що задовольняють умови леми I. Відповідну функцію, яка існує за цією лемою, позначимо через M_U. Безпосередньо перевіряється, що сім"я $L=\{x\in X\,|\,f(x)<1, f\in F\}$, де $F=\{2^n M_U\,|\,U\in B\}$, утворює базу околів нуля ТВП і

$$|L|=\omega\cdot|B|\cdot\omega=|B|=\psi(X).$$

Теорема доведена.

Наслідок 4. Для мінімальних топологічних векторних просторів характер збігається з псевдохарактером.

Наслідок 5. Мінімальний ТВП зліченного псевдохарактера метризовний.

I. Архангельский А.В. Кардинальные инварианты топологических групп. Вложения и уплотнения. - Докл. АН СССР, 1979, 247, № 4, с. 779-782. 2. Гуран И.И. О топологических группах близких к финально компактным. - Докл. АН СССР, 1981, 256, № 6, с. 1305-1307. 3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979. - 381 с. 4. Робертсон А.П., Робертсон В.Дж. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967. - 257 с.

5. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 443 с. 6. Шефер Х. Топологические векторные пространства.–М.: Мир, 1971. – 352 с. 7. Banaschewski B. Minimal topological algebras.– Math. Ann., 1974, N211, p.107-114. 8. Birkhoff Garrett. A note on topological groups.– Com. Math., 1936, N3, p.427-430. 9. Engelking R. General Topology. Warszawa, 1977. 10. Kakutani Sizuo. Über die Metrisation der topologischen Gruppen.– Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1936, N12, p.82-84.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.84

УДК 517.564.3:530.145

П.І.Тацуняк

ФОРМУЛИ МНОЖЕННЯ ФУНКЦІЇ МАКДОНАЛЬДА В АКСІОМАТИЧНІЙ КВАНТОВІЙ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Для вільної скалярної теорії поля одержано [2] інтегральне представлення функцій Вайтмана W_{2n} вигляду

$$W_{2n}(x_1,x_2,\dots,x_{2n})=i^n\sum_{P'}\Delta_2^+(x_1-x_2)\Delta_2^+(x_3-x_4)\dots\Delta_2^+(x_{2n-1}-x_{2n})=$$
$$=\int_0^\infty\prod_{s<\ell=1,3,\dots,2n-1} da_{s\ell}\sum_{P'}\Delta_{n+1}^+(x_1-x_2,x_3-x_4,\dots,x_{2n-1}-x_{2n};a_{s\ell}), \quad (1)$$

де $\sum\limits_{P'}$ сума по всіх перестановках $(x_1,x_2,\dots x_i,\dots x_j,\dots x_{2n})$ за умови $\{i-j<0\,|\,x_i-x_j\}$, а Δ_{n+1}^+ – сингулярні функції Челлена – Вільгельмсона [2];

$$\Delta_{n+1}^+(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n;a_{s\ell})=\frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n}}\int\prod_{s\leq\ell=1} dk_s\theta(k_{s0})\delta(k_sk_\ell+a_{s\ell})\exp\Big(i\sum_{r=1}^{n}k_r\xi_r\Big); \quad (2)$$

$\delta(k_s,k_\ell)$ – функція Дірака; $\theta(k_{s0})$ – функція стрибка Хевісайда; $x_i-x_{i+1}=\xi_i$ – вектори координат у метриці Мінковського з квадратом $\xi_i^2=\xi_{i1}^2+\xi_{i2}^2+\xi_{i3}^2-\xi_{i0}^2$ та їх фур"є-координати $k_i(k_{i1},k_{i2},k_{i3},k_{i0})$; $k_i^2<0$; $k_{i0}>0$, скалярні добутки яких $k_sk_\ell=-a_{s\ell}<0$ – "масові" параметри представлення. Для вільного поля $k_s^2=-m^2$; $(s=1,2,\dots,n)$.

Сингулярні функції Δ_2^+, Δ_3^+, а також для вільного поля Δ_4^+ обмежені явно [2, 3] і виражаються через функцію Макдональда

$$\Delta_2^+(\xi; m^2) = \frac{m^2}{(2\pi)^2 i}\,\frac{K_1(\sqrt{m^2\xi^2})}{\sqrt{m^2\xi^2}}\,, \tag{3}$$

$$\Delta_3^+(\xi_1,\xi_2; a_{11}, a_{22}, a_{12}) = \frac{i\theta(-D_2)\sqrt{-D_2}}{(2\pi)^4\sqrt{R}}\left[K_0\left(\sqrt{Q+\sqrt{R}}\right) - K_0\left(\sqrt{Q-\sqrt{R}}\right)\right], \tag{4}$$

$$Q = \sum_{s,\ell=1}^{2} a_{s\ell}\xi_s\xi_\ell\ ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = m^4 - a_{12}^2\,, \tag{4а}$$

$$R = \sqrt{\sum_{s<\ell=1}^{2}(a_{s\ell}^2 - a_{ss}a_{\ell\ell})\left[(\xi_s\xi_\ell)^2 - \xi_s^2\xi_\ell^2\right]}\ . \tag{4б}$$

Для Δ_4^+ інтеграція виконується до кінця тільки у випадку вільного поля:

$$\Delta_4^+(\xi_1,\xi_2,\xi_3; a_{s\ell}) = \frac{\theta(-D_2)}{2(2\pi)^6\sqrt{R'}}\left[K_0\left(\sqrt{Q'+\sqrt{R'}}\right) - K_0\left(\sqrt{Q'-\sqrt{R'}}\right)\right], \tag{5}$$

де сума у виразах Q', R' виду (4а,б) береться до $s,\ell = 3$.

Функція Δ_5^+ виражається через K_0 інтегралом складнішого виду. Функції $\Delta_n^+; (n>5)$ з огляду на розмірність простору виражаються через Δ_5^+ з допомогою редукційної формули [3].

Якщо (I) обмежитись першим доданком, то одержимо

$$i^n\Delta_2^+(\xi_1)\Delta_2^+(\xi_3)\ldots\Delta_2^+(\xi_{2n-1}) = \int_0^\infty \prod_{s<\ell=1,3,\ldots,2n-1} da_{s\ell}\,\Delta_{n+1}^+(\xi_1,\xi_3,\ldots,\xi_{2n-1}; m^2, a_{s\ell}). \tag{6}$$

Враховуючи явний вид сингулярних функцій (3)-(5) в (6), можемо одержати формули кратного множення функції Макдональда K_1 складного аргумента від матричних елементів $(AX)_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\xi_\ell$ із векторів простору Мінковського. Особливо простий вид формули множення мають у випадку $n = 2,3$.

I. Для $n = 2$ із (6) дістаємо формулу множення:

$$m^2K_1(m\sqrt{\xi_1^2})K_1(m\sqrt{\xi_2^2}) = \frac{-\sqrt{\xi_1^2\xi_2^2}}{2\sqrt{(\xi_1\xi_2)^2 - \xi_1^2\xi_2^2}}\int_{m^2}^{\infty} da_{12}\left[K_0\left(\sqrt{Q+\sqrt{R}}\right) - K_0\left(\sqrt{Q-\sqrt{R}}\right)\right]. \tag{7}$$

Оскільки $\dfrac{dK_0(m\sqrt{\xi^2})}{d\xi^2} = \dfrac{dK_0(m\sqrt{\xi^2})}{d(m\sqrt{\xi^2})}\cdot\dfrac{m}{2\sqrt{\xi^2}} = -\dfrac{m}{2\sqrt{\xi^2}}K_1(m\sqrt{\xi^2}),$ (8)

то з (7) одержуємо

$$\frac{dK_0(m\sqrt{\xi_1^2})}{d\xi_1^2}\cdot\frac{dK_0(m\sqrt{\xi_2^2})}{d\xi_2^2} = \frac{-1}{8\sqrt{(\xi_1\xi_2)^2 - \xi_1^2\xi_2^2}}\int_{m^2}^{\infty} da_{12}\left[K_0\left(\sqrt{Q+\sqrt{R}}\right) - K_0\left(\sqrt{Q-\sqrt{R}}\right)\right]; \tag{7а}$$

Перевірити формули (7) і (7а) з допомогою прямого інтегрування важко, однак, прийнявши $\xi_1 = \xi_2$, інтегрування виконується легко. Тому що при $\xi_1 \to \xi_2$ у правій частині (7) маємо неозначеність типу $\frac{0}{0}$, позначивши $\sqrt{(\xi_1\xi_2)^2 - \xi_1^2\xi_2^2} = \alpha$, $\sqrt{Q \pm 2\alpha\sqrt{a^2-m^4}} = Z_\pm$ застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{K_0(Z_+) - K_0(Z_-)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{dK_0(Z_+)}{d\alpha} - \frac{dK_0(Z_-)}{d\alpha}\right] =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{dK_0(Z_+)}{dZ_+}\frac{dZ_+}{d\alpha} - \frac{dK_0(Z_-)}{dZ_-}\frac{dZ_-}{d\alpha}\right] = -\lim_{\alpha\to 0}\left[K_1(Z_+)\frac{\sqrt{a^2-m^4}}{\sqrt{Q+2\alpha\sqrt{a^2-m^4}}} +\right.$$

$$\left. + K_1(Z_-)\frac{\sqrt{a^2-m^4}}{\sqrt{Q-2\alpha\sqrt{a^2-m^2}}}\right] = -2\frac{\sqrt{a^2-m^4}}{\sqrt{2(a+m^2)\xi^2}} K_1\left(\sqrt{2(a+m^2)\xi^2}\right). \tag{9}$$

Переходячи в (7) або (7а) до границі з використанням (9), записуємо

$$\left[\frac{dK_0(m\sqrt{\xi^2})}{d\xi^2}\right]^2 = \frac{m^2}{4\xi^2}K_1^2(m\sqrt{\xi^2}) = \frac{1}{4}\int_{m^2}^{\infty}\sqrt{a^2-m^4}\,\frac{K_1(\sqrt{2(a+m^2)\xi^2})}{\sqrt{2(a+m^2)\xi^2}}\,da. \tag{10}$$

Для спрощення виразу (9) приймемо $m^2 = 1$; $\sqrt{\xi^2} = t > 0$:

$$K_1^2(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}\int_1^{\infty}\sqrt{a-1}\,K_1\left(t\sqrt{2(a+1)}\right)da$$

і, виконуючи заміну змінної інтегрування $a+1 = 2u$, одержимо відому формулу квадрата функції Макдональда [I]:

$$K_1^2(t) = 2t\int_1^{\infty}\sqrt{u-1}\,K_1(2t\sqrt{u})\,du\,, \tag{11}$$

що можна вважати критерієм правильності формул множення (7), (7а).

2. Розглянемо тепер випадок потрійного множення функції Макдональда. Для $n = 3$ із (6) дістаємо представлення у виді потрійного інтеграла

$$\Delta_2^+(\xi_1)\Delta_2^+(\xi_3)\Delta_2^+(\xi_5) = i\int_0^{\infty} da_{13}da_{15}da_{35}\,\Delta_4^+(\xi_1,\xi_3,\xi_5;m^2,m^2,m^2,a_{13},a_{15},a_{35}), \tag{12}$$

в якому з допомогою (3), (5) одержуємо формулу множення

$$im^3K_1(m\sqrt{\xi_1^2})K_1(m\sqrt{\xi_3^2})K_1(m\sqrt{\xi_5^2}) = \frac{\sqrt{\xi_1^2\xi_3^2\xi_5^2}}{4}\int_{m^2}^{\infty}\frac{da_{13}da_{15}da_{35}}{\sqrt{R'}}\left[K_0\left(\sqrt{Q'+\sqrt{R'}}\right) - K_0\left(\sqrt{Q'-\sqrt{R'}}\right)\right]. \tag{13}$$

Використавши (8) в (I3), запишемо

$$\frac{dK_0(m\sqrt{\xi_1^2})}{d\xi_1^2}\cdot\frac{dK_0(m\sqrt{\xi_3^2})}{d\xi_3^2}\cdot\frac{dK_0(m\sqrt{\xi_5^2})}{d\xi_5^2}=\frac{i}{32}\int\limits_{m^2}^{\infty}da_{13}da_{15}da_{35}\,\frac{\Theta(D_3')}{\sqrt{R'}}\times$$

$$\times\left[K_0(\sqrt{Q'+\sqrt{R'}})-K_0(\sqrt{Q'-\sqrt{R'}})\right], \qquad \text{(I3a)}$$

де $\Theta(D_3')=\Theta\left[m^6+2a_{13}a_{15}a_{35}-m^2(a_{13}^2+a_{15}^2+a_{35}^2)\right]$. (I4)

Отже, потрійний добуток функцій Макдональда виражається потрійним інтегралом по гіперповерхні, що визначається нерівністю (I4).

Перетворимо аргумент Θ – функції (I4) до виду

$$\Theta\left[-(a_{13}-A_{13}^+)(a_{13}-A_{13}^-)\right], \qquad \text{(I5)}$$

де

$$A_{13}^{\pm}=\frac{1}{m^2}\left(a_{15}a_{35}\pm\sqrt{(a_{15}^2-m^4)(a_{35}^2-m^4)}\right). \qquad \text{(I5a)}$$

Щоб нерівність (I5) виконувалась, вирази $a_{13}-A_{13}^+$ та $a_{13}-A_{13}^-$ повинні бути різних знаків. Звідси одержуємо межі інтегрування для $a_{13}: A_{13}^-\leq a_{13}\leq A_{13}^+$. Запишемо (I3) як

$$K_1(m\sqrt{\xi_1^2})K_1(m\sqrt{\xi_3^2})K_1(m\sqrt{\xi_5^2})=\frac{\sqrt{\xi_1^2\xi_3^2\xi_5^2}}{4i}\int\limits_{m_2}^{\infty}da_{15}da_{35}\int\limits_{A_{13}^-}^{A_{13}^+}\frac{da_{13}}{\sqrt{R'}}\left[K_0(\sqrt{Q'+\sqrt{R'}})-K_0(\sqrt{Q'-\sqrt{R'}})\right]. \qquad \text{(I6)}$$

У границі $\xi_1=\xi_3=\xi_5$ під інтегралом знову дістаємо невизначеність $\frac{0}{0}$, яку можемо розкрити процедурою (9), що дає

$$\left[\frac{dK_0(m\sqrt{\xi^2})}{d\xi^2}\right]^3=\frac{1}{16i}\int\limits_{m_2}^{\infty}da_{15}da_{35}\int\limits_{A_{13}^-}^{A_{13}^+}da_{13}\,\frac{K_1(\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2})}{\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2}}. \qquad \text{(I7)}$$

Оскільки $$\frac{dK_0(\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2})}{da_{13}}=-\frac{\xi^2K_1(\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2})}{\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2}},$$

то з (I7) маємо

$$\left[\frac{dK_0(m\sqrt{\xi^2})}{d\xi^2}\right]^3=\frac{i}{16\xi^2}\int\limits_{m^2}^{\infty}da_{15}da_{35}\int\limits_{A_{13}^-}^{A_{13}^+}da_{13}\,\frac{dK_0(\sqrt{[3m^2+2(a_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2})}{da_{13}}= \qquad \text{(I8)}$$

$$=\frac{i}{16\xi^2}\int\limits_{m_2}^{\infty}da_{15}da_{35}\left[K_0\left(\sqrt{[3m^2+2(A_{13}^++a_{15}+a_{35})]\xi^2}\right)-K_0\left(\sqrt{[3m^2+2(A_{13}^-+a_{15}+a_{35})]\xi^2}\right)\right],$$

або

$$\left[K_1(m\sqrt{\xi^2})\right]^3=\frac{\sqrt{\xi^2}}{2m^3 i}\int\limits_{m^2}^{\infty}da_{15}\,da_{35}\left[K_0\left(\sqrt{[3m^2+2(A^+_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2}\right)-K_0\left(\sqrt{[3m^2+2(A^-_{13}+a_{15}+a_{35})]\xi^2}\right)\right].$$

(I8a)

Прийнявши у (I8a) $m^2=1$; $\sqrt{\xi^2}=t>0$; $a_{15}=u_1$; $a_{35}=u_2$ і врахувавши (I5a), запишемо формулу

$$\left[K_1(t)\right]^3=\frac{t}{2i}\int\limits_1^{\infty}du_1\,du_2\Big[K_0\left(t\sqrt{3+2(u_1+u_2+u_1u_2)+\sqrt{(u_1^2-1)(u_2^2-1)}}\right)-$$
$$-K_0\left(t\sqrt{3+2(u_1+u_2+u_1u_2-\sqrt{(u_1^2-1)(u_2^2-1)})}\right)\Big],$$

(I9)

яку на відміну від (II) прямим обчисленням перевірити важко.

Вищі степені $[K_1(t)]^n$; $(n>3)$ можна одержати з (6), редукційної формули та представлення для Δ_5^+, однак тоді наявні складні $n+1$ кратні інтеграли, незручні для користування.

І. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды, специальные функции. - М.: Наука, 1983. - 750 с. 2. Тапуняк И.И. Интегральное представление функций Вайтмана для свободной скалярной теории поля. - Львов, 1983. - 48 с. - Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 8I9. Ук. 84. Деп. 3. Källen G., Wilhelmsson H. Generalized singular functions. - Mat. Fys. Skr. Dan. Sel. Vid., 1959, 1, N9, p.3-28.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.84

УДК 517.51

Л.М.Лісевич

ПРО ОДИН ВИПАДОК НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ВІД МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Відомо, що обмежений інтеграл від рівномірної майже періодичної (РМП) функції є знову РМП функція.

Розглядаємо випадок, коли невизначений інтеграл від МП функції $f(x)$ має вигляд

$$\int_0^x f(t)\,dt = cx + g(x). \tag{1}$$

Лема 1. Якщо $f(x)$ – РМП функція, а $g(x)$ обмежена на всій дійсній осі, то $g(x)$ також РМП функція.

Доведення. Запишемо співвідношення (1) у вигляді

$$\int_0^x (f(t)-c)\,dt = g(x). \tag{2}$$

Функція $f(x)-c$ є РМП функцією як сума РМП функцій. За умовою $g(x)$ обмежена, тобто обмежений інтеграл (2). Тоді $g(x)$ – РМП функція.

Лема 2. Якщо $f(x) - S^P$ – МП функція, для якої виконується рівність (1) і

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

то

$$\int_0^x f_h(t)\,dt = cx + g_h(x) - \frac{1}{h}\int_0^h g(s)\,ds. \tag{3}$$

Доведення. Маємо

$$F_h(x) = \int_0^x f_h(t)\,dt = \int_0^x \left\{\frac{1}{h}\int_0^h f(t+s)\,ds\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h ds \int_0^x f(t+s)\,dt = \frac{1}{h}\int_0^h ds \int_s^{s+x} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \left\{c(x+s) + g(x+s) - cs - g(s)\right\} ds =$$

$$= cx + g_h(x) - \frac{1}{h}\int_0^h g(s)\,ds.$$

Лема доведена.

Теорема. Нехай $f(x) - S^P$ - МП функція, для якої наявне співвідношення (I). Тоді, якщо $g_h(x)$ обмежена, $g(x)$ є РМП функцією.

Доведення. Відомо, коли $f(x) - S^P$ - МП функція, то $f_h(x)$ - РМП функція. З обмеженості $g_h(x)$ на основі лем I і 2 випливає, що $g_h(x)$ РМП функція. Далі маємо

$$F_h(x)=\frac{1}{h}\int_0^h dS\int_S^{x+S} f(t)dt =$$
$$=\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\left(\int_S^0+\int_0^x+\int_x^{x+S}\right)f(t)dt\right\}dS=$$
$$=cx+g(x)+\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\left(\int_x^{x+S}-\int_0^S\right)f(t)dt\right\}dS. \tag{4}$$

Порівнюючи (3) і (4), отримуємо

$$g_h(x)-\frac{1}{h}\int_0^h g(S)dS=g(x)+\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\left(\int_x^{x+S}-\int_0^S\right)f(t)dt\right\}dS.$$

Звідси

$$g_h(x)-g(x)=\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\left(\int_x^{x+S}-\int_0^S\right)f(t)dt\right\}dS+\frac{1}{h}\int_0^h g(S)dS=$$
$$=\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\int_0^S(f(t+x)-f(t))dt\right\}dS+\frac{1}{h}\int_0^h g(S)dS=$$
$$=\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\int_0^S(f(t+x)-f(t))dt+\int_0^S f(t)dt-cS\right\}dS=$$
$$=\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\int_0^S f(t+x)dt-cS\right\}dS.$$

Як відомо, інтеграл $\int_0^S f(t+x)\,dt$ - рівномірно абсолютно неперервна функція на довільній множині дійсної осі Ox. Тому

$$\lim_{h\to 0}\int_0^h|f(t+x)|dt=0$$

і маємо

$$|g_h(x)-g(x)|\leq\frac{1}{h}\int_0^h\left|\int_0^S f(t+x)dt-cS\right|dS\leq$$
$$\leq\frac{1}{h}\int_0^h\left\{\int_0^h|f(t+x)|dt+|ch|\right\}dS.$$

Звідси

$$\lim_{h\to 0}|g_h(x)-g(x)|=0, \quad (-\infty<x<+\infty),$$

тобто $g(x)$ – рівномірна границя послідовності РМП функцій $g_h(x)$. Тоді за відомою теоремою $g(x)$ є РМП функція. Теорема доведена.

1. Кованько А.С., Лисевич Л.Н. О некоторых свойствах интеграла и производности от S^p - почти периодической функции.- Вопр. мат. физ. и теории функций, 1964, № 11, с. 63-69. 2. Левитан Б.М. Почти периодические функции. - М., 1953. - 216 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.85

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

БАГАТОВИМІРНИЙ РОЗПОДІЛ ПОХИБОК

Нехай

$$(x_{11},\dots,x_{m1}),\dots,(x_{1n},\dots,x_{mn}) - \tag{1}$$

результати n незалежних вимірювань деякої m-вимірної величини $(a_1,\dots,a_m)$, виконані в однакових умовах, без систематичної похибки та з однаковою для кожної компоненти своєю точністю. За невідомі значення компоненти $(a_1,\dots,a_m)$ вимірюваної величини згідно з правилом обгрунтування середнього арифметичного в законі великих чисел приймаємо наближено середні арифметичні

$$\bar{x}_1=\frac{x_{11}+\dots+x_{1n}}{n},\dots,\bar{x}_m=\frac{x_{m1}+\dots+x_{mn}}{n}. \tag{2}$$

Допущені похибки вимірювань

$$x_{11}-a_1,\dots,x_{m1}-a_m;\dots;x_{1n}-a_1,\dots,x_{mn}-a_m - \tag{3}$$

випадкові та абсолютно неперервні. Густину розподілу ймовірностей компонент випадкової похибки позначимо через $\varphi(\cdot,\dots,\cdot)$. Очевидно, що похибки (3) обмежені. Тому

$$\varphi(\pm\infty;;\dots;)=0,\dots,\varphi(;\dots;\pm\infty)=0. \tag{4}$$

Оскільки вимірювання (I) незалежні, то сумісна густина похибок (3)

$$\varphi(x_{11}-a_1,\ldots,x_{m1}-a_m)\cdot\ldots\cdot\varphi(x_{1n}-a_1,\ldots,x_{mn}-a_m). \tag{5}$$

Функцію $\varphi(\cdot,\ldots,\cdot)$ визначаємо з умови максимуму логарифма функції правдоподібності (5)

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\varphi(x_{1i}-a_1,\ldots,x_{mi}-a_m). \tag{6}$$

Необхідні умови екстремуму функції (6) записуємо як

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln\varphi(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1}\Bigg|_{(x_{1i}-a_1,\ldots,x_{mi}-a_m)}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln\varphi(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_m}\Bigg|_{(x_{1i}-a_1,\ldots,x_{mi}-a_m)}=0.\end{gathered} \tag{7}$$

Рівняння (7) повинні задовольняти значення (2); $a_1=\bar{x}_1,\ldots,a_m=\bar{x}_m$. При цьому

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-a_1)=\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)=0,\ldots,\sum_{i=1}^{n}(x_{mi}-a_m)=\sum_{i=1}^{n}(x_{mi}-\bar{x}_m)=0. \tag{8}$$

Приймемо

$$\frac{\partial\ln\varphi(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_j}=\Psi_j(x_1,\ldots,x_m),$$
$$-\infty<x_1,\ldots,x_m<\infty,\ (j=1,\ldots,m) \tag{9}$$

і запишемо рівняння (7) у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\Psi_j(x_{1i}-a_1,\ldots,x_{mi}-a_m)=0,\ (j=1,\ldots,m). \tag{I0}$$

Рівності (I0) і (8) можна сформулювати так. Сума значень функції $\Psi_j,\ (j=1,\ldots,m)$ дорівнює нулю, коли сума значень кожного аргументу дорівнює нулю. Зокрема для всяких дійсних $t_1,\ldots,t_m$

$$\Psi_j(t_1,\ldots,t_m)+\Psi_j(-t_1,\ldots,-t_m)=0,\ (j=1,\ldots,m).$$

Функція $\Psi_j(\cdot,\ldots,\cdot)$ змінює знак, якщо всі її аргументи його змінюють. Функція Ψ глобально непарна.

Оскільки для довільних дійсних $t_1,\ldots,t_m$ і $\tau_1,\ldots,\tau_m$

$$\Psi_j(t_1,\ldots,t_m)+\Psi_j(\tau_1,\ldots,\tau_m)+\Psi_j(-t_1-\tau_1,\ldots,-t_m-\tau_m)=0$$

та за глобальною непарністю функції

$$\Psi_j(t_1,\ldots,t_m)+\Psi_j(\tau_1,\ldots,\tau_m)=\Psi_j(t_1+\tau_1,\ldots,t_m+\tau_m),$$

то функція

$$\frac{\partial\Psi_j(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_k}=\omega_{jk}(x_1,\ldots,x_m)$$

задовольняє умови

$$\omega_{jk}(t_1,\ldots,t_m)=\omega_{jk}(t_1+\tau_1,\ldots,t_m+\tau_m),$$

$$\omega_{jk}(\tau_1,\ldots,\tau_m)=\omega_{jk}(t_1+\tau_1,\ldots,t_m+\tau_m).$$

Звідси

$$\omega_{jk}(t_1,\ldots,t_m)=\omega_{jk}(\tau_1,\ldots,\tau_m),\ (j,k=1,\ldots,m),$$

похідна Ψ_j стосовно k -го аргумента стала. Отже, кожна функція Ψ_j лінійна відносно своїх аргументів. Таким чином, співвідношення (9) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial\ln\varphi(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_j}=a_{j1}x_1+\ldots+a_{jm}x_m,\ (j=1,\ldots,m), \tag{II}$$

де a_{jk} - сталі. Оскільки вирази справа - це похідні тієї ж самої функції, та

$$\frac{\partial(a_{j1}x_1+\ldots+a_{jm}x_m)}{\partial x_k}=\frac{\partial(a_{k1}x_1+\ldots+a_{km}x_m)}{\partial x_j},$$

то $a_{jk}=a_{kj}$; матриця $\{a_{jk}\}$ - симетрична.

Із рівняння (II) випливає, що

$$\ln\varphi(x_1,\ldots,x_m)=a_{jj}\frac{x_j^2}{2}+\sum_{k\neq j}a_{jk}x_jx_k+c_j(\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots).$$

Тому що останній вираз повинен мати вигляд виразу справа при всіх $j=1,\ldots,m$, то

$$\ln\varphi(x_1,\ldots,x_m)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}a_{jj}x_j^2+\sum_{1=j<k=m}a_{jk}x_jx_k+\ln C.$$

Отже,

$$\varphi(x_1,\ldots,x_m)=Ce^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}a_{jj}x_j^2+\sum_{1=j<k=m}a_{jk}x_jx_k}, \tag{I2}$$

де a_{jj}, a_{jk}, C – сталі. З умов (4) випливає, що сталі a_{jj} від"ємні. Позначимо їх через $-\frac{1}{\sigma_j^2}$, $\sigma_j > 0$. Сталу a_{jk} при $j \neq k$ позначимо через $-\frac{r_{jk}}{\sigma_j \sigma_k}$, де $-1 < r_{jk} < 1$ та $r_{jk} = r_{kj}$, оскільки $a_{jk} = a_{kj}$. Тепер формула (12) набуває вигляду

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = Ce^{-\frac{1}{2} Q(x_1, \ldots, x_m)},$$

де квадратична форма

$$Q(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j^2}{\sigma_j^2} + 2 \sum_{1=j<k=m} \frac{r_{jk} x_j x_k}{\sigma_j \sigma_k}$$

задається матрицею

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{r_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} & \ldots & \frac{r_{1m}}{\sigma_1 \sigma_m} \\ \frac{r_{21}}{\sigma_2 \sigma_1} & \frac{1}{\sigma_2^2} & \ldots & \frac{r_{2m}}{\sigma_2 \sigma_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{r_{m1}}{\sigma_m \sigma_1} & \frac{r_{m2}}{\sigma_m \sigma_2} & \ldots & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix}$$

з визначником

$$|A| = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \ldots & r_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & 1 \end{vmatrix}}{(\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m)^2} = \frac{|B|}{(\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m)^2}$$

Сталу C визначаємо з умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_m) dx_m \ldots dx_1 = 1 .$$

Тоді маємо

$$C = \sqrt{\frac{|A|}{(2\pi)^m}} .$$

Таким чином, густина розподілу ймовірностей компонент m-вимірної випадкової похибки

$$\varphi(x_1,\ldots,x_m)=\frac{\sqrt{|B|}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sigma_1\ldots\sigma_m}\,e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{x_j^2}{\sigma_j^2}-\sum_{1=j<k=m}\frac{r_{jk}x_jx_k}{\sigma_j\sigma_k}},$$

$$-\infty<x_1,\ldots,x_m<\infty,(\sigma_1>0,\ldots,\sigma_m>0;-1<r_{jk}<1). \qquad (13)$$

Виконання достатніх умов максимуму функції (6) при $\varphi(\cdot,\ldots,\cdot)$, визначеній формулою (13), перевіряється безпосередньо.

Якщо похибку $(x_1,\ldots,x_m)$ виразити через номінальне значення $(a_1,\ldots,a_m)$: $x_1=X_1-a_1,\ldots,x_m=X_m-a_m$, то густина (13) набуде вигляду

$$\varphi(X_1,\ldots,X_m)=\frac{\sqrt{|B|}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sigma_1\ldots\sigma_m}\,e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{(X_j-a_j)^2}{\sigma_j^2}-\sum_{1=j<k=m}\frac{r_{jk}(X_j-a_j)(X_k-a_k)}{\sigma_j\sigma_k}} \qquad (14)$$

$$-\infty<X_1,\ldots,X_m<\infty,(-\infty<a_1,\ldots,a_m<\infty;\sigma_1>0,\ldots,\sigma_m>0;-1<r_{jk}<1).$$

Наведемо вираз густини m-вимірної нормальної випадкової змінної у вигляді [3]

$$\rho(x_1,\ldots,x_m)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}s_1\ldots s_m\sqrt{D}}\,e^{-\frac{1}{2D}\left\{\sum_{j=1}^{m}D_{jj}\frac{x_j^2}{s_j^2}+2\sum_{1=j<k=m}D_{jk}\frac{x_jx_k}{s_js_k}\right\}}, \qquad (15)$$

де

$$D=\begin{vmatrix}1 & \varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1m}\\ \varrho_{21} & 1 & \cdots & \varrho_{2m}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \varrho_{m1} & \varrho_{m2} & \cdots & 1\end{vmatrix},-1<\varrho_{ij}<1;$$

D_{ij} – відповідний мінор визначника D; $s_1,\ldots,s_m$ – стандартні відхилення; ϱ_{ij} – кореляції, що характеризують лінійну залежність між компонентами.

Порівнюючи (13) з (15), бачимо, що m – вимірна випадкова похибка нормально розподілена. Зокрема, при $m=2$ з виразу (15) дістаємо густину похибки розміщення точки на площині

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi s_1s_2\sqrt{1-\varrho^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left(\frac{x^2}{s_1^2}+2\varrho\frac{xy}{s_1s_2}+\frac{y^2}{s_2^2}\right)}, \qquad (16)$$

$$-\infty<x,y<\infty,(s_1>0,s_2>0,-1<\varrho<1).$$

Вираз (16) в іншій модифікації наявний у праці [1]. При $m=1$ з виразу (14) одержуємо густину похибки незалежних вимірювань, виконаних в однакових умовах, без систематичної похибки та з однаковою точністю

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\qquad (17)$$
$$-\infty<x<\infty,\ (-\infty<a<\infty,\ \sigma>0),$$

де a – номінальне значення вимірюваної величини; σ – характеризує точність або прецизійність вимірювань. Вираз (17) в іншій модифікації вивів Гаус у праці [2].

1. Bertrand J. Calcul des probabilités. Paris, 1888.–332 p.
2. Gauss C.F. Theoria motus corporum coelestium. Hamburg, 1809.–227 s. 3. Yule G.U., Kendall M.G. Wstęp do teorii statystyki. Warszawa, 1966.–684 s.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.84

УДК 517.512

В.Й. Гукевич

НЕРІВНІСТЬ ТИПУ БЕССЕЛЯ І РІВНІСТЬ ТИПУ ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ МАЙЖЕ ОРТОГОНАЛЬНИХ НА ВСІЙ ОСІ

Нехай $\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$ – простір функцій, заданих на всій осі, для яких

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f^2(t)\,dt<\infty .$$

Систему функцій $\{\varphi_i(t)\}$ назвемо майже ортогональною за Белманом в $\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$, якщо

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_i^2(t)\,dt=1,\quad i=1,2,\ldots$$

і
$$A=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{K=1}^{\infty}a_{iK}^2 ,$$

де
$$a_{iK}=\begin{cases}\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\varphi_i(t)\varphi_K(t)dt, & i\neq K\\ 0, & i=K\end{cases}. \qquad (I)$$

Систему $\{\varphi_i(x)\}$ назвемо замкненою в $\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$, коли для будь-якої функції $f(x)$ з $\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$ та $\varepsilon>0$ існує такий узагальнений многочлен $\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i\varphi_i(x)$, що

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\varphi_i(x)\Big)^2dx<\varepsilon .$$

Нехай $f(x)\in\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$ і система функцій $\{\varphi_i(t)\}$ належить простору $\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$. Агрегат $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\varphi_i(x)$ назвемо узагальненим многочленом найкращого середньоквадратичного наближення порядку n функції $f(x)$ в $\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$, якщо

$$\min\Big(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi_i(x)\Big)^2dx\Big)=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\varphi_i(x)\Big)^2dx ,$$

де мінімум беремо по всіх можливих значеннях дійсних чисел $x_1, x_2 \dots x_n$.

Відоме таке застосування принципу нерухомої точки до розв"язування безконечної системи лінійних рівнянь (I).

Лема I. Нехай $\sum\limits_{K=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{iK}^2=C<1$ і $\sum\limits_{K=1}^{\infty}b_K^2<\infty$, тоді система

$$x_i=b_i+\sum_{K=1}^{\infty}c_{iK}x_K \qquad i=1,2,\dots \qquad (2)$$

має єдиний розв"язок, що належить l_2.

Зауваження. Систему

$$x_i=b_i+\sum_{K=1}^{n}c_{iK}x_K \qquad i=1,2,\dots n , \qquad (3)$$

де $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ik}^2 = C < 1$ і $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq B$, причому сталі C і B не залежать від n, можна розглядати як частинний випадок системи (2), приймаючи $c_{ik} = 0$ і $b_k = 0$, коли $i = 1, 2, \ldots$, $k \geq n+1$.

З леми I випливає, що система (3) має єдиний розв"язок $(\beta_{1n}, \beta_{2n}, \beta_{nn})$, який задовольняє нерівність $\sum_{i=1}^{n} \beta_{in}^2 \leq B$, де стала B не залежить від n.

<u>Теорема I</u>. Нехай $\{\varphi_i(t)\}$ майже ортогональна за Белманом система функцій в $L_2(-\infty, \infty)$ і $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Справедлива нерівність

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \leq (1+\sqrt{A}) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(x)\,dx,$$

де
$$b_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\varphi_i(x)\,dx \tag{4}$$

і стала A, як в (I).

<u>Доведення</u>.

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2T}}\int_{-T}^{T} f(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2T}}\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(x)\right)dx \leq$$

$$\leq \lim_{T\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(x)\,dx}\sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(x)\right)^2 dx}\right)$$

Але

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(x)\right)^2 dx = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_k b_i \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_k^2 b_i^2}\,.$$

Таким чином,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(x)\right)^2 dx \leq (1+\sqrt{A})\sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

З цього випливає

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq \lim_{T\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(x)\,dx}\sqrt{(1+\sqrt{A})\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right).$$

Нерівність (4) доведено.

Лема 2. Нехай $f(x)\in\tilde{L}_2(-\infty,\infty)$ і $\{\varphi_i(x)\}$ – майже ортогональна за Белманом в $\tilde{L}_2(-\infty,\infty)$ система функцій, для якої $A<1$, де A те ж, що й в (I). Нехай далі

$$\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi_i(x)\Big)^2dx$$

і

$$b_i=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\varphi_i(x)\,dx \qquad i=1,2,\dots$$

Тоді

$$\min\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}\varphi_i(x)\Big)^2dx,$$

де мінімум береться по всіх можливих значеннях дійсних чисел, $x_1,x_2,\dots x_n$ і $\{\alpha_{in}\}$ – єдиний розв"язок системи

$$b_i=x_i+\sum_{k=1}^{n}x_k a_{ik}, \quad i=1,2\dots n,$$

що задовольняє умову $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}^2\le D$, причому константа D не залежить від n .

Доведення. Зауважимо, що $a_{ik}=a_{ki}$, $k,i=1,2,\dots n$. Знайдемо стаціонарні точки функції $\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=-2b_i+2x_i+2\sum_{k=1}^{n}x_k a_{ik}, \ i>k, \ i=1,2,\dots n.$$

Для цього розглянемо систему

$$x_i=b_i-\sum_{k=1}^{n}x_k a_{ik} \qquad i=1,2,\dots,n. \tag{5}$$

На основі теореми I дістаємо $\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2<\infty$. Крім цього,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2=A<1.$$

Отже згідно з зауваженням до леми I система (5) має єдиний розв"язок $(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\dots\alpha_{nn})$, що задовольняє умову $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}^2\le M$, де M не залежить від n .

Покажемо, що в точці $L(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\dots\alpha_{nn})$ функція $\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)$ має мінімум. Справді

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=2, \ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_k}=2a_{ik}, \ i>k \quad i=1,2\dots n,$$

$$d^2\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(2)}\Phi(x_1,x_2,\dots x_n),$$

$$d^2\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)=4\left(\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}dx_idx_k\right).$$

Але

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}dx_idx_k\right|\geq\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2-\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}dx_idx_k\right|$$

і, враховуючи нерівність Шварца,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}dx_idx_k\right|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(dx_i)^2(dx_k)^2}\leq\sqrt{A}\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2.$$

Отже $d^2\Phi\geq4(1-\sqrt{A})\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2$, де $A<1$.

З останньої нерівності випливає, що $d^2\Phi$ невід"ємне в околі точки L , а отже, функція $\Phi(x_1,x_2,\dots x_n)$ має в точці L мінімум.

Теорема 2. Нехай $f(x)\in T_2(-\infty,\infty)$ і $\{\varphi_k(x)\}$ – замкнена майже ортогональна за Белманом в $T_2(-\infty,\infty)$ система функцій, для якої $A<1$, де A як в (I). Нехай далі $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\varphi_i(x)dx=$ $=b_i$ і $\{\alpha_i\}$ – розв"язок системи

$$b_i=x_i+\sum_{k=1}^{\infty}x_ka_{ik}\quad i=1,2,\dots,$$

що належить l_2 . Тоді справедлива рівність

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_ib_i=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f^2(t)dt,$$

яка еквівалентна

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(f(t)-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_i(t)\right)^2dt=0.$$

Доведення. З теореми I випливає, що $\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2<\infty$. Крім цього, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2<1$. Отже, за зауваженням до леми I система

$$b_i=x_i+\sum_{k=1}^{n}x_ka_{ik}\qquad i=1,2,\dots n$$

має єдиний розв"язок $\{\alpha_{in}\}$, що задовольняє умову $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}^2\leq D$, де стала D не залежить від n .

Згідно з лемою 2 маємо

$$\min_{(x_1,x_2,\dots x_n)} \Phi(x_1,x_2,\dots x_n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}\varphi_i(x)\Big)^2 dx.$$

Але система $\{\varphi_i(x)\}$ замкнута в $L_2(-\infty,\infty)$. Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\dots\alpha_{nn}) = 0. \tag{6}$$

Розглянемо систему

$$b_i = x_i + \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_{ik} \qquad i=1,2,\dots \tag{7}$$

Згідно з теоремою I $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty$ і $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 = A < 1$, де A те ж, що і в (I). Система (7) задовольняє умови леми I, а отже, має єдиний розв"язок $(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n,\dots)$, що належить l_2.

Тепер розглянемо різницю

$$V_n = \Phi(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\dots\alpha_{nn}) - \Phi(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n).$$

$$V_n = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}\varphi_i(x)\Big)^2dx - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)\Big)^2dx =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}b_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}\alpha_{kn}a_{ik} +$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\alpha_k a_{ik}.$$

Беручи до уваги, що $(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\dots\alpha_{nn})$ і $(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n,\dots)$ – розв"язки відповідно систем (5) і (7), маємо

$$V_n = -2\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}b_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}\Big(\alpha_{in}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}a_{ik}\Big) +$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big(\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_k a_{ik}\Big) = -2\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}b_i +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}b_i + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_i\alpha_k a_{ik} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big(\alpha_{in}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}a_{ik}\Big)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}\Big(\alpha_i+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k a_{ik}\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_i\alpha_k a_{ik}=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_{in}\alpha_k a_{ik}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_i\alpha_k a_{ik}.$$

Таким чином,

$$V_n=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_{in}\alpha_k a_{ik}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_i\alpha_k a_{ik}.$$

Але $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}^2\leq D$, де стала D не залежить від n і $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2<\infty$. Нехай $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2=M$. Використовуючи нерівність Шварца, запишемо

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_{in}\alpha_k a_{ik}\Big|\leq\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_{in}^2\alpha_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_{ik}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\Big\{(DA)\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k^2\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$ Але $\{\alpha_k\}\in l_2$, отже, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_{in}\times$ $\times\alpha_k a_{ik}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, якщо $n\to\infty$. Міркуючи аналогічно, одержуємо, що $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_i\alpha_k a_{ik}=0$, коли $n\to\infty$.

Таким чином, $\lim_{n\to\infty}V_n=0$. З (6) і останньої рівності випливає

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)=0.$$

I. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. - М.: Гостехиздат, 1955. - 506 с. 2. Натансон И.П. Теория функций вещественного переменного. - М.: Гостехиздат, 1950. - 390 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.83

УДК 517.956

І.І.Верба

ПРО ДЕЯКІ ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З ПРЯМОКУТНИМ ВИРІЗОМ

Розглянемо ізотропну необмежену пластинку товщиною 2δ з прямокутним вирізом $|x_i|<a_i\ (i=1,2)$. Нехай через бічні поверхні пластинки здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем нульової температури, а на прямокутних границях пластинки заданий тепловий потік q_0 . Крім того, припустимо, що на безмежності температура пластинки та її перші похідні прямують до нуля. Тоді для визначення стаціонарного температурного поля в пластинці маємо таку граничну задачу*:

$$\Delta T-\varkappa^2 T=0\,, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x_i}\right|_{x_i=\pm a_i} M(x_{i\pm1})=\mp Q_0 M(x_{i\pm1})\,, \tag{2}$$

$$\left.T\right|_{(x_1,x_2)\to\infty}=0\,,\quad \left.\frac{\partial T}{\partial x_i}\right|_{(x_1,x_2)\to\infty}=0\quad (i=1,2), \tag{3}$$

де $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа; $\varkappa^2=\frac{\alpha_3}{\lambda\delta}$; $Q_0=\frac{q_0}{2\lambda\delta}$; λ – коефіцієнт теплопровідності; α_3 – коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь $x_3=\pm\delta$; $M(x_i)=S_+(x_i+a_i)-S_-(x_i-a_i)$;

$$S_\pm(\xi)=\begin{cases}1, & \xi>0,\\ 0{,}5\mp0{,}5, & \xi=0,\\ 0, & \xi<0,\end{cases}\qquad i\pm1=\begin{cases}1, & i=2,\\ 2, & i=1.\end{cases}$$

Введемо в розгляд функцію θ , що збігається з шуканою функцією T зовні прямокутника і дорівнює нулю в ньому. Враховуючи правила диференціювання узагальнених функцій, симетрію задачі відносно осей координат, граничні умови (2) на контурі прямокутника, для функції θ одержимо таке рівняння з сингулярними коефіцієнтами:

---

* Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.

$$\Delta\Theta-\varkappa^2\Theta=-\sum_{i=1}^{2}\Big\{Q_0M(x_{i\pm1})[\delta_+(x_i+a_i)+\delta_-(x_i-a_i)]-\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(i)}\times$$
$$\times\cos\lambda_n^{(i\pm1)}x_{i\pm1}M(x_{i\pm1})[\delta_+'(x_i+a_i)-\delta_-'(x_i-a_i)]\Big\},\qquad(4)$$
де $\delta_\pm(\xi)$ – асиметричні дельта-функції Дірака; $c_n^{(i)}$ – коефіцієнти Фур"є функції $T|_{x_i=a_i}$, $\lambda_n^{(i)}=\frac{\pi n}{a_i}$.

Розв"язок рівняння (4) з врахуванням умов на безмежності (3) одержимо, використовуючи перетворення Фур"є у такому вигляді:

$$\Theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{2}\int_{x_{i\pm1}-a_{i\pm1}}^{x_{i\pm1}+a_{i\pm1}}\Big\{Q_0g_2(\xi,x_i,a_i)-\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(i)}\times$$
$$\times\cos\lambda_n^{(i\pm1)}(\xi-x_{i\pm1})[g_1(\xi,x_i+a_i)-g_1(\xi,x_i-a_i)]\Big\}d\xi,\qquad(5)$$
де
$$g_1(\xi,\zeta)=\frac{\varkappa\zeta}{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}K_1(\varkappa\sqrt{\xi^2+\zeta^2});$$
$$g_2(\xi,x,a)=K_0(\varkappa\sqrt{\xi^2+(x+a)^2})+K_0(\varkappa\sqrt{\xi^2+(x-a)^2});$$
$K_\nu(\xi)$ – функції Макдональда порядку ν.

Коефіцієнти Фур"є $c_n^{(i)}$, що входять у розв"язок (5), знаходимо з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$c_k^{(i)}+\sum_{n=0}^{\infty}A_{kn}^{(i,i)}c_n^{(i)}=D_k^{(i)}\quad(i=1,2;\ k=0,1,\ldots),\qquad(6)$$
де
$$D_k^{(i)}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{kn}^{(i,i\pm1)}c_n^{(i\pm1)}+B_k^{(i)};$$
$$A_{kn}^{(i,i)}=\frac{1}{\pi a_{i\pm1}}\int_0^{2a_{i\pm1}}f_1(\xi,a_{i\pm1},\lambda_k^{(i\pm1)},\lambda_n^{(i\pm1)})g_1(\xi,2a_i)d\xi;$$
$$A_{kn}^{(i,i\pm1)}=\frac{(-1)^{n+k+1}}{\pi a_{i\pm1}}2\varepsilon(k)\int_0^{2a_{i\pm1}}d\xi\int_0^{2a_i}\cos\lambda_k^{(i\pm1)}\xi\cos\lambda_n^{(i)}\zeta g_1(\zeta,\xi)d\xi;$$
$$B_k^{(i)}=\frac{Q_0}{\pi a_{i\pm1}}\int_0^{2a_{i\pm1}}\Big\{(-1)^k\cos\lambda_k^{(i\pm1)}\xi\int_0^{2a_i}K_0(\varkappa\sqrt{\xi^2+\zeta^2})d\zeta-$$

$$-f_2(\xi, a_{i\pm1}, \lambda_\kappa^{(i\pm1)}) g_2(\xi, a_i, a_i)\Big\} d\xi;$$

$$f_1(\xi, b, \lambda_\kappa, \lambda_n) = \begin{cases} 2b-\xi, & n=\kappa=0; \\ (2b-\xi)\cos\lambda_\kappa\xi - \frac{1}{\lambda_\kappa}\sin\lambda_\kappa\xi, & n=\kappa=1,2,\ldots; \\ \frac{(-1)^{n+\kappa}}{\lambda_n^2-\lambda_\kappa^2} 2\varepsilon(\kappa)(\lambda_\kappa\sin\lambda_\kappa\xi - \lambda_n\sin\lambda_n\xi), & n\neq\kappa, \ n,\kappa=0,1,\ldots; \end{cases}$$

$$f_2(\xi, b, \lambda_\kappa) = \begin{cases} 2b-\xi, & \kappa=0; \\ \frac{2(-1)^\kappa}{\lambda_\kappa}\sin\lambda_\kappa\xi, & \kappa=1,2,\ldots; \end{cases} \quad \varepsilon(\kappa) = \begin{cases} 0{,}5, & \kappa=0; \\ 1, & \kappa=1,2,\ldots \end{cases}$$

У деяких випадках розв"язок задачі можна спростити. Якщо розміри вирізу співвимірні з товщиною пластинки, то у розкладах функцій $T|_{x_i=a_i}$ в ряди Фур"є можна обмежитись першим членом. Тоді розв"язок (5) суттєво спрощується і набуває вигляду

$$\Theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{2}\int_{x_{i\pm1}-a_{i\pm1}}^{x_{i\pm1}+a_{i\pm1}} \Big\{Q_0 g_2(\xi, x_i, a_i) - C_0^{(i)}\big[g_1(\xi, x_i+a_i) - g_1(\xi, x_i-a_i)\big]\Big\} d\xi,$$

де

$$C_0^{(i)} = \big[B_0^{(i)} A_{00}^{(i\pm1,i)} - A_{00}^{(i,i\pm1)} B_0^{(i\pm1)}\big] \times \big[(1+A_{00}^{(i,i)})(1+A_{00}^{(i\pm1,i\pm1)}) - A_{00}^{(1,2)} A_{00}^{(2,1)}\big]^{-1}.$$

Розв"язок задачі можна спростити і тоді, коли один із розмірів вирізу значно менший від іншого. Припустимо для визначеності, що $a_2 \ll a_1$. Тоді в розкладі функції $T|_{x_1=a_1}$ в ряд Фур"є можна обмежитись першим членом розкладу. Розв"язок (5) для цього випадку запишемо як

$$\Theta = \frac{1}{2\pi}\Big\{\sum_{i=1}^{2}\int_{x_{i\pm1}-a_{i\pm1}}^{x_{i\pm1}+a_{i\pm1}} Q_0 g_2(\xi, x_i, a_i) d\xi - C_0^{(1)}\int_{x_2-a_2}^{x_2+a_2}\big[g_1(\xi, x_1+a_1) - g_1(\xi, x_1 - a_1)\big] d\xi - \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)}\int_{x_1-a_1}^{x_1+a_1}\cos\lambda_n^{(1)}(\xi-x_1)\big[g_1(\xi, x_2+a_2) - g_1(\xi, x_2-a_2)\big] d\xi\Big\}.$$

Система для визначення коефіцієнтів Фур"є $C_0^{(1)}$ і $C_n^{(2)}$ $(n=0,1,\ldots)$ набуде вигляду

$$C_K^{(2)}+\sum_{n=0}^{\infty} P_{Kn} C_n^{(2)} = H_K \quad (\kappa=0,1,\dots), \tag{6}$$

$$C_0^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{0n} C_n^{(2)} + G_0 , \tag{7}$$

де $P_{Kn} = A_{Kn}^{(2,2)} - \frac{A_{K0}^{(2,1)} A_{0n}^{(1,2)}}{1+A_{00}^{(1,1)}}$; $H_K = \frac{B_0^{(1)} A_{K0}^{(2,1)}}{1+A_{00}^{(1,1)}} + B_K^{(2)}$,

$$R_{0n} = \frac{A_{0n}^{(1,2)}}{1+A_{00}^{(1,1)}} ; \quad G_0 = \frac{B_0^{(1)}}{1+A_{00}^{(1,1)}} .$$

Система (6) містить тільки невідомі $C_n^{(2)}$. Знайшовши її наближений розв"язок методом редукції і підставляючи $C_n^{(2)}$ в (7), одержимо наближене значення $C_n^{(1)}$.

Спрямуємо один із розмірів вирізу до нуля. Припустимо, що $a_1 \to 0$. Це відповідає випадку, коли у нескінченній пластинці є щілина довжиною $2a_2$, яка розміщена на осі x_2. Тоді (5) запишемо як

$$\theta = \frac{Q_0}{\pi} \int_{x_2-a_2}^{x_2+a_2} K_0\left(\varkappa\sqrt{x_1^2+\xi^2}\right) d\xi . \tag{8}$$

Розв"язок (8) збігається з розв"язком Я.С.Підстригача, Ю.М.Коляно.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.83

УДК 517.944

Ж.С.Свірчевська

ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо існування майже періодичного(МП)по t розв"язку одновимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t = -\varepsilon F(x,t,u,u_x,u_t) \tag{1}$$

з МП по t функцією $F(x,t,u,u_x,u_t)$ рівномірно відносно x та u, де ε - малий параметр, який задовольняє крайові умови

$$u(t,0) = u(t,\pi) . \tag{2}$$

Ітераційний процес, що сходиться до розв"язку задачі (1)-(2), будуємо за схемою, запропонованою Рабіновичем [3], який розглядав питання про існування періодичного розв"язку задачі (1)-(2).

Для доведення збіжності ітераційного процесу скористаємося теоремами вкладення Соболєва [3] та аналогом нерівності Л.Ніренберга, доведеними для простору МП функцій Мосеєнковим [2].

Нагадаємо позначення з праці [1]: C^∞ - простір неперервних нескінченно диференційованих функцій дійсних аргументів x і t ; C_0^∞ - підпростір із C^∞ МП по t функцій у смузі $(0\leq x\leq\pi,\ 0\leq t<+\infty)$.

За норму функції $\varphi(x,t)\in C^\infty$ приймаємо число

$$\|\varphi(x,t)\|=\left\{\lim_{T\to+\infty}\int_0^T dt\int_0^\pi|\varphi(x,t)|^2dx\right\}^{1/2}.$$

Поповнення в C^∞ відносно так введеної норми позначаємо H_0 . Розглядаємо ще одну норму функції $\varphi(x,t)\in C^\infty$

$$\|\varphi(x,t)\|_m=\left\{\sum_{|\sigma|=0}^{m}\|D^\sigma\varphi\|^2\right\}^{1/2},$$

де

$$D^\sigma=\frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2}}{\partial x^{\sigma_1}\partial t^{\sigma_2}};\quad \sigma=(\sigma_1,\sigma_2);\ |\sigma|=\sigma_1+\sigma_2.$$

Поповнення в C_0^∞ стосовно цієї норми позначаємо $\overset{0}{H}_m$, а поповнення в C^∞ — через H_m . Всі простори $H_0, H_m, \overset{0}{H}_m$ гільбертові.

Припустимо, що $F(x,t,u,u_x,u_t)\in C_K$ по всіх своїх аргументах при $0\leq x\leq\pi$ $-\infty<u,u_x,u_t<+\infty$, причому $\frac{\partial F}{\partial t}\not\equiv 0$ (інакше рівняння може виродитися у звичайне диференціальне рівняння). Вважатимемо також, що $u\in C_1\cap H_{K+1}$ та $\|F(x,t,u,u_x,u_t)\|\leq C(\|u\|_1)(\|u\|_1+1)$. Розв"язок шукаємо у вигляді $u=\varepsilon\tilde{u}(x,t,\varepsilon)$, де $\tilde{u}$ - гранична функція по ε ; C - константа, що залежить від $\|u\|_1$.

За нульову ітерацію природно прийняти розв"язок (1) при $\varepsilon=0$, тобто

$$Lu=u_{tt}-u_{xx}+\alpha u_t=0. \tag{3}$$

Рівняння (3) має в $\overset{0}{H}_1$ єдиний розв"язок $u=0$, який обираємо за нульову ітерацію $u_0=0$.

Будуємо u_1

$$Lu_1=-F(x,t,0,0,0), \tag{4}$$

що є лінійним рівнянням і за теоремою 2 з праці [1] маємо

$$\|u_1\|_{K+1}\leq C_K\|F(x,t,0,0,0)\|_K\leq C_K C[0]=M.$$

Використовуючи композицію функціональних нерівностей та нерівність Соболева, одержуємо

$$\|u\|_1 \leq a\|u_1\|_3 \leq a\|u_1\|_{k+1} \leq aM = K .$$

Продовжуючи процес далі, бачимо, що кожен раз приходимо до лінійного рівняння, яке має єдиний МП розв"язок, що задовольняє оцінку за нормою

$$Lu_{n+1} = -F(x,t,\varepsilon u_n, \varepsilon u_{nx}, \varepsilon u_{nt}).$$

Припустимо $u_n \in H_{k+1} \cap H_1^0$ та $k \geq 3$. Застосовуючи нерівність Соболева, маємо $u_n \in C_1$. Тоді $F(x,t,\varepsilon u_n, \varepsilon u_{nx}, \varepsilon u_{nt}) \in H_k$, тобто за теоремою 2 з праці [I]

$$u_{n+1} \in H_{k+1} \cap H_1^0 \qquad \text{та}$$

$$\|u_{n+1}\|_{k+1} \leq C_k \|F(x,t,\varepsilon u_n, \varepsilon u_{nx}, \varepsilon u_{nt})\|_{k+1} \leq$$

$$\leq C_k C[\varepsilon K](\|\varepsilon u_n\|_{k+1} + 1) \leq C_k C[1](1+1) \leq M$$

для $|\varepsilon| K < 1$ та $\varepsilon M < 1$.

Використовуючи нерівність Соболева ще раз, записуємо

$$\|u_{n+1}\|_1 \leq K .$$

Таким чином, послідовності $\{\|u_n\|_{k+1}\}$ та $\{\|u_n\|_1\}$ обмежені.

Доведемо збіжність ітераційного процесу. Розглянемо $u_n - u_{n-1} = \delta u_n$:

$$L\delta u_n = -[F(x,t,\varepsilon u_n, \varepsilon u_{nx}, \varepsilon u_{nt}) -$$
$$- F(x,t,\varepsilon u_{n-1}, \varepsilon u_{(n-1)x}, \varepsilon u_{(n-1)t})] =$$
$$= -\varepsilon[F_u(\text{в серед.т.})\,\delta u_{n-1} + F_{u_x}(\text{в серед.т.})\,\delta u_{(n-1)x} +$$
$$+ F_{u_t}(\text{в серед.т.})\,\delta u_{(n-1)t}]$$

(F_u, F_{u_x}, F_{u_t} – поточково обмежені незалежно від u, згідно з нашими оцінками $\|u_n\|_1$). Обираємо $B = B(M, K)$. Тобто

$$\|\delta u_n\|_1 \leq \varepsilon C_0 |F_u(\text{в серед.т.})\,\delta u_{n-1} + F_{u_x}(\text{в серед.т.})\,\delta u_{(n-1)x} +$$

$$+ F_{u_t}(\text{в серед.т.})\,\delta u_{(n-1)t}|$$

$$\|\delta u_n\|_1 \leq |\varepsilon| C_0 B \|\delta u_{n-1}\|_1$$

Беручи $\varepsilon C_0 B<1$, одержуємо, що ітераційна схема збігається в H_1^0 $\quad u_n \longrightarrow \widetilde{u} \in H_1^0$.

Згідно з нерівністю Ніренберга маємо інтерполяційну нерівність

$$\|\delta u_n\|_j \leq const\, \|\delta u_n\|_0^{1-j/k+1} \cdot \|\delta u_n\|_{k+1}^{j/k+1},$$

тобто $u_n \to \widetilde{u} \in H_j$ для $j<k+1$. За теоремою Банаха – Сакса маємо $\widetilde{u} \in H_{k+1}$. Таким чином, $u_n \in H_1^0 \cap H_{k+1}$, і ми довели теорему.

Якщо $F(x,t,u,u_x,u_t)$ задовольняє всі висунуті раніше вимоги, то для досить малих $|\varepsilon|$ існує МП розв"язок задачі (I)-(2)

$$u \in H_{k+1},$$

крім того, $u=\varepsilon\widetilde{u}(x,t,\varepsilon)$, де $\widetilde{u}$ – гранична функція в H_{k+1}. Розв"язок єдиний в H_1^0, якщо ε – достатньо мале.

I. Лісевич Л.М., Свірчевська Ж.С. Існування майже періодичного розв"язку однієї задачі для гіперболічного рівняння другого порядку.-Доп. АН УРСР, 1973, № 7, с. 611-613.
2. Мосєєнков В.Б. Майже періодичні розв"язки нелінійних хвильових рівнянь.-Укр. мат. журн., 1978, № 1, с. 113-118.
3. Rabinowitz P.H. Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations.- Com. Pure and Appl. Mathem, 1967, N20, p.145-205.

Стаття надійшла до редколегії 25.06.83

УДК 539.3

О.І.Бобик, В.Є.Юринець

ПРО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ, ЯКЕ ОПИСУЄ ЗГИН НЕПЕРЕРВНО-НЕОДНОРІДНИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН

I. Під час деформації пластини, коли серединна поверхня, що прийнята за координатну площину Oxy, викривляється, її напружений стан характеризується згинальними M_x, M_y і скручувальними H_{xy} моментами, перерізувальними силами N_x, N_y, які для ортотропної пластини можна виразити через функцію прогинів $w(x,y)$ відомим чином [2]. При цьому справедливе рівняння

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H_{xy}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=0. \qquad (1.1)$$

Припустимо, що коефіцієнти Пуассона сталі, а модулі пружності - диференційовані функції декартової координати y і змінюються з глибиною за законом

$$E_1=E_1^{(0)}e^{-f(y)},\; E_2=E_2^{(0)}e^{-f(y)},\; G=G^{(0)}e^{-f(y)}, \qquad (1.2)$$

причому між модулями пружності та модулем зсуву в початковій точці існує залежність

$$G^{(0)}=\frac{E_1^{(0)}}{2(\rho_0^2+\nu_1)}\left(\rho_0^2=\sqrt{\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}}\right), \qquad (1.3)$$

де $f(y)$ - додатньо визначена диференційована функція декартової координати y.

Підставляючи співвідношення для M_x, M_y, H_{xy} і (1.2) у (1.1), для функції прогину $w(x,y)$ одержуємо

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-2f'\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(f'^2-f'')\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\left[\nu_1+2(1-\nu_1\nu_2)\frac{G^{(0)}}{E_2^{(0)}}\right]\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-$$

$$-2f'\left[\nu_1+2(\nu_1\nu_2)\frac{G^{(0)}}{E_2^{(0)}}\right]\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\nu_1(f'^2-f'')\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \qquad (1.4)$$

Розв"язок (1.4) шукаємо у вигляді

$$w(x,y)=e^{-i\lambda x}\theta(y), \qquad (1.5)$$

де λ - довільна стала.

Підставляючи (I.3), (I.5) в (I.4), маємо

$$\frac{d^4\theta}{dy^4}-2f'\frac{d^3\theta}{dy^3}+(f'^3-f''-2\rho_0^2\lambda^2)\frac{d^2\theta}{dy^2}+2\rho_0^2\lambda^2 f'\frac{d\theta}{dy}+$$
$$+\lambda^2\left[\lambda^2\rho_0^4-\nu_1(f'^2-f'')\right]\theta=0. \tag{I.6}$$

Таким чином, задача згину для неперервно-неоднорідних пластин зводиться до розв"язування крайової задачі для лінійного диференціального рівняння (I.6) при відповідних граничних умовах на краях пластини.

2. Вважаючи, що при дії статичного навантаження на пластину розв"язки рівняння (I.6) неколивні, диференціальний оператор можна розкласти на множники

$$\left[\frac{d^2}{dy^2}+\alpha(y)\frac{d}{dy}+\beta(y)\right]\left[\frac{d^2\theta}{dy^2}+\gamma(y)\frac{d\theta}{dy}+\delta(y)\theta\right]=0, \tag{2.I}$$

де коефіцієнти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ визначаємо з системи

$$\alpha+\gamma=-2f', \quad 2\frac{d\gamma}{dy}+\alpha\gamma+\beta+\delta=f'^2-f''-2\rho_0^2\lambda^2,$$
$$\frac{d^2\gamma}{dy^2}+2\frac{d\delta}{dy}+\alpha\frac{d\gamma}{dy}+\alpha\delta+\beta\gamma=2\rho_0^2\lambda^2 f',$$
$$\frac{d^2\delta}{dy^2}+\alpha\frac{d\delta}{dy}+\beta\delta=\lambda^2\left[\rho_0^4\lambda^2-\nu_1(f'^2-f'')\right]. \tag{2.2}$$

Знайти загальний розв"язок системи (2.2), як і (I.6), неможливо, але з її допомогою можна записати в явному вигляді коефіцієнти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ для деяких часткових випадків $f(y)$, коли диференціальний оператор рівняння (I.6) можна розкласти на множники типу (2.I).

Наприклад припустимо, що $f(y)$ – лінійна функція, тобто

$$f(y)=a_0+b_0 y, \tag{2.3}$$

де a_0, b_0 – довільні сталі.

Вважаючи, що β і δ не залежать від y, з першого та четвертого рівнянь системи (2.2) знаходимо

$$\alpha=\gamma=-b_0, \quad \beta=-\rho_0^2\lambda^2\mp b_0\lambda\sqrt{\nu_1}, \quad \delta=-\rho_0^2\lambda^2\pm b_0\lambda\sqrt{\nu_1}, \tag{2.4}$$

які задовольняють і решту рівнянь системи (2.2).

3. Знайдемо вид функції $f(y)$, яка задовольняла систему (2.2) при $\gamma = 0$. З першого і третього рівнянь системи (2.2) маємо

$$\frac{d\delta}{dy} - f'\delta = \rho_0^2 \lambda^2 f'. \tag{3.1}$$

Розв"язуючи це диференціальне рівняння і беручи до уваги перші два рівняння системи (2.2), записуємо

$$\alpha = -2f', \ \delta = -\rho_0^2 \lambda^2, \ \beta = f'^2 - f'' - \rho_0^2 \lambda^2. \tag{3.2}$$

Одержані значення $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ повинні задовольняти четверте рівняння системи (2.2), що можливе за виконання умови

$$f'' - f'^2 = 0. \tag{3.3}$$

З (3.3) знаходимо

$$f(y) = -\ln(a - by). \tag{3.4}$$

Тоді, якщо $a - by > 0$, маємо

$$\alpha = -\frac{2b}{a - by}, \ \beta = \delta = -\rho_0^2 \lambda^2, \ \gamma = 0, \tag{3.5}$$

і рівняння (1.6) для функції (3.4) записуємо у вигляді

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{2b}{a - by}\frac{d}{dy} - \rho_0^2 \lambda^2\right)\left(\frac{d^2\theta}{dy^2} - \rho_0^2 \lambda^2 \theta\right) = 0. \tag{3.6}$$

Отже, функцію $\theta(y)$ необхідно шукати з диференціального неоднорідного рівняння

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} - \rho_0^2 \lambda^2 \theta = \theta_0, \tag{3.7}$$

де θ_0 – загальний розв"язок рівняння

$$\frac{d^2\theta_0}{dy^2} - \frac{2b}{a - by}\frac{d\theta_0}{dy} - \rho_0^2 \lambda^2 \theta_0 = 0. \tag{3.8}$$

Розв"язуючи почергово (3.8) і (3.7), остаточно одержуємо

$$\theta = B_1 \exp\left[\frac{\rho_0 \lambda}{b}(a - by)\right] + B_2 \exp\left[-\frac{\rho_0 \lambda}{b}(a - by)\right] + B_3\left\{\exp\left[\frac{\rho_0 \lambda}{b}(a - by)\right]\ln(a - by) - \right.$$

$$- \exp\left[-\frac{\rho_0 \lambda}{b}(a - by)\right] Ei^*\left[\frac{2\rho_0 \lambda}{b}(a - by)\right]\Bigg\} + B_4\left\{\exp\left[-\frac{\rho_0 \lambda}{b}(a - by)\right]\ln(a - by) - \right.$$

$$\left. - \exp\left[\frac{\rho_0 \lambda}{b}(a - by)\right] Ei\left[-\frac{2\rho_0 \lambda}{b}(a - by)\right]\right\}, \tag{3.9}$$

де $Ei^*\left[\frac{2\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right]$, $Ei\left[-\frac{2\rho_0\lambda}{b}(a-by)\right]$ – інтегральні показникові функції; $B_j\,(j=\overline{1,4})$ – сталі інтегрування, причому C_1 і C_2 входять в B_j.

4. Припустимо, що $f(y)$ – степенева функція типу

$$f(y)=-\ln(q+ky)^s, \tag{4.1}$$

де g, k, s – довільні сталі.

Для функції (4.1) із системи (2.2) знаходимо

$$\alpha=\frac{k(1+s)}{g+ky},\ \beta=-\rho_0^2\lambda^2\pm\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)}}{g+ky}-\frac{k^2(1-s)}{(g+ky)^2}, \tag{4.2}$$

$$\gamma=-\frac{k(1-s)}{g+ky},\ \delta=-\rho_0^2\lambda^2\mp\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)}}{g+ky}.$$

На основі одержаних співвідношень (4.2) рівняння (1.6) для функції (4.1) запишемо як

$$\left\{\frac{d^2}{dy^2}+\frac{k(1+s)}{g+ky}\frac{d}{dy}-\left[\rho_0^2\lambda^2\mp\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)}}{g+ky}+\frac{k^2(1-s)}{(g+ky)^2}\right]\right\}\left\{\frac{d^2\Theta}{dy^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{k(1-s)}{g+ky}\frac{d\Theta}{dy}-\left[\rho_0^2\lambda^2\pm\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)}}{g+ky}\right]\Theta\right\}=0. \tag{4.3}$$

У загальному випадку функцію Θ слід шукати з рівнянь

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2}-\frac{k(1-s)}{g+ky}\frac{d\Theta}{dy}-\left[\rho_0^2\lambda^2\pm\frac{\lambda k\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)}}{g+ky}\right]\Theta=0, \tag{4.4}$$

які підстановкою

$$\Theta=\Psi^{\frac{1-s}{2}}W(\Psi),\quad \Psi=\frac{2\rho_0\lambda}{b}(g+ky) \tag{4.5}$$

можна звести до рівнянь Уіттекера [1]

$$4\Psi^2\frac{d^2W}{d\Psi^2}=(\Psi^2\pm 4n\Psi+4m^2-1)W, \tag{4.6}$$

де

$$n=\frac{1}{2}\sqrt{(1-s)(\rho_0^2-s\nu_1)};\quad m=1-\frac{s}{2}. \tag{4.7}$$

Використовуючи розв"язки (4.6), що виражаються через функції Уіттекера $W_{\pm n,m}(\pm\Psi)$, і співвідношення (4.5), для Θ

маємо

$$\Theta=(g+ky)^{\frac{1-s}{2}}\left[B_1W_{n,m}(\Psi)+B_2W_{-n,m}(\Psi)+B_3W_{n,m}(-\Psi)+B_4W_{-n,m}(-\Psi)\right], \quad (4.8)$$

де $B_j\ (j=\overline{1,4})$ – сталі інтегрування.

У частковому випадку, коли $n=0$, тобто при $S=1$ або $\nu_1=p_0^2/S$, рівняння (4.4) збігаються і дають лише два незалежних розв"язки.

Якщо $\nu_1=p_0^2/S$ і $S\neq 1$, то функцію Θ слід шукати з диференціального рівняння

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2}-\frac{k(1-s)}{g+ky}\frac{d\Theta}{dy}-p_0^2\lambda^2\Theta=\Theta_0, \quad (4.9)$$

де Θ_0 – загальний розв"язок рівняння

$$\frac{d^2\Theta_0}{dy^2}+\frac{k(1+s)}{g+ky}\frac{d\Theta_0}{dy}-\left[p_0^2\lambda^2+\frac{k^2(1-s)}{(g+ky)^2}\right]\Theta_0=0, \quad (4.10)$$

яке зводиться до рівняння Беселя [3].

Розв"язуючи рівняння (4.10) і (4.9), для Θ остаточно одержуємо

$$\Theta=(g+ky)^m\Big\{B_1I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)+B_2K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)+B_3\left[I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\int K_m^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi-\right.$$
$$\left.-K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\int I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi\right]+B_4\left[K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\int I_m^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi-\right.$$
$$\left.-I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)\int I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)d\Psi\right]\Big\}, \quad (4.11)$$

де $I_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)$, $K_m\left(\frac{\Psi}{2}\right)$ – функції Беселя від уявного аргумента першого та другого роду порядку m.

Якщо $S=1$, то (4.3) зводиться до рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}+\frac{2k}{g+ky}\frac{d}{dy}-p_0^2\lambda^2\right)\left(\frac{d^2\Theta}{dy^2}-p_0^2\lambda^2\Theta\right)=0, \quad (4.12)$$

розв"язок якого знаходять так, як і рівняння (3.7).

1. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с. 2. Л е х н и ц к и й С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 355 с. 3. П о н т р я г и н Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 367 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.06.83

УДК 517.93

О.Р.Слоньовський

ОДИН З ПРИНЦИПІВ ПОБУДОВИ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ НА ПРИКЛАДІ МЕТОДУ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ УЗГОДЖЕНОСТІ

Розглядаємо метод третього порядку точності для знаходження розв"язків системи диференціальних рівнянь такого типу:

$$y_1' = y_1(N_{10}^1 + N_{11}^1 y_1) + y_2(N_{20}^1 + N_{21}^1 y_1 + N_{22}^1 y_2) + \ldots + y_m(N_{m0}^1 + N_{m1}^1 y_1 + \ldots + N_{mm}^1 y_m),$$

$$y_2' = y_1(N_{10}^2 + N_{11}^2 y_1) + y_2(N_{20}^2 + N_{21}^2 y_1 + N_{22}^2 y_2) + \ldots + y_m(N_{m0}^2 + N_{m1}^2 y_1 + \ldots + N_{mm}^2 y_m),$$

$$y_m' = y_1(N_{10}^m + N_{11}^m y_1) + y_2(N_{20}^m + N_{21}^m y_1 + N_{22}^m y_2) + \ldots + y_m(N_{m0}^m + N_{m1}^m y_1 + \ldots + N_{mm}^m y_m);$$

$$y_1(0) = y_{10}, \qquad \text{(I)}$$

$$y_m(0) = y_{m0}$$

на відрізку $[0, X_K]$.

Розіб"ємо вказаний відрізок на елементарні частини $[X_n, X_{n+1}]$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Розв"язок системи (I) у сітковому вузлі X_{n+1} шукаємо з допомогою раціонального виразу

$$\bar{y}_{n+1} = \frac{\bar{B}_0 + h\bar{B}_1 + h^2\bar{B}_2}{C_0 + hC_1 + h^2 C_2}, \qquad (2)$$

де $\bar{y}_{n+1}$ – вектор отриманих значень функцій у точці X_{n+1}; $\bar{B}_0, \bar{B}_1, \bar{B}_2$ – m - мірні вектори; C_0, C_1, C_2 – $m \times m$ - мірні матриці; h – крок інтегрування функції ($h = X_{n+1} - X_n$).

Розрахункові формули для $\bar{B}_0$, $\bar{B}_1$ і $\bar{B}_2$ отримаємо таким чином.

Вираз (2) переписуємо у вигляді

$$(C_0 + hC_1 + h^2 C_2)\bar{y}_{n+1} = \bar{B}_0 + h\bar{B}_1 + h^2\bar{B}_2. \qquad (3)$$

Приймаємо $h = 0$. Тоді

$$\bar{B}_0 = C_0 \bar{y}_n. \qquad (4)$$

Продиференціювавши по h вираз (3) і прийнявши $h=0$, отримуємо

$$\bar{B}_1 = C_0 \bar{y}_n' + C_1 \bar{y}_n \, . \tag{5}$$

Двічі продиференціювавши по h вираз (3), при $h=0$ записуємо

$$\bar{B}_2 = \frac{C_0 \bar{y}_n''}{2} + C_1 \bar{y}_n' + C_2 \bar{y}_n \, . \tag{6}$$

Підставивши (4), (5) і (6) у (2) маємо

$$\bar{y}_{n+1} = \frac{C_0 \bar{y}_n + h(C_0 \bar{y}_n' + C_1 \bar{y}_n) + h^2(\frac{1}{2} C_0 \bar{y}_n'' + C_1 \bar{y}_n' + C_2 \bar{y}_n)}{C_0 + hC_1 + h^2 C_2} . \tag{7}$$

Матрицю C_0 для простоти задаємо одиничною, тобто $C_0 = E$.

Для розрахунку матриць C_1 і C_2 введемо матрицю D, яка задовольняє умову

$$\bar{y}'' = -D\bar{y}' \tag{8}$$

Матрицю C_1 знаходимо за формулою

$$C_1 = \frac{2}{3} D \, , \tag{9}$$

що забезпечує L-стійкість методу (стійкість розглядається далі).

Для виведення формули, щоб знайти матрицю C_2, поділимо чисельник на знаменник у (7)

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h\bar{y}_n' + \frac{h^2}{2} \bar{y}_n'' + h^3\left(-C_2 \bar{y}_n' - \frac{C_1 \bar{y}_n''}{2}\right) + O(h^4) . \tag{10}$$

Отже, щоб досягався третій порядок точності, необхідно, щоб виконувалась рівність

$$-C_2 \bar{y}_n' - \frac{C_1 \bar{y}_n''}{2} = \frac{\bar{y}_n'''}{6} \, , \tag{11}$$

де

$$\frac{\bar{y}_n'''}{6} = \frac{(\bar{y}'')'}{6} = \frac{(-D\bar{y}_n')'}{6} = \frac{(-D' + D^2)}{6} \bar{y}_n' \, ; \tag{12}$$

$$-C_2 \bar{y}_n' - \frac{C_1}{2} \bar{y}_n'' = \left(-C_2 + \frac{D^2}{3}\right) \bar{y}_n' \, . \tag{13}$$

З (II), (I2) і (I3) отримуємо

$$C_2 = \frac{1}{6}(D^2 + D'). \qquad (I4)$$

Провівши нескладні перетворення над (7), записуємо остаточну формулу

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + \frac{\bar{K}_2 + hC_1\bar{K}_1}{E + hC_1 + h^2C_2}. \qquad (I5)$$

де $\bar{K}_1 = h\bar{y}'_n$; $\bar{K}_2 = \frac{h^2\bar{y}''_n}{2} + h\bar{y}'_n$.

Вектор $\bar{K}_2$ знаходимо за формулою

$$\bar{K}_2 = (E - \frac{h}{2}D)\bar{K}_1. \qquad (I6)$$

Для доведення стійкості методу розглянемо модельну систему $\bar{y}' = -A\bar{y}$; $\bar{y}'' = -A\bar{y}' = A^2\bar{y}$; $\bar{y}''' = A^2\bar{y}' = -A^3\bar{y}$, (I7)
приймаючи, що матриця A -додатно визначена.

Звідси випливає

$$C_1 = \frac{2}{3}A \ ; \ C_2 = \frac{A^2}{6}. \qquad (I8)$$

Підставимо (I7) і (I8) в (7)

$$\bar{y}_{n+1} = \frac{\bar{y}_n + h(-A + \frac{2}{3}A)\bar{y}_n + h^2(\frac{A^2}{2} - \frac{2}{3}A^2 + \frac{A^2}{6})\bar{y}_n}{E + \frac{2}{3}hA + \frac{h^2}{6}A^2} = \frac{E - \frac{h}{3}A}{E + \frac{2}{3}hA + \frac{h^2}{6}A^2}\bar{y}_n. \qquad (I9)$$

Звідси очевидно, що даний метод L -стійкий. Знаходження наближеного розв"язку проводили за схемою Рунге.

I. При заданому h визначають $\bar{y}_{n+1/h}$.

2. Шукають $\bar{y}_{n+\frac{1}{2}/\frac{h}{2}}$ і $\bar{y}_{n+1/\frac{h}{2}}$ при половинному кроці.

3. Перевіряють умову $|\bar{y}_{n+1/h} - \bar{y}_{n+1/\frac{h}{2}}| < \varepsilon$, (20)

4. При виконанні умови (20) приймають $n = n+1$ за формулою

$$h_н = \alpha h_c \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\Delta n}} , \qquad (2I)$$

де $h_н$ - нове значення кроку; h_c - значення попереднього кроку; $\Delta_n = \max_i |y_{in/h} - y_{in/\frac{h}{2}}|$; ε - задана точність; знаходять новий крок і перехід на I.

5. При невиконанні умови (20) приймають $h_н = \frac{h_c}{2}$ і перехід на 2.

Обчислення продовжують доти, доки аргумент не пройде весь заданий відрізок $[0, X_K]$.

Проведено експериментальні дослідження алгоритму на ряді тестових прикладів. Результати експерименту засвідчили достатню ефективність алгоритму.

За вихідну брали системи рівнянь, які описують процеси задач хімічної кінетики з реакціями першого і другого порядків.

ЗМІСТ

УДК 517.956

Нелокальные задачи для эллиптических уравнений с параметром и параболических уравнений. Л а в р е н ю к С.П. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат, вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов. Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 3-5 (на укр. яз.).

Рассматриваются нелокальные задачи для эллиптических уравнений с параметром и параболических уравнений общего вида. Доказано, что малые нелокальные возмущения классических задач для указанных уравнений не влияют на их разрешимость. Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.946

Существование обобщенного решения уравнения колебания пластинки в области с подвижными границами. С и д е л ь н и к Я.И. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 6-10 (на укр. яз.).

Методом Галеркина доказано существование обобщенного решения задачи

$$u_{tt}-a^2u_{xx}+u_{xxxx}=f(x,t),$$

$$u\Big|_{x=\ell_1(t)}=0,\quad u\Big|_{x=\ell_2(t)}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=\ell_1(t)}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=\ell_2(t)}=0,$$

$$u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=0,$$

в области $Q=\{(x,t):\ell_1(t)<x<\ell_2(t),\ 0<t<T\}$. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.946

Нелокальная задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения. Ц ы м б а л В.Н. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с.11-13 (на укр. яз.).

Построено асимтотическое разложение решения нелокальной по часовой переменной задачи для сингулярно возмущенного двухмерного параболического уравнения. Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.946

Смешанная задача для сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа. Ф л ю д В.М. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 13-17 (на укр. яз.).

Методом погранфункций с использованием функций углового погранслоя построено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа. Библиогр. : 6 назв.

УДК 517.946

Решение второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка в пространстве обобщенных функций. Л о п у ш а н с к а я Г.П. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 17-21 (на укр. яз.).

Построено решение второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка, когда правая часть уравнения, граничные и начальные данные - обобщенные функции. Решение выражается через заданные обобщенные функции и функцию Грина или фундаментальное решение. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.946

Об одной задаче Коши в пространстве обобщенных функций. Г у п а л о А.-В.С. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 21-24 (на укр. яз.).

Рассмотрено одномерное волновое уравнение $D_t^2 u = a^2 D_x^2 u + c^2 u$. Функция $u(t,x) = u_t(x)$ рассматривается как обобщенная функция на $-\infty < x < +\infty$, зависящая от параметра t. Наложены следующие начальные условия: при $t \to +0$ о.ф. $u_t(x)$ сходится в D' к $f(x)$, а о.ф. $D_t u_t(x)$ сходится в D' к $g(x)$, где f и g заданные элементы D'. Получено представление решения рассматриваемой задачи Коши. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.946

Об одной задаче типа Стефана для слаболинейной гиперболической системы. М е л ь н и к Т.Е., К и р и л и ч В.М. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 24-27 (на укр. яз.).

Приводится локальная теорема, указывающая на существование и единственность непрерывного обобщенного решения задачи типа Стефана для слаболинейной гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными. Граничные условия и условия на неизвестные функции $a(t)$ и $b(t)$ задаются в виде

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{si}(x,t) u_i(x,t)\, dx = h_s(p(t),t), \quad s=\overline{1,n},$$

$$H_i(p(t),t,p'(t),u(p(t),t)) = 0, \quad i=1,2,$$

$$p(t) = (a(t), b(t)).$$

Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.946

Приближенное решение смешанной задачи для параболических систем уравнений. К о с т е н к о В.Г., Г у б а л ь Л.Е. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 28-31 (на укр. яз.).

Разработан эффективный для использования на ЭВМ алгоритм приближенного решения смешанных задач для системы уравнений влагопереноса с использованием понятия матрицы Грина.

УДК 593.3

Подбор оптимальной толщины конической оболочки с подкрепленным краем. Х л е б н и к о в Д.Г., Б у р д а Р.М., М у з н ч у к А.О. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с.30-33 (на укр. яз.).

Предложена простая итерационная формула для определения оптимальной толщины конической оболочки постоянной толщины, край которой подкреплен тонким упругим кольцом прямоугольного поперечного сечения. Приведены числовые значения оптимальной толщины конической оболочки, находящейся под действием равномерного внутреннего давления и осевого усилия. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.984

Об одной несамосопряженной эволюционной задаче. Ч у й к о Г.И. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с.34-37 (на укр. яз.).

Рассматривается эволюционная задача $\frac{\partial u}{\partial t} = -Au$, $u|_{t=+0} = f$ для оператора Шредингера с комплексным потенциалом, допускающим разделение переменных, в классе умеренно растущих функций. Показано, что, несмотря на отсутствие взаимной однозначности A - преобразования Фурье в этом классе функций, задача имеет единственное решение. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.98

Об одном свойстве оснащенных гильбертовых пространств. Ф е д и к М.Н. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с.38-40 (на укр. яз.).

Пусть (H_+, H, H_-) - оснащенное гильбертово пространство, X - замкнутое линейное подпространство в H_+, причем $\overline{X} = H$ и $dim(H_+ \ominus X) = 1$. Показано, что $X \cap \widetilde{H}_+$, где $\widetilde{H}_+ \subset H_+$, также плотно в H и является замкнутым линейным подпространством в $\widetilde{H}_+$. Получено, что если $T_0, T \in G(H)$, $T_0 \subset T$ и $dim\, D(T)/D(T_0) = 1$, то $\overline{D(T_0) \cap D(T^* T)} = H$, а когда кроме того, $\rho(T) \neq \emptyset$, то $\forall n \in N$ $\overline{D(T_0) \cap D(T^n)} = H$. Библиогр.: 5 назв.

УДК 513.88

О свойствах одного унитарного оператора. М и к и т ю к Я.В. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 41-42. (на укр. яз.).

Описываются свойства одного специального унитарного оператора, действующего в некоторых функциональных пространствах. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.377

Температурное поле в пластинке при зависимом от координаты коэффициенте теплоотдачи. Д и д ы к В.З., К о в а л ь ч у к Б.В. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 43-46 (на укр. яз.).

Определено температурное поле в нагреваемой неподвижной внешней средой полубесконечной пластинке при заданном значении температуры краевой поверхности. Коэффициент теплоотдачи с боковых поверхностей пластинки является кусочно-постоянной функцией координаты. Библиогр.: 4 назв.

УДК 514

Разыскание развертывающихся поверхностей среди производимых с помощью определенного механизма линейчатых поверхностей. Д е н и с к о С.В., К у б и в С.И. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 47-49 (на укр. яз.).

Рассматриваются производимые с помощью определенного механизма линейчатые поверхности, каждая из которых имеет две окружности своими направляющими. Разыскиваются среди этих поверхностей развертывающиеся поверхности.

УДК 512.553

Дифференциальные $\dot{I}$-радикалы. Артемович О.Д., Горбачук Е.Л. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 49–51 (на укр. яз.).

Вводится понятие дифференциального $\dot{I}$-радикала и изучается вопрос о его тривиальности. Доказаны два утверждения. Если в дифференциальном кольце R все дифференциальные $\dot{I}$-радикалы тривиальны, то его фактор-кольцо $R/J^{d}(R)$ по дифференциальному радикалу Джекобсона $J^{d}(R)$ дифференциально простое кольцо. Если фактор-кольцо $R/J^{\alpha}(R)$ дифференциально простое и $J^{d}(R)$ – T-нильпотентный справа идеал, то над R все дифференциальные I-радикалы тривиальны. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513.83

Категория нормальных функторов. Заричный М.М. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с.52–56 (на укр. яз.).

Изучается категория нормальных функторов, действующих в категории компактов. Устанавливается, что мощность множества объектов этой категории равна континууму. Дается отрицательное решение проблем Е.В.Щепина о сохранении гомеоморфизмами степеней точек нормальных функтор-степеней несчетного веса. Библиогр.: 5 назв.

УДК 513.88+83

Вложения топологических векторных пространств и минимальные векторные топологии. Гуран И.И., Пукач И.Я. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с.56-60 (на укр. яз.).

Доказывается, что любые ТВП топологически изоморфно подпространству произведения метризуемых ТВП. Дается критерий ω - ограниченности ТВП. Показывается, что для минимальных ТВП характер совпадает с псевдохарактером. Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.564.3:530.145

Формулы умножения функции Макдональда в аксиоматической квантовой теории поля. Тацуняк П.И. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с.60-64 (на укр. яз.).

Исходя из интегрального представления функционалов Вайтмана свободной скалярной теории поля получены формулы умножения функций Макдональда от матричных аргументов в пространстве Минковского. Как следствие получено $[K_1(t)]^2$ и $[K_1(t)]^3$. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.51

Об одном случае неопределенного интеграла от почти периодической функции. Лисевич Л.Н. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 65-67 (на укр. яз.).

Пусть $f(x) - S^p$ - почти периодическая функция и $\int_0^x f(t)dt = cx + g(x)$. Доказано одно достаточное условие равномерной почти периодичности функции $g(x)$. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.21

Многомерное распределение ошибок. К в и т И.Д., К о с а р ч и н В.Н. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 67–72 (на укр. яз.).

Исходя из наиболее общих соображений о характере ошибок измерений, методом максимума правдоподобия выводится многомерное распределение ошибок. Показано также, что это распределение нормального вектора в другой модификации. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.512

Неравенство типа Бесселя и равенство типа Парсеваля для системы функций почти ортогональной на всей оси. Г у к е в и ч В.И. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 72–78 (на укр. яз.).

Рассматривается обобщение почти ортогональной по Беллману системы функций с конечного отрезка на всю ось. Доказывается, что для таких систем справедливо неравенство типа Бесселя и равенство типа Парсеваля. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.956

<u>О некоторых частных случаях решения задачи теплопроводности для пластинки с прямоугольным вырезом</u>. В е р б а И.И. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с.79–82 (на укр. яз.).

С помощью метода продолжения функций стационарная задача теплопроводности для бесконечной пластинки с прямоугольным вырезом сведена к решению дифференциального уравнения с сингулярными коэффициентами, учитывающего граничные условия. Значения неизвестной функции температуры на контуре прямоугольника, входящие в уравнение, разложены в ряды Фурье. Решение уравнения с учетом условий на бесконечности получено при помощи преобразования Фурье. Для нахождения неизвестных коэффициентов Фурье, входящих в это решение, получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений.

УДК 517.944

<u>Существование почти периодического решения одного нелинейного волнового уравнения</u>. С в и р ч е в с к а я Ж.С. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функций. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 82–85 (на укр. яз.).

Доказывается существование почти периодического решения волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=-\varepsilon F(x,t,u,u_x,u_t)$, где F – почти периодическая по t равномерно относительно x и u ; ε – малый параметр. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3

К решению дифференциального уравнения, описывающего изгиб непрерывно-неоднородных ортотропных пластин. Бобик Е.И., Юринец В.Е. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функции. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 86-90 (на укр. яз.).

Построены решения дифференциального уравнения, описывающего изгиб непрерывно-неоднородных ортотропных пластин, упругие характеристики которых являются дифференцируемыми функциями декартовой координаты. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.93

Один з принципов построения дробно-рациональных численных методов на примере метода третьего порядка согласованности. Слоневский О.Р. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 25. Вопросы алгебры и теории функции. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 91-94 (на укр. яз.).

Рассматривается метод третьего порядка согласованности решения нелинейных дифференциальных уравнений специального вида. Приводится доказательство   -устойчивости метода, описан алгоритм программы решения системы дифференциальных уравнений с помощью дробно-рационального выражения.

Министерство высшего и среднего
специального образования
УССР

Вестник
Львовского университета
Серия механико-математическая
Издается с 1965 г.
Выпуск 25

ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Львов. Издательство при Львовском государственном
университете издательского объединения
"Вища школа"

Адрес редколлегии: 290000 Львов, ул. Университетская, 1.
Университет, кафедра дифференциальных
уравнений

Львовская областная книжная типография
290000 Львов, ул. Стефаника, 11
(на украинском языке)

Редактор В.В.В о й т о в и ч
Технічний редактор І.Г.Х р у щ о в а
Коректор М.Ю.Г о р б а л ь

Н/К

Підп. до друку 20.02.86 . БГ 02454 . Формат 60х84/16.
Папір друк.№3. Офс. друк. Умовн. друк.-арк. 6,28. Умовн.
фарб.-відб. 6,51. Обл.-вид. арк. 5,13. Тираж 600 прим. Вид. № 1551.
Зам.2748 Ціна 70 коп. . Замовне.

Львівська обласна книжкова друкарня
290000 Львів, вул. Стефаника, 11

70 к.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат., 1986, вип. 25, 1—108.