УДК 518:517.948

М.Я.Бартіш, Л.Л.Роман

ПРО ОДИН РЕКУРСИВНИЙ МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай дано нелінійне операторне рівняння

$$P(x)=0\,, \qquad /1/$$

де $P(x)$ – неперервний оператор, що діє з одного банахового простору $\mathcal{X}$ в інший. Для розв"язування /1/ широко використовують метод Ньютона-Канторовича [3]. Досить ефективний метод з праці [1], який за трудомісткістю кожної ітерації практично еквівалентний методу Ньютона-Канторовича, але має вищий порядок збіжності $(1+\sqrt{2})$. На практиці поряд з основними методами доцільно застосовувати побудовані на їх базі рекурсивні [2] з оптимальною глибиною рекурсії. Розглянемо рекурсивний метод на базі методу з праці [1]. Запишем його у вигляді

$$x_0 = z_0^{(0)} = \bar{x}_0 \quad \text{– початкове наближення,}$$

$$z_n^{(i+1)} = z_n^{(i)} - \left[P'(\bar{x}_n)\right]^{-1} P\left(z_n^{(i)}\right),$$

$$i=0,1,\ldots,\ t-1,$$

$$x_{n+1} = z_{n+1}^{(0)} = z_n^{t}\,,$$

$$\bar{x}_{n+1} = x_{n+1} - \frac{1}{2}\left[P'(\bar{x}_n)\right]^{-1} P(x_{n+1})\,,$$

$$n=0,1,2,\ldots, \qquad /2/$$

Для послідовності $\{x_n\}$, визначеної з /2/, наявна така теорема.

<u>Теорема.</u> Нехай

1/ для початкового наближення x_0 існує оператор $\Gamma_0=\left[P'(x_0)\right]^{-1}$, причому $\|\Gamma_0\|\leq B_0$;

2/ $\|\Gamma_0 P(x_0)\|\leq \eta_0$;

3/ для $x, y \in \Omega_0=\{x:\|x-x_0\|\leq 4\eta_0\}$ мають місце оцінки $\|P''(x)\|\leq M$, $\|P''(x)-P''(y)\|\leq N\|x-y\|$;

4/ $h_0=MB_0\eta_0$, $\left(1-\frac{5}{2}h_0\right)\sqrt{2l}>1$, $lh_0<1$,

де $$l=\frac{5}{4}+\left[\frac{\varepsilon_0}{6}\,\frac{1}{1-\frac{5}{2}h_0}+\frac{\varepsilon_0}{8}\left(1-\frac{5}{2}h_0\right)\right]\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\,,\ \varepsilon_0=\frac{N}{MB_0}\,;$$

5/ $q = \delta h_0 < 1$; $\delta^{t+1} = 2\gamma^{t-1}\ell^2$,

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{2}h_0\right) + \ell h_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{2}h_0}.$$

Тоді рівняння /1/ має в Ω_0 розв"язок, до якого збігається $\{x_n\}$, отримана з /2/, причому наявна оцінка

$$\|x_n - x_*\| \le \frac{1}{2^{n-2}\ell^{n/2}} q^{D_n - 1}\eta_0, \qquad /3/$$

де $D_0 = 1$; $D_1 = t+1$; $D_n = (t+1)D_{n-1} + D_{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$

Порядок збіжності $\{x_n\}$ визначають зі співвідношення

$$\rho = t + 1 + \frac{1}{\rho}. \qquad /4/$$

Доведення здійснимо за схемою Л.В.Канторовича [3].

З /2/, використовуючи умови теореми, отримуємо

$$\|P(z_0^{(1)})\| \le \left\| \int_0^1 (1-\tau) P''(x_0 + \tau(z_0^{(1)} - x_0)) \times \right. \qquad /5/$$

$$\left. \times (z_0^{(1)} - x_0)^2 d\tau \right\| \le \frac{M}{2}\eta_0^2$$

$$\|z_0^{(2)} - z_0^{(1)}\| \le \frac{h_0}{2}\eta_0.$$

Використовуючи рівність

$$\|P(z_0^{(i+1)})\| = \left\| \int_0^1 [P'(\bar{x}_0) - P'(z_0^{(i)} + \tau(z_0^{(i+1)} - z_0^{(i)})] d\tau \times \right.$$

$$\left. \times [P'(\bar{x}_0)]^{-1} P(z_0^{(i)}) \right\|, \qquad /6/$$

одержуємо оцінки

$$\|P(z_0^{(2)})\| \le \frac{M}{2}(1+h_0)h_0\eta_0^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\|P(z_0^{(t)})\| \le \frac{M}{2}(1+h_0)^{t-1}h_0^{t-1}\eta_0^2 \qquad /7/$$

і

$$\|z_0^{(3)} - z_0^{(2)}\| \le \frac{1+h_0}{2}h_0^2\eta_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\|z_0^{(t)} - z_0^{(t-1)}\| \le \frac{1}{2}(1+h_0)^{t-2}h_0^{t-1}\eta_0. \qquad /8/$$

Тепер можемо записати умови теореми для точки x_1. Легко бачити, що

$$\|P(x_1)\| = \|P(z_0^{(t)})\| \le \frac{1}{2}(1+h_0)^{t-1}h_0^t\|P(x_0)\| < \frac{q^{D_1 - 1}}{2\sqrt{2}\ell}\|P(x_0)\|, \qquad /9/$$

$$\|x_1 - x_0\| \le \|z_0^{(t)} - x_0\| \le \eta_0 + \frac{1}{2}h_0\eta_0 + \frac{1}{2}h_0^2(1+h_0)\eta_0 + \ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{2}h_0^{t-1}(1+h_0)^{t-2}\eta_0 \leq \left[1+\frac{\frac{1}{2}h_0}{1-h_0(1+h_0)}\right]\eta_0 \leq 2\eta_0 \ ,$$

$$\|\bar{x}_1-\bar{x}_0\| \leq 2\eta_0+\frac{1}{2}\eta_0 \leq \frac{5}{2}\eta_0 \ , \quad \bar{x}_1 \in \Omega_0 \ . \qquad /10/$$

<u>Умова I</u>. Використовуючи розклад у ряд Тейлора [4], запишемо

$$\left[P'(\bar{x}_1)\right]^{-1}=\Big[P'(\bar{x}_0)-\int_0^1 P''(\bar{x}_0+\tau(\bar{x}_1-\bar{x}_0))d\tau \times$$

$$\times(\bar{x}_1-\bar{x}_0)\Big]^{-1} . \qquad /11/$$

Звідси, враховуючи умови теореми, випливає, що оператор $\Gamma_1=\left[P'(\bar{x}_1)\right]^{-1}$ існує та має місце оцінка

$$\|\Gamma_1\| \leq \frac{B_0}{1-\frac{5}{2}MB_0\eta_0} \leq \frac{B_0}{1-\frac{5}{2}h_0}=B_1 \ . \qquad /12/$$

<u>Умова 2</u>. З /9/ і /12/ дістаємо

$$\eta_1=\|\Gamma_1 P(x_1)\| \leq B_1\|P(x_1)\| \leq \frac{B_0}{1-\frac{5}{2}h_0}\cdot\frac{q^{D_1-1}}{2\sqrt{2}\,\ell}\|P(x_0)\| \leq \frac{q^{D_1-1}}{2\sqrt{\ell}}\eta_0 \cdot \qquad /13/$$

<u>Умова 3</u>. Для $x \in \Omega_1=\{x:\|x-x_1\| \leq 4\eta_1\}$ записуємо

$$\|x-x_0\| \leq \|x-x_1\|+\|x_1-x_0\| \leq 2\eta_0+4\eta_1 \leq \qquad /14/$$

$$\leq 2\left(1+\frac{q^{D_1-1}}{\sqrt{\ell}}\right)\eta_0 < 4\eta_0 \ ,$$

тобто $\Omega_1 \subset \Omega_0$.

<u>Умова 4</u>. З /12/ і /13/ отримуємо

$$h_1=MB\eta_1 \leq \frac{MB_0}{1-\frac{5}{2}h_0}\cdot\frac{q^{D_1-1}}{2\sqrt{\ell}}\eta_0 \leq \frac{q^{D_1-1}}{\sqrt{2}}h_0 < h_0 \ . \qquad /15/$$

<u>Умову 5</u> легко одержати прямою підстановкою. Оскільки сам метод починає працювати з x_1 , то необхідно визначити виконання умов теореми для точки x_2 . Проводячи викладки, аналогічні попереднім, маємо

$$\|P(z_1^{(1)})\| \leq M^2B_0^2B_1^2\left\{\frac{5}{4}\|P(x_0)\|+\left(\frac{\varepsilon_0}{6}\,\frac{1}{1-\frac{5}{2}h_0}+\frac{\varepsilon_0}{8}\left(1-\frac{5}{2}h_0\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\|P(x_1)\|\right\}\|P(x_1)\|^2 \leq h_0h_1\|P(x_1)\|\left\{\frac{5}{4}+\left(\frac{\varepsilon_0}{6}\,\frac{1}{1-\frac{5}{2}h_0}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\varepsilon_0}{8}\left(1-\frac{5}{2}h_0\right)\right)\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\} \leq \ell h_0h_1\|P(x_1)\| ,$$

$$\|z_1^{(2)}-z_1^{(1)}\| \leq \ell h_0 h_1 \eta_1 \ ,$$

$$\|P(z_1^{(2)})\| \leq M\left\{\|z_1^{(1)}-x_1\|+\|x_1-\bar{x}_1\|+\frac{1}{2}\|z_1^{(2)}-z_1^{(1)}\|\right\}\times$$
$$\times B_1\|P(z_1^{(1)})\| \leq \gamma \ell h_0 h_1^2 \|P(x_1)\|,$$
$$\|z_1^{(3)}-z_1^{(2)}\| \leq \gamma \ell h_0 h_1^2 \eta_1 ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\|P(z_1^{(t)})\| \leq \gamma^{t-1} \ell h_0 h_1^t \|P(x_1)\| . \qquad /16/$$

Звідси

$$\|P(x_2)\| = \|P(z_1^{(t)})\| \leq \gamma^{t-1}\ell h_0\left(\frac{q^{D_1-1}h_0}{\sqrt{2}}\right)^t \cdot \frac{q^{D_1-1}}{2\sqrt{2}\ell}\|P(x_0)\| \leq \frac{q^{D_2-1}}{2^3\ell^2}, \qquad /17/$$

$$\|x_2-x_1\| \leq \eta_1+\ell h_0 h_1 \eta_1+\ldots+\gamma^{t-2}\ell h_0 h_1^{t-1}\eta_1 \leq$$
$$\leq \left[1+\ell h_0 h_1 \frac{1-\gamma^{t-1}h_1^{t-1}}{1-\gamma h_1}\right]\eta_1 \leq 2\eta_1 , \qquad /18/$$

$$\|\bar{x}_2-\bar{x}_1\| \leq \|\bar{x}_2-x_2\|+\|x_2-x_1\|+\|\bar{x}_1-x_1\| \leq \frac{5}{2}\eta_1 . \qquad /19/$$

Перевіримо виконання умов I – 5 теореми для точки x_2.

Умова I:

$$\|\Gamma_2\| \leq \frac{B_1}{1-\frac{5}{2}h_1} = B_2 .$$

Умова 2:

$$\eta_2 = \|\Gamma_2 P(x_2)\| \leq \frac{B_1}{1-\frac{5}{2}h_1}\cdot\frac{q^{D_2-1}\|P(x_0)\|}{2^3\ell^2} \leq \frac{q^{D_2-1}}{2^2\ell}\eta_0 .$$

Умова 4:

$$h_2 = MB_2\eta_2 \leq \frac{MB_0}{\left(1-\frac{5}{2}h_0\right)^2}\cdot\frac{q^{D_2-1}}{2^2\ell}\eta_0 \leq \frac{q^{D_2-1}h_0}{2} < h_0 .$$

Умови 3, 5 перевіряють простою підстановкою.

Використовуючи метод математичної індукції, записуємо

$$\|P(x_n)\| \leq \frac{q^{D_n-1}}{2^{3/2 n}\ell^n}\|P(x_0)\|, \qquad /20/$$

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2\eta_{n-1} , \qquad /21/$$

$$\eta_n \leq \frac{q^{D_n-1}}{2^n \ell^{n/2}}\eta_0 , \qquad /22/$$

$$h_n \leq \frac{q^{D_n-1}h_0}{2^{n/2}} . \qquad /23/$$

Легко бачити, що $x_n \in \Omega_0$. Справді

$$\| x_n - x_0 \| \le \| x_n - x_{n-1} \| + \ldots + \| x_1 - x_0 \| \le 2(\eta_{n-1} + \ldots + \eta_0) \le$$
$$\le 2\left(\frac{q^{D_{n-1}-1}}{\ell^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1}} + \ldots + 1\right)\eta_0 \le 4\eta_0 .$$

З нерівностей

$$\| x_n - x_{n+m} \| \le \sum_{i=n}^{n+m-1} \| x_{i+1} - x_i \| \le 2 \sum_{i=n}^{\infty} q^{D_i - 1} \frac{\eta_0}{2^i \ell^{i/2}} \le \frac{q^{D_n - 1}}{2^{n-2} \ell^{n/2}} \eta_0$$

випливає існування граничного елемента $x_* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, при цьому має місце оцінка /3/ теореми. Переходячи до границі у нерівності /20/, дістаємо

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = P(x_*) = 0 ,$$

тобто x_* є розв"язком рівняння /I/.

При виведенні оцінки /23/ маємо нерівність

$$h_n \le \gamma^{t-1} \ell h_{n-2} h_{n-1}^t \eta_{n-1} \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{2} h_0\right)^2} \le \frac{\gamma^{t-1} \ell}{\left(1 - \frac{5}{2} h_0\right)^2 BM} h_{n-1}^{t+1} h_{n-2} . \qquad /24/$$

Аналогічно [5] із оцінки /24/ одержуємо рівняння /4/ для визначення порядку збіжності послідовності $\{x_n\}$, визначеної з /2/. Теорема доведена.

Як і в праці [2], можна визначити оптимальну глибину рекурсії при виборі методу з класу /2/ для розв"язування конкретного рівняння.

Список літератури: I. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв"язування функціональних рівнянь. - Доп. АН УРСР. Сер. А, I968, № 5, с.387-39I. 2. Б а р т и ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.Н. Итерационные формулы, полученные с помощью рекурсии. - В кн.: Мат. сб. К.: Наук. думка, I976, с.50-53. 3. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона. - Тр. мат. ин-та им.Стеклова, I949, № 28, с. I04-I44. 4. К а р т а н А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. - М.: Мир, I97I. - 392 с. 5. Schmidt I.W. Z.angew.- Math. Mech., 1963, N43, p.1-8.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.85