УДК 518.12:517.946:536.21

М.Я.Бартіш, І.В.Огірко, В.М.Фарат

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ЗМІШАНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Розглянемо нелінійне рівняння теплопровідності [4]

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{H_\beta}{H_\alpha}\lambda\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{H_\alpha}{H_\beta}\lambda\frac{\partial t}{\partial\beta}\right)\right]=-\omega \qquad /1/$$

в D з умовою на границі

$$t/_{\Gamma_i}=t_i\,,\ i=\overline{1,s}\,;\ \bigcup_i\Gamma_i=\Gamma,\ \Gamma_i\cap\Gamma_j=0\,,\ i\neq j\,, \qquad /2/$$

де $H_\alpha(\alpha,\beta)=A(1+\kappa_1\gamma)$; $H_\beta(\alpha,\beta)=B(1+\kappa_2\gamma)$;

$\kappa_1=\frac{1}{R_\alpha}$; $\kappa_2=\frac{1}{R_\beta}$ - кривини; $-H\leq\gamma\leq H$; A, B - коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні [5]; ω - густина внутрішніх джерел тепла; коефіцієнт теплопровідності λ згідно з табличними даними [1] залежить від температури $t(\alpha,\beta)$.

Зауважимо, при $H_\alpha=H_\beta=1$ ($\kappa_1=\kappa_2=0$, $A=B=1$) /1/ збігається з відповідним рівнянням у декартовій системі координат [4].

Перепишемо рівняння /1/ у вигляді

$$P\equiv\lambda\left[f_1\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha^2}+f_2\frac{\partial^2 t}{\partial\beta^2}+f_3\frac{\partial t}{\partial\alpha}+f_4\frac{\partial t}{\partial\beta}\right]+$$

$$+\frac{d\lambda}{dt}\left[f_1\left(\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right)^2+f_2\left(\frac{\partial t}{\partial\beta}\right)^2\right]+H_\alpha^3H_\beta^3\omega=0\,, \qquad /3/$$

де

$$f_1(\alpha,\beta)=H_\alpha H_\beta^3\,;\qquad f_2(\alpha,\beta)=H_\alpha^3H_\beta\,;$$

$$f_3(\alpha,\beta)=H_\alpha H_\beta^2\frac{\partial H_\beta}{\partial H_\alpha}-H_\beta^3\frac{\partial H_\alpha}{\partial\alpha}\,;$$

$$f_4(\alpha,\beta)=H_\alpha^2H_\beta\frac{\partial H_\alpha}{\partial\beta}-H_\alpha^3\frac{\partial H_\beta}{\partial\beta}\,.$$

Для розв"язування задачі /3/-/2/ застосовуємо метод Ньютона-Канторовича [3]. При цьому отримуємо послідовність лінійних задач відносно функції $V^{(n)}(\alpha,\beta)$:

$$\lambda^{(n)}\left[f_1^{(n)}\frac{\partial^2V^{(n)}}{\partial\alpha^2}+f_2^{(n)}\frac{\partial^2V^{(n)}}{\partial\beta^2}+f_3^{(n)}\frac{\partial V^{(n)}}{\partial\alpha}+f_4\frac{\partial V^{(n)}}{\partial\beta}\right]+$$

$$+2\frac{d\lambda^{(n)}}{dt}\left[f_1^{(n)}\frac{\partial t^{(n)}}{\partial\alpha}\frac{\partial V^{(n)}}{\partial\alpha}+f_2^{(n)}\frac{\partial t^{(n)}}{\partial\beta}\frac{\partial V^{(n)}}{\partial\beta}\right]+$$

$$+\frac{d\lambda^{(n)}}{dt}\left[f_1^{(n)}\frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial\alpha^2}+f_2^{(n)}\frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial\beta^2}+f_3^{(n)}\frac{\partial t^{(n)}}{\partial\alpha}+\right.$$

$$\left.+f_4^{(n)}\frac{\partial t^{(n)}}{\partial\beta}\right]V^{(n)}+\frac{d^2\lambda^{(n)}}{dt^2}\left[f_1^{(n)}\left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial\alpha}\right)^2+f_2^{(n)}\left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial\beta}\right)^2\right]V^{(n)}=P^{(n)}, \quad /4/$$

$$t^{(n+1)}=t^{(n)}-\alpha_n V^{(n)} \text{ в } D;\; t^{(n+1)}/_{\Gamma_i}=t_i,\; i=\overline{1,S}, \quad /5/$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$, $t^{(0)}$ – початкове наближення; $0<\alpha_n\leq 1$ параметр збіжності ітераційного процесу для випадку "поганого" початкового наближення.

Вважаємо, що D – прямокутник у системі координат α,β. Дискретизуємо область D рівномірною сіткою [2]:

$$D_h=\left\{(\alpha_i,\beta_j):\ \alpha_i=ih_\alpha,\ \beta_j=jh_\beta,\ i=\overline{0,M},\ j=\overline{0,N}\right\},$$

де h_α, h_β – відповідні кроки сітки по осях α і β.

Замінимо /4/ у точці (α_i, β_j) різницевим рівнянням з другим порядком апроксимації [2]. Тоді запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$b_{1,ij}^{(n)}V_{i,j-1}^{(n)}+b_{2,ij}^{(n)}V_{i-1,j}^{(n)}+b_{3,ij}^{(n)}V_{i,j}^{(n)}+b_{4,ij}^{(n)}V_{i+1,j}^{(n)}+b_{5,ij}^{(n)}V_{i,j+1}^{(n)}=b_{6,ij}^{(n)}, \quad /6/$$

$$i=\overline{1,M-1},\ j=\overline{1,N-1},$$

де $V_{ij}^{(n)}=0$; $i=\overline{0,M}$ при $j=0,N$; $j=\overline{0,N}$ при $i=\overline{0,M}$; ;

$$b_{1,ij}^{(n)}=\left\{\lambda\left[\frac{f_2}{h_\beta^2}-\frac{f_4}{2h_\beta}\right]-f_4\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial\beta}\Big/h_\beta\right\}_{ij}^{(n)}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2);$$

$$b_{2,ij}^{(n)}=\left\{\lambda\left[\frac{f_1}{h_\alpha^2}-\frac{f_3}{2h_\alpha}\right]-f_3\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial\alpha}\Big/h_\alpha\right\}_{ij}^{(n)}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2);$$

$$b_{3,ij}^{(n)}=\left\{\frac{d^2\lambda}{dt^2}\left[f_1\left(\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right)^2+f_2\left(\frac{\partial t}{\partial\beta}\right)^2\right]-\frac{2\lambda f_1}{h_\alpha^2}-\frac{2\lambda f_2}{h_\beta^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{d\lambda}{dt}\left[f_1\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha^2}+f_2\frac{\partial^2 t}{\partial\beta^2}+f_3\frac{\partial t}{\partial\alpha}+f_4\frac{\partial t}{\partial\beta}\right]\right\}_{ij}^{(n)}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2);$$

$$b_{4,ij}^{(n)}=\left\{\lambda\left[\frac{f_1}{h_\alpha^2}+\frac{f_3}{2h_\alpha}\right]+f_3\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial\alpha}\Big/h_\alpha\right\}_{i,j}^{(n)}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2);$$

$$b_{5,ij}^{(n)} = \left\{ \lambda \left[\frac{f_2}{h_\beta^2} + \frac{f_4}{2h_\beta} \right] + f_4 \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial t}{\partial \beta} \Big/ h_\beta \right\}_{ij}^{(n)} + 0(h_\alpha^2 + h_\beta^2) ;$$

$$b_{6,ij}^{(n)} = P_{ij}^{(n)} + 0(h_\alpha^2 + h_\beta^2) .$$

Для розв"язування системи /6/ можна використовувати методи матричноЇ прогонки, верхньоЇ релаксаціЇ тощо.

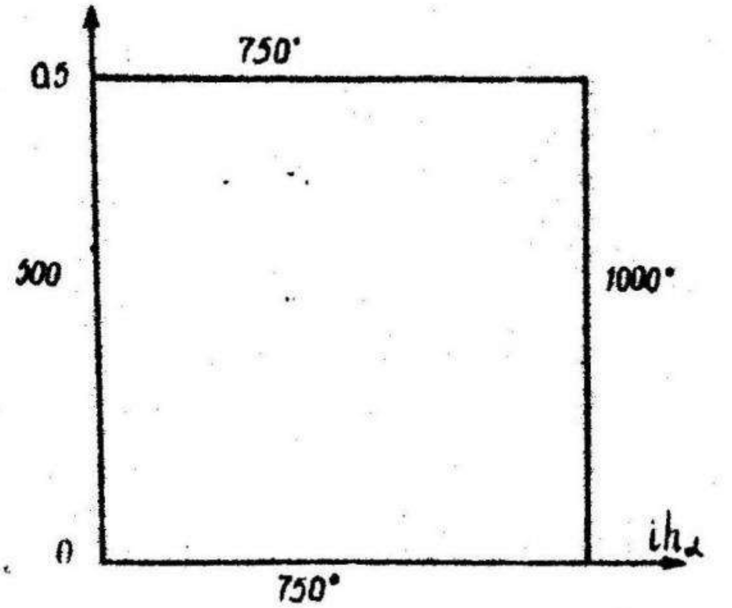

Рис. I.

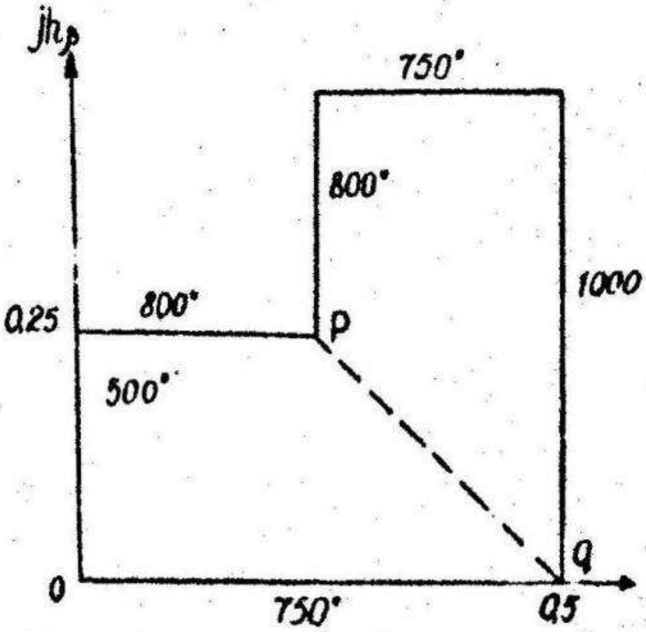

Рис. 2.

На практиці така методика застосовувалась для сталі марки 08 КП [I]. Розв"яжемо дві задачі для областей і граничних умов, показаних на рис. I, 2. При цьому вибираємо $\omega = I$; $A(\alpha,\beta) = I + 0,I\,\alpha + 0,2\,\beta$; $B(\alpha,\beta) = I + 0,5\,\alpha + 0,7\beta$; $h_\alpha = h_\beta = 0,05$; $K_1 = 0,I$; $K_2 = 0,2$; $\gamma = 0,0I$.

Для визначення $\lambda(t)$ з табличних даних [I] розглянемо три способи апроксимації:

I/ $\lambda(t) \backsim L_1(t) = 54,2 - 0,036t$ – пряма лінія, яка найліпше наближає табличні дані на всьому проміжку $[t_0, t_K]$;

2/ $\lambda(t) \backsim L_1(t)$ – ламана лінія, яка побудована за табличними значеннями функції $\lambda(t)$ на проміжку $[t_0, t_K]$;

3/ $\lambda(\bar{t}) \backsim L_2(\bar{t})$ – відрізок параболи на проміжку $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ $(\bar{t} \in [t_{i-1}, t_{i+1}])$.

Таблиця I

Розв"язок задачі /рис. I/ $y = 0,25$

λ	α								
	0,05	0,10	0,I5	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
I	549,5	598,I	644,7	689,2	732,9	777,4	824,6	876,4	934,4
2	55I,0	60I,I	648,6	693,8	738,4	784,2	832,7	886,7	942,4
3	55I,I	60I,I	648,8	693,7	738,5	784,5	833,I	887,7	942,7

Таблиця 2

Розв"язок задачі /рис. 2/ на лінії $pq(\alpha+\beta=0,5)$

λ	α				
	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
I	800,0	822,9	843,8	86I,4	872,4
2	800,0	827,2	85I,0	869,4	88I,4
3	800,0	826,7	849,3	869,I	882,5

Розв"язок задачі /I/-/2/ у першому випадку /рис.I/ наведений у табл. I для $y = 0,25$, а для другого випадку /рис. 2/ – у табл. 2 на лінії $pq(\alpha+\beta = 0,5)$. Як бачимо, при практичній реалізації методу достатньо для визначення $\lambda(t)$ вибрати ламану лінію. Треба відзначити, що для розглянутих вище задач досить легко отримати "хороше" початкове наближення і тим самим використовувати метод Ньютона-Канторовича в основному варіанті

$/\alpha_n = 1/$. Ми одержали результати за чотири ітерації методом Ньютона-Канторовича. Під час практичної реалізації методу вибирали різні значення для h_α і h_β. Найбільш доцільним виявився випадок $h_\alpha = h_\beta$. Надалі розглядатимемо випадки більш складних областей, а також інших граничних умов.

Список літератури: 1. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебание в условиях высоких температур. - М.: Машиностроение, 1965. - 568 с. 2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Наука, 1966. - 464 с. 3. Канторович Л.В. О методе Ньютона. - Тр. мат. ин-та АН СССР, 1949, № 28, с.104-144. 4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. - К.: Наук. думка, 1981. - 344 с. 5. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. - К.: Наук. думка, 1978. - 344 с.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.84

УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Б.М.Голуб

ІТЕРАТИВНА РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ МЕТОДУ З ПАМ'ЯТТЮ ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянемо задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \qquad /1/$$

$$X = \{x : x \in H,\ g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m}\ ;\ g_i(x) = 0,\ i = \overline{m+1,s}\}, \qquad /2/$$

де функції $f(x), g_i(x),\ i = \overline{1,s}$ визначені на гільбертовому просторі H.

Припускаємо, що множина X непорожня, а

$$\min_X f(x) = f_* > -\infty,\ X_* = \{x : x \in X,\ f(x) = f_*\} \ne \emptyset. \qquad /3/$$

Обмеження типу рівностей і нерівностей з /2/ враховуємо з допомогою штрафної функції

$$h(x) = \sum_{i=1}^{m} (\max\{0; g_i(x)\})^p + \sum_{i=m+1}^{s} |g_i(x)|^p, \qquad /4/$$

$$x \in H,\ p > 3.$$