/ α_n = I/. Ми одержали результати за чотири ітерації методом Ньютона-Канторовича. Під час практичної реалізації методу вибирали різні значення для h_α і h_β. Найбільш доцільним виявився випадок $h_\alpha = h_\beta$. Надалі розглядатимемо випадки більш складних областей, а також інших граничних умов.

Список літератури: I. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебание в условиях высоких температур.– М.: Машиностроение, 1965. – 568 с. 2. Березин И.С., Жидков В.П. Методы вычислений. М.: Наука, 1966.– 464 с. 3. Канторович Л.В. О методе Ньютона. – Тр. мат. ин-та АН СССР, 1949, № 28, с.104–144. 4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов.– К.: Наук. думка, 1981.– 344 с. 5. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек.– К.: Наук. думка, 1978.– 344 с.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.84

УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Б.М.Голуб

ІТЕРАТИВНА РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ МЕТОДУ З ПАМ"ЯТТЮ ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянемо задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \qquad /1/$$

$$X = \left\{ x : x \in H, g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}; \; g_i(x) = 0, i = \overline{m+1,s} \right\}, \qquad /2/$$

де функції $f(x), g_i(x), i = \overline{1,s}$ визначені на гільбертовому просторі H.

Припускаємо, що множина X непорожня, а

$$\min_X f(x) = f_* > -\infty, \; X_* = \left\{ x : x \in X, f(x) = f_* \right\} \ne \emptyset. \qquad /3/$$

Обмеження типу рівностей і нерівностей з /2/ враховуємо з допомогою штрафної функції

$$h(x) = \sum_{i=1}^{m} (\max\{0; g_i(x)\})^p + \sum_{i=m+1}^{s} |g_i(x)|^p, \qquad /4/$$

$$x \in H, \; p > 3.$$

Складемо функцію Тихонова

$$T_\kappa(x)=f(x)+A_\kappa h(x)+\alpha_\kappa\|x\|^2/2\ ,\ x\in H, \qquad /5/$$

де $\alpha_\kappa>0\ ,\ A_\kappa>0\ ,\ \kappa=0,1,2,\dots\ ,\ \lim\limits_{\kappa\to\infty}\alpha_\kappa=\lim\limits_{\kappa\to\infty}A_\kappa^{-1}=0.$

Для розв"язання задачі /I/–/2/ дослідимо ітеративну регуляризацію методу з пам"яттю [I, 2, 5], порядок збіжності якого $1+\sqrt{2}$:

$$x_{\kappa+1}=x_\kappa-\left[T_\kappa''(\bar{x}_\kappa)\right]^{-1}T_\kappa'(x_\kappa), \qquad /6/$$

$$\bar{x}_\kappa=\begin{cases} x_0 & ,\ \text{якщо}\ \kappa=0\\ x_\kappa-\frac{1}{2}\left[T_\kappa''(\bar{x}_{\kappa-1})\right]^{-1}T_\kappa'(x_\kappa), & \text{якщо}\ \kappa=1,\ 2,\ 3,\ \dots\end{cases}$$

Достатні умови збіжності методу /6/ дає наступна теорема.

<u>Теорема</u>. Нехай: 1) функції $f(x), g_i(x),\ i=\overline{1,s}$ належать $C^3(H)$, функції $f(x), g_i(x),\ i=\overline{1,m}\ ,\ |g_i(x)|\ ,\ i=\overline{m+1,s}$ випуклі на H , виконуються умови /3/ і, крім цього,

$$\|h'(x)\|\le L_0(1+\|x\|),$$

$$\max\left\{\|f'''(x)\|,\|h''(x)\|\right\}\le M,$$

$$\max\left\{\|f'''(x)-f'''(y)\|,\|h'''(x)-h'''(y)\|\right\}\le L\|x-y\|,$$

$$x,y\in H,$$

$$M=\text{const}>0\ ,\ L_0=\text{const}>0\ ,\ L=\text{const}>0\ ;$$

2/ функція Лагранжа

$$L(x,u)=f(x)+\sum_{i=1}^{s}u_i g_i(x)$$

на множині $H\times U_0\ ,\ U_0=\{u=(u_1,\dots,u_s):u_1\ge0,\dots,u_m\ge0\}$ має сідлову точку $(x_*,u^*)\in H\times U_0$ у наступному сенсі:

$$L(x_*,u)\le L(x_*,u^*)\le L(x,u^*),\ x\in H\ ,\ u\in U_0\ ;$$

3/ для нормального розв"язку x_* задачі /1/–/2/ (тобто $x_*\in X_*,\ \|x_*\|=\min\limits_{X_*}\|x\|$) відома апріорна оцінка $\|x_*\|\le d$;

4/ числові послідовності $\{\alpha_\kappa\},\ \{A_\kappa\}$ такі, що

$$\lim_{\kappa\to\infty}\alpha_\kappa=0,\ \lim_{\kappa\to\infty}A_\kappa=\lim_{\kappa\to\infty}\alpha_\kappa A_\kappa^{q-1}=+\infty,\ q=p(p-1)^{-1}, \qquad /7/$$

$$1\le\frac{\alpha_\kappa}{\alpha_{\kappa+1}}\le2\ ,\ 1\le\frac{A_{\kappa+1}}{A_\kappa}\le2\ ,\ A_\kappa\ge1\ ,\ \frac{A_{\kappa+1}-A_\kappa}{\alpha_{\kappa+1}}\le\frac{1}{L_0}\ , \qquad /8/$$

$$\frac{(\alpha_k-\alpha_{k-1})A_{k+1}}{\alpha_{k+1}^2}\le\frac{1}{3Rlt},\quad \frac{(A_{k+1}-A_k)A_{k+1}}{\alpha_{k+1}^2}\le\frac{1}{3lL_0t(1+R)},\qquad /9/$$

де $R=(d^2+2|u^*|^q q^{-1}p^{1-q}\max_{k\ge1}\alpha_k^{-1}A_k^{1-q})^{1/2}$;

$l^2=M^2+\frac{L}{3}\frac{\alpha_0}{A_0}$, $\quad |u^*|^q=\sum_{i=1}^{3}|u_i^*|^q$;

t – довільне фіксоване число, $t\ge 48$;

б/ початкове наближення x_0 для послідовності $\{x_k\}$, яка визначається /6/, і числа A_0,α_0 такі, що

$$A_0 lt\|T_0'(x_0)\|\le\alpha_0^2. \qquad /10/$$

Тоді

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-x_*\|=0. \qquad /11/$$

<u>Доведення</u>. При зроблених допущеннях функція $T_k(x)\in C^3(H)$ сильно випукла на H і

$$\langle T_k''(x)y,y\rangle\ge\alpha_k\|y\|^2,\ x,y\in H,\quad k=0,1,2,\dots$$

Звідси [3]

$$\|[T_k''(x)]^{-1}\|\le\alpha_k^{-1},\ x\in H,\quad k=0,1,2,\dots \qquad /12/$$

Введемо послідовність $\{z_k\}$, яка однозначно визначається умовою

$$T_k(z_k)=\min_H T_k(z)$$

або

$$T_k'(z_k)=0,\qquad k=0,1,2,\dots$$

Послідовність $\{z_k\}$ збігається до єдиного нормального розв"язку x_* задачі /1/-/2/ [3], тобто

$$\lim_{k\to\infty}\|z_k-x_*\|=0. \qquad /13/$$

Оскільки

$$\|x_k-x_*\|\le\|x_k-z_k\|+\|z_k-x_*\|,$$

то для доведення рівності /11/ достатньо виявити, що

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-z_k\|=0. \qquad /14/$$

З сильної випуклості $T_k(x)$ випливає

$$\alpha_k \| x_{k+1} - z_k \|^2 \le \langle T_k'(x_{k+1}) - T_k'(z_k),\ x_{k+1} - z_k \rangle =$$
$$= \langle T_k'(x_{k+1}),\ x_{k+1} - z_k \rangle .$$

Звідси маємо

$$\| x_{k+1} - z_k \| \le \| T_k'(x_{k+1}) \| \alpha_k^{-1} . \qquad /15/$$

Враховуючи, що $\| z_k \| \le R$ [3], з /15/ отримуємо

$$\| x_{k+1} \| \le \| z_k \| + \| x_{k+1} - z_k \| \le R + \alpha_k^{-1} \| T_k'(x_{k+1}) \| . \qquad /16/$$

Введемо числові послідовності

$$a_k = \| T_k'(x_k) \|,\quad b_{k+1} = \| \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k \|,\quad c_k = \alpha_k^{-1} a_k ,\ k = 0,1,2,\ldots$$

Покажемо, що

$$c_k \le \alpha_k A_k^{-1} (\ell t) ,\quad k = 0,1,2,\ldots \qquad /17/$$

а також

$$b_k \le 2 \alpha_k^{-1} a_{k-1} ,\quad k = 1,2,\ldots \qquad /18/$$

При $k = 0$ нерівність /17/ випливає з умови /10/. Доведемо нерівності /17/ і /18/ при $k = 1$:

$$a_1 = \| T_1'(x_1) \| \le \| T_0'(x_1) \| + \| T_1'(x_1) - T_0'(x_1) \| \le$$
$$\le \| T_0'(x_1) \| + (\alpha_0 - \alpha_1) \| x_1 \| + (A_1 - A_0) \| h'(x_1) \| \le$$
$$\le \| T_0'(x_1) \| + [\alpha_0 - \alpha_1 + L_0 (A_1 - A_0)] \| x_1 \| + L_0 (A_1 - A_0) .$$

Далі з врахуванням нерівностей /8/ і /16/ при $k = 0$

$$a_1 \le 4 \alpha_1 \alpha_0^{-1} \| T_0'(x_1) \| + R(\alpha_0 - \alpha_1) + L_0 (1 + R)(A_1 - A_0) . \qquad /19/$$

Оцінимо $\| T_0'(x_1) \|$. З /6/ запишемо

$$T_0'(x_1) = T_0'(x_1) - T_0'(x_0) - T_0''(\bar{x}_0)(x_1 - x_0) . \qquad /20/$$

Розкладемо у правій частині рівності /20/ $T_0'(x_1)$ за формулою Тейлора [4]:

$$T_0'(x_1) = T_0'(x_0) + T_0''(x_0)(x_1 - x_0) +$$
$$+ \int_0^1 (1 - \tau) T_0'''(x_0 + \tau (x_1 - x_0))(x_1 - x_0)^2 d\tau -$$
$$- T_0'(x_0) - T_0''(\bar{x}_0)(x_1 - x_0) .$$

Використовуючи умови теореми і те, що $\bar{x}_0 = x_0$, записуємо

$$\| T_0'(x_1) \| \le \frac{1}{2}(1+A_0)M \| x_1 - x_0 \|^2 \le A_0 \alpha_0^{-2} l a_0^2 .$$

Підставивши цю оцінку в /19/, матимемо

$$a_1 \le 4\alpha_1 \alpha_0^{-3} A_0 l a_0^2 + \frac{2}{3}\alpha_1^2 A_1^{-1}(lt)^{-1} .$$

Оцінимо c_1 :

$$\begin{aligned} c_1 = \alpha_1^{-1} a_1 &\le 4\alpha_0^{-3} A_0 l a_0^2 + \frac{2}{3}\alpha_1 A_1^{-1}(lt)^{-1} = \\ &= 4\alpha_0^{-1} A_0 c_0^2 l + \frac{2}{3}\alpha_1 A_1^{-1}(lt)^{-1} \le \\ &\le 4\alpha_0^{-1} A_0 l \alpha_0^2 A_0^{-2}(lt)^{-2} + \frac{2}{3}\alpha_1 A_1^{-1}(lt)^{-1} = \\ &= \alpha_1 A_1^{-1}(lt)^{-1}\left[4\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\frac{A_1}{A_0}t^{-1} + \frac{2}{3}\right] \le \\ &\le \alpha_1 A_1^{-1}(lt)^{-1}\left[16 t^{-1} + \frac{2}{3}\right] \le \\ &\le \alpha_1 A_1^{-1}(lt)^{-1} . \end{aligned}$$

Далі

$$b_1 = \| \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \| = \| \bar{x}_1 - x_1 \| + \| x_1 - x_0 \| \le \frac{1}{2}\alpha_1^{-1} a_1 + \alpha_0^{-1} a_0 \le 2\alpha_1^{-1} a_0 .$$

Нехай нерівності /17/, /18/ справедливі при деякому $K \ge 2$. З умови /6/ маємо

$$T_K'(x_{K+1}) = T_K'(x_{K+1}) - T_K'(x_K) - T_K''(\bar{x}_K)(x_{K+1} - x_K). \qquad /21/$$

Розкладемо $T_K'(x_{K+1})$ за формулою Тейлора [4] :

$$\begin{aligned} T_K'(x_{K+1}) &= T_K'(x_K) + T_K''(x_K)(x_{K+1} - x_K) + \\ &+ \int_0^1 (1-\tau) T_K'''(x_K + \tau(x_{K+1} - x_K))(x_{K+1} - x_K)^2 d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} T_K'''(x_K)(x_{K+1} - x_K)^2 - \frac{1}{2} T_K'''(x_K)(x_{K+1} - x_K)^2 = \\ &= T_K'(x_K) + T_K''(x_K)(x_{K+1} - x_K) + \frac{1}{2} T_K'''(x_K)(x_{K+1} - x_K)^2 + J_{1,K} , \end{aligned}$$

де

$$J_{1,K} = \int_0^1 (1-\tau)\left[T_K'''(x_K + \tau(x_{K+1} - x_K)) - T_K'''(x_K)\right](x_{K+1} - x_K)^2 d\tau .$$

Підставимо цей розклад в /21/ і ще раз використаємо формулу Тейлора:

$$T_K'(x_{K+1}) = T_K'(x_K) + T_K''(x_K)(x_{K+1} - x_K) +$$

$$+\frac{1}{2}T_k'''(x_k)(x_{k+1}-x_k)^2+\dot{J}_{1,k}-T_k'(x_k)-$$

$$-T_k''(x_k)(x_{k+1}-x_k)-T_k'''(x_k)(\bar{x}_k-x_k)(x_{k+1}-x_k)-\dot{J}_{2,k},$$

де $\dot{J}_{2,k}=\int_0^1[T_k'''(x_k+\tau(\bar{x}_k-x_k))-T_k'''(x_k)](\bar{x}_k-x_k)(x_{k+1}-x_k)d\tau.$

З /6/ записуємо

$$T_k'(x_{k+1})=-\frac{1}{2}T'''(x_k)[T_k''(\bar{x}_k)]^{-1}T_k'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+$$

$$+\frac{1}{2}T_k'''(x_k)[T_k''(\bar{x}_{k-1})]^{-1}T_k'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+\dot{J}_{1,k}-\dot{J}_{2,k}=$$

$$=\frac{1}{2}T_k'''(x_k)\left\{[T_k''(\bar{x}_{k-1})]^{-1}-[T_k''(\bar{x}_k)]^{-1}\right\}T_k'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+$$

$$+\dot{J}_{1,k}-\dot{J}_{2,k}=\frac{1}{2}T_k'''(x_k)[T_k''(\bar{x}_{k-1})]^{-1}\left\{T_k''(\bar{x}_k)-T_k''(\bar{x}_{k-1})\right\}\times$$

$$\times[T''(\bar{x}_k)]^{-1}T_k'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+\dot{J}_{1,k}-\dot{J}_{2,k}=$$

$$=\frac{1}{2}T_k'''(x_k)[T_k''(\bar{x}_{k-1})]^{-1}\left\{T_k''(\bar{x}_{k-1})-T_k''(\bar{x}_k)\right\}(x_{k+1}-x_k)^2+$$

$$+\dot{J}_{1,k}-\dot{J}_{2,k}.$$

Оцінимо $T_k'(x_{k+1})$, враховуючи /I8/:

$$\|T_k'(x_{k+1})\|\leq\frac{1}{2}(1+A_k)M\alpha_k^{-1}(1+A_k)Mb_k\alpha_k^{-2}a_k^2+$$

$$+\frac{1}{6}(1+A_k)L\alpha_k^{-3}a_k^3+\frac{1}{2}(1+A_k)L\alpha_k^{-3}a_k^3\leq$$

$$\leq 4A_k^2\alpha_k^{-4}M^2a_k^2a_{k-1}+\frac{4}{3}A_kL\alpha_k^{-3}a_k^2a_{k-1}=$$

$$=4A_k^2\alpha_k^{-4}\left(M^2+\frac{L}{3}\frac{\alpha_k}{A_k}\right)a_k^2a_{k-1}\leq$$

$$\leq 4A_k^2\alpha_k^{-4}\left(M^2+\frac{L}{3}\frac{\alpha_0}{A_0}\right)a_k^2a_{k-1}$$

і остаточно

$$\|T_k'(x_{k+1})\|\leq 4A_k^2\alpha_k^{-4}\ell^2a_k^2a_{k-1}. \qquad /22/$$

З визначення функції $T_K(x)$ з огляду на умови теореми маємо

$$a_{K+1}=\|T'_{K+1}(x_{K+1})\|\le\|T'_K(x_{K+1})\|+\|T'_{K+1}(x_{K+1})-T'_K(x_{K+1})\|\le$$
$$\le\|T'_K(x_{K+1})\|+[\alpha_K-\alpha_{K-1}+L_0(A_{K+1}-A_K)]\,\|x_{K+1}\|+L_0(A_{K+1}-A_K).$$

З врахуванням /16/ і нерівності

$$2\alpha_K-\alpha_{K+1}+L_0(A_{K+1}-A_K)\le 4\alpha_{K+1},$$

яка випливає з умов /8/, дістаємо

$$a_{K+1}\le 4\alpha_{K+1}\alpha_K^{-1}\|T'_K(x_{K+1})\|+R(\alpha_K-\alpha_{K-1})+L_0(1+R)(A_{K+1}-A_K).$$

Підставивши в цю нерівність оцінку /22/ і використавши умову /9/, запишемо

$$a_{K+1}\le 16\alpha_{K+1}\alpha_K^{-3}A_K^2\ell^2a_K^2a_{K-1}+\frac{2}{3}\alpha_{K+1}^2A_{K+1}^{-1}(\ell t)^{-1}.$$

Тоді

$$c_{K+1}\le 16A_K^2\alpha_K^{-3}\alpha_{K-1}\ell^2c_K^2c_{K-1}+\frac{2}{3}\alpha_{K+1}A_{K+1}^{-1}(\ell t)^{-1}\le$$
$$\le 16A_K^2\alpha_{K-1}\alpha_K^{-3}\ell^2\alpha_K^2A_K^{-2}(\ell t)^{-2}\alpha_{K-1}A_{K-1}^{-1}(\ell t)^{-1}+$$
$$+\frac{2}{3}\alpha_{K+1}A_{K+1}^{-1}(\ell t)^{-1}=\alpha_{K+1}A_{K+1}^{-1}(\ell t)^{-1}\left[16\frac{\alpha_{K-1}}{\alpha_K}\frac{\alpha_{K-1}}{\alpha_{K+1}}\frac{A_{K+1}}{A_K}\frac{1}{t^2}+\frac{2}{3}\right]\le$$
$$\le\alpha_{K+1}A_{K+1}^{-1}(\ell t)^{-1}\left[512t^{-2}+\frac{2}{3}\right]$$

і остаточно

$$c_{K+1}\le\alpha_{K+1}A_{K+1}^{-1}(\ell t)^{-1}.$$

Далі

$$b_{K+1}=\|\bar{x}_{K+1}-\bar{x}_K\|\le\|\bar{x}_{K+1}-x_{K+1}\|+\|x_{K+1}-x_K\|+$$
$$+\|x_K-\bar{x}_K\|\le\frac{1}{2}\alpha_{K+1}^{-1}a_{K+1}+\alpha_K^{-1}a_K+\frac{1}{2}\alpha_K^{-1}a_K\le 2\alpha_{K+1}^{-1}a_K.$$

Оцінки /17/ і /18/ доведені.

Оскільки

$$\alpha_K\|x_K-z_K\|^2\le\langle T'_K(x_K),x_K-z_K\rangle\le\alpha_K\|x_K-z_K\|,$$

то

$$\|x_K-z_K\|\le\alpha_K^{-1}a_K=c_K\le\alpha_KA_K^{-1}(\ell t)^{-1}$$

і

$$\lim_{K\to\infty}\|x_K-z_K\|\le(\ell t)^{-1}\lim_{K\to\infty}\alpha_KA_K^{-1}=0.$$

Теорема доведена.

Метод /6/ збігається до нормального розв"язку x_* задачі /I/-/2/ при довільному початковому значенні $x_0 \in H$, за умови, що відповідно підібрані послідовності $\{\alpha_k\}$ і $\{A_k\}$, які задовольняють усі умови /7/-/I0/ теореми. Можна, наприклад, прийняти

$$\alpha_k = B(k+1)^{-\alpha}, \quad A_k = (k+1)^{A}, \quad k = 0,1,2,\dots, \qquad /23/$$

де додатні числа A, B, α визначають умови

$$A + \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad \alpha < (q-1)A = (p-1)^{-1}A, \quad p > 3,$$
$$B \geq \max\{L_0;\ 9ltd;\ (81l^2t^2|u^*|^q q^{-1}p^{1-q})^{1/3};$$
$$(36l^2L_0^2t^2(1+d^2))^{1/4};\ (72l^2L_0^2t^2|u^*|^q q^{-1}p^{1-q})^{1/5};$$
$$2lt\|x_0\|;\ (2lt\|f'(x_0)+h'(x_0)\|)^{1/2}\},$$

t - довільне додатне число, $t \geq 48$.

Список літератури: I. Бартіш М.Я. Про один ітераційний метод розв"язування функціональних рівнянь.- Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 5, с.387-391. 2. Бартиш М.Я., Щербина Ю.Н. Об одном итерационном процессе решения нелинейного операторного уравнения. - Вычислительная и прикладная мат., 1972, вып. I6, с. II5-I2I. 3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач.-М.: Наука, I98I. - 400 с. 4. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. - М.: Мир, I97I.-392 с. 5. Щербина Ю.М., Голуб Б.М. Збіжність ітераційного методу з пам"яттю для мінімізації функцій. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1984, вип. 22, с. 3-7.

Стаття надійшла до редколегії 27.I2.84