УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Л.А.Остапчук

ОДИН ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Відома [2] загальна теорія рекурсивних методів для розв"язування нелінійних операторних рівнянь. Застосуємо її для задачі мінімізації функції багатьох змінних

$$f(x) \to \min, \quad x \in E^n. \qquad /1/$$

Вважаємо, що функція $f(x)$ двічі неперервно диференційована і задовольняє умову

$$m\|y\|^2 \leq \langle f''(x)y, y\rangle \leq M\|y\|^2, \qquad /2/$$

$x, y \in E^n$, $M \geq m > 0$, а також

$$\|f''(x) - f''(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Із /2/, зокрема, випливає, що функція $f(x)$ – сильно випукла і, отже, має єдину точку мінімуму x_* . Крім того [3, 4], існує матриця $[f''(x)]^{-1}$, $x \in E^n$, причому

$$\|[f''(x)]^{-1}\| \leq \frac{1}{m}.$$

Нехай векторна функція $\Phi: E^n \to E^n$ неперервна. Скажемо, що ця функція породжує ітераційний метод порядку φ для розв"язування задачі /1/, якщо існує таке початкове наближення x_0 , коли послідовність $\{x_k\}$, визначена за формулою

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

задовольняє умову

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq K\|x_k - x_*\|^{\varphi},$$

де x_* – розв"язок задачі /1/; $K = \mathrm{const}$; $0 < K < +\infty$.

Переформулюємо основну теорему з роботи [2] у термінах поставленої задачі.

Для розв"язування задачі /1/ розглянемо ітераційні формули

$$x_{k+1} = \Omega(x_k),$$

$$x_{k+1} = \Phi(x_k). \qquad /3/$$

Векторні функції $\Omega(x)$, $\Phi(x)$ вважатимемо неперервними.

Теорема. Нехай неперервні векторні функції $\Omega(x)$ і $\Phi(x)$ породжують ітераційні методи порядку ω та φ відповідно, причому функція $\Omega(x)$ зображується у вигляді

$$\Omega(x)=x-F(x)f'(x),$$

де $F(x)$ – деяка симетрична матриця. А також

$$Q(x)=\Phi(x)-\mathcal{H}(x)f'(\Phi(x)), \qquad /4/$$

де $\|F(\Phi(x))-\mathcal{H}(x)\|\leq K_\ell\|x-x_*\|^\ell$,

$0<K_\ell<+\infty$, $n=0,1,2,\ldots$, $\mathcal{H}(x)$ – симетрична матриця. Тоді векторна функція $Q(x)$ породжує ітераційний метод

$$x_{k+1}=Q(x_k)$$

порядку $q=\min\{\omega\varphi,\ \ell+\varphi\}$.

Розглянемо тепер застосування цієї теореми, коли $\Omega(x)=x-u(x)$, де $u(x)=[f''(x)]^{-1}f'(x)$, а векторна функція $\Phi(x)$ породжує метод порядку $\varphi\geq 2$. Матрицю $\mathcal{H}(x)$ вибираємо у вигляді

$$\mathcal{H}(x)=[f''(x-u(x))]^{-1}.$$

Використовуючи результати з праці [I], записуємо

$$\Phi(x)=x-u(x)+\beta(x),$$

де $\|\beta(x)\|\leq K\|x-x_*\|^2$, $K=\text{const}$; $0<K<+\infty$.

Оцінюємо

$$\|[f''(\Phi(x))]^{-1}-[f''(x-u(x))]^{-1}\|\leq$$

$$\leq\frac{1}{m^2}\|f''(x-u(x))-f''(\Phi(x))\|=$$

$$=\frac{1}{m^2}\|f''(x-u(x))-f''(x-u(x)+\beta(x))\|\leq$$

$$\leq\frac{L}{m^2}\|\beta(x)\|\leq\frac{LK}{m^2}\|x-x_*\|^2.$$

Таким чином, $\ell=2$ і порядок збіжності методу, що породжується вектор-функцією

$$Q(x)=\Phi(x)-[f''(x-u(x))]^{-1}f'(x),$$

дорівнює $q=\min\{2\varphi,\varphi+2\}=\varphi+2$ /оскільки $\varphi\geq 2$ за умовою/.

Тепер побудуємо ітераційний метод з порядком збіжності $2t+1$ /де t – фіксоване число, $t\geq 1$ / за такою рекурсивною схемою.

Приймемо

$$x_{k+1} = W_t(x_k), \qquad /5/$$

де $W_j(x) = W_{j-1}(x) - [f''(x-u(x))]^{-1} f'(W_{j-1}(x))$;

$$j = 2,3,\dots,t; \; u(x) = [f''(x)]^{-1} f'(x);$$

$$W_1(x) = x - \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{2}[f''(x-u(x))]^{-1} f'(x).$$

Метод, що породжується векторною функцією $W_1(x)$, має кубічну збіжність [4]. Послідовно вибираючи в /4/ $\Phi(x) = W_j(x)$, $j = 1,2,\dots,t-1$, виявляємо, що метод має порядок збіжності $3+2(t-1) = 2t+1$.

Врешті запишемо обчислювальну схему методу:

$$\begin{aligned} f''(x_k)u_k &= f'(x_k), \\ y_k &= x_k - u_k, \\ f''(y_k)z_k &= f'(x_k), \\ v_k^{(1)} &= x_k - \frac{1}{2}(u_k + z_k), \\ f''(y_k)S_k^{(j-1)} &= f'(v_k^{(j-1)}), \\ v_k^{(j)} &= v_k^{(j-1)} - S_k^{(j-1)}, \; j = 2,3,\dots,t, \\ x_{k+1} &= v_k^{(t)}, \; k = 0,1,2,\dots \end{aligned} \qquad /6/$$

Як бачимо, у схемі /6/ при порядку збіжності $2t+1$ необхідно лише два рази будувати матрицю Гессе $f''(x_k)$, $f''(y_k)$ та провести її LU - розклад [5]. Це основні обчислення. Обсяг інших обчислень незначний.

Список літератури: I. Б а р т и ш М.Я. О методах типа Ньютона-Канторовича. - Львов, 1973. - 23 с. - Рукопись. деп. в ВИНИТИ, № 5653-73 Деп. 2. Б а р т и ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.Н. Итерационные формулы, получаемые с помощью рекурсии.-В кн.: Мат. сб. К.: Наук. думка, 1976, с. 50-53. 3. В а с и л ь е в Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач.-М.: Наука, 1980. - 520 с. 4. П ш е н и ч н ы й Б.Н., Д а н и л и н Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах.-М.: Наука, 1975. - 320 с. 5. Ф о р с а й т Дж., М о л е р К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.-М.: Мир, 1969. - 168 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.04.84