УДК 519.21

І.Д.Квіт

ІНФОРМАТИВНІСТЬ ВИБІРКИ

Інформативність повної вибірки. Нехай $x_{(1)},\dots,x_{(i)},\dots,x_{(n)}$ варіаційний ряд випадкової вибірки з абсолютно неперервної генеральної сукупності, що має функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ Тоді медіанна емпірична функція розподілу в точках варіаційного ряду вибірки обчислюється за формулою [2]

$$F_n(x_{(i)})=\frac{i-0{,}3}{n+0{,}4},\ (i=1,\dots,n;\ n=2,3,\dots).$$

З ростом обсягу вибірки за теоремою Глівенка [1] емпірична функція розподілу майже вірогідно збігається до функції розподілу генеральної сукупності. Отже, у вибірці закладена інформація про генеральну сукупність. Яка інформативність вибірки?

Інформативністю I_n повної вибірки обсягу n назвемо приріст медіанної емпіричної функції розподілу на розмаху вибірки

$$I_n=F_n(x_{(n)})-F_n(x_{(1)})=\frac{n-1}{n+0{,}4},\ (n=2,3,\dots). \qquad /1/$$

З формули /1/ випливає, що інформативність повної вибірки при збільшенні обсягу монотонно зростає до одиниці. Це добре ілюструють такі дані:

n	I_n	n	I_n	n	I_n	n	I_n
2	0,4166	12	0,8870	30	0,9539	120	0,9883
3	0,5882	13	0,8955	35	0,9604	140	0,9900
4	0,6818	14	0,9027	40	0,9653	160	0,9912
5	0,7407	15	0,9090	45	0,9691	180	0,9922
6	0,7812	16	0,9146	50	0,9722	200	0,9930
7	0,8108	17	0,9195	60	0,9768	500	0,9972
8	0,8333	18	0,9239	70	0,9801	1000	0,9986
9	0,8510	19	0,9278	80	0,9825	2000	0,99930
10	0,8653	20	0,9313	90	0,9845	5000	0,99972
11	0,8771	25	0,9448	100	0,9860	10000	0,99986

Оскільки в формулі $I_n=\frac{n-1}{n+0{,}4}$ явно не фігурує абсолютна неперервність генеральної сукупності, то її також можна використати для обчислення інформативності випадкової вибірки з дискретної популяції.

Із формули /1/ при заданій інформативності можна визначити обсяг вибірки

$$n = \left\{ \frac{1+0{,}4 I_n}{1-I_n} \right\}, \quad 0 < I_n < 1 , \qquad /2/$$

де фігурна дужка позначає заокруглення до найближчого більшого цілого. Наприклад:

I_n	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999	0,9999	0,99999
n	7	14	28	70	140	1400	14000	140000

Інформативність зрізаної вибірки. Нехай дано напрацювання n однотипних технічних виробів до відмови F або зупинки S. Позначимо через $t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_k$ моменти відмов, $2 \leq k < n$. Тоді медіанна емпірична функція розподілу в точках t_i обчислюється за формулою [2]

$$F_n(t_i) = \frac{\bar{i} - 0{,}3}{n+0{,}4}, \; (i = 1, \ldots, k; \; 2 \leq k < n; \; n = 3, 4, \ldots),$$

де $\bar{i}$ – сподіваний ранг i-ї відмови. Інформативністю зрізаної вибірки назвемо приріст медіанної емпіричної функції розподілу на розмаху відмов

$$I_{n,k}(\cdot) = F_n(t_k) - F_n(t_1) = \frac{\bar{k} - \bar{1}}{n+0{,}4}, \; (2 \leq k < n; \; n = 3, 4, \ldots), \qquad /3/$$

де $(\cdot)$ позначає конкретну конфігурацію F і S. Наприклад,

$$I_{3,2}(FSF) = \frac{2{,}5-1}{3{,}4} = 0{,}442; \; I_{3,2}(SFF) = \frac{2{,}66-1{,}33}{3{,}4} = 0{,}391; \; I_{3,2}(FFS) = \frac{2-1}{3{,}4} = 0{,}294.$$

Відношення /3/ до /1/ назвемо відносною інформативністю зрізаної вибірки

$$\frac{I_{n,k}(\cdot)}{I_n} = \frac{\bar{k} - \bar{1}}{n-1}, \; (2 \leq k < n; \; n = 3, 4, \ldots). \qquad /4/$$

Інформативність згрупованої вибірки. Нехай напрацювання n однотипних пристроїв спостерігалися до згрупованих $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_k + s_{k+1}$ зупинок і $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ відмов, $s + f = n$. При конфігурації спершу s_1 зупинок, потім f_1 відмов, згодом s_2 зупинок, далі f_2 відмов і т.д., врешті f_k відмов і s_{k+1} зупинок, інформативність вибірки дорівнює

$$I_{n,s,f}(\cdot) = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \Delta s_i - 0{,}3}{n+0{,}4} - \frac{f_1 \Delta s_1 - 0{,}3}{n+0{,}4} = \frac{\sum_{i=2}^{k} f_i \Delta s_i}{n+0{,}4}, \qquad /5/$$

де $\Delta \delta_i$ – приріст середнього рангу відмов на i -й множині відмов [2]. Наприклад, при конфігурації $\delta_1 = 15$, $f_1 = 25$, $\delta_2 = 9$, $f_2 = 15$, $\delta_3 = 4$, $f_3 = 9$, $\delta_4 = 3$, $f_4 = 7$, $\delta_5 = 13$ інформативність вибірки

$$I_{100,44,56} = \frac{15 \cdot 1,377683 + 9 \cdot 1,544675 + 7 \cdot 1,765343}{100 + 0,4} = 0,467378.$$

Відношення /5/ до /1/ утворює відносну інформативність згрупованої вибірки.

Список літератури: 1. Гливенко В.І. Теорія імовірностей. – К.; Х., Рад. шк., 1938. – 148 с. 2. Квіт І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності". Львів, 1982. – 24 с.

Стаття надійшла до редколегії 28.06.84

УДК 519.21

І.Д.Квіт

МНОЖНИКИ ВІДБИТТЯ

Нехай система S розщеплюється на незалежні підсистеми $S_1, S_2, \ldots$. Дія підсистеми S_1 підсилюється дією підсистеми S_2 і т.д. Визначити дію системи S. Обернена задача: дія системи S відома, знайти дії підсистем, якщо такі є. Обидві задачі багатозначні. Тому розглянемо одне їх уточнення.

Нехай підсистема S_1 описується додатною випадковою змінною ξ_1 з функцією розподілу $F_1(t)$, підсистема S_2 – змінною ξ_2 з функцією розподілу $F_2(t)$ і т.д. Визначити функцію розподілу $F(t)$ випадкової змінної $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots$. Задача однозначно розв"язується. Наприклад, для системи з двох підсистем

$$F(t) = \int_0^\infty F_1\left(\frac{t}{\tau}\right) dF_2(\tau), \quad t > 0.$$

Для розв"язування оберненої задачі припустимо, що функція розподілу $F(t)$ додатної випадкової змінної ξ, яка описує систему S, має відбиття

$$\varphi(z) = \int_0^\infty t^{z-1} dF(t), \quad 1-\alpha < Re\, z < 1+\beta, \ (\alpha > 0, \beta > 0). \qquad /1/$$

У праці [1] доведено, що відбиття дає змогу однозначно відновити функцію розподілу. Таким чином, відбиття /1/ повністю