ДК 621.3

О.П.Гнатишин

ОПТИМАЛЬНА ТАКТИКА ПОПЕРЕДЖУВАЛЬНОЇ ЗАМІНИ ПРИ ВЕЙБУЛІВСЬКІМ НАПРАЦЮВАННІ

Нехай напрацювання збірної одиниці до відмови τ має функцію розподілу Вейбула

$$P(\tau\leq t)=F(t)=1-e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}},\ t\geq 0,\ (a>0,\ b>0). \qquad /1/$$

Збірна одиниця замінюється еквівалентною при відмові або в фіксований момент часу T залежно від того, що швидше відбудеться. Нехай напрацювання i -ї збірної одиниці дорівнює x_i, де $x_i=\min(t_i, T)$; t_i – напрацювання до відмови.

Позначимо через c_1 – вартість заміни збірної одиниці, що відмовила, а через c_2 – вартість заміни збірної одиниці, що не відмовила. Вартість утримання i -ї збірної одиниці вважатимемо пропорційною до x_i^{α}, $\alpha>0$ з коефіцієнтом пропорційності c_3, $c_3>0$.

У праці [1] доведено, що коли функція розподілу напрацювання до відмови $F(t)$ абсолютно неперервна, то існує оптимальна тактика заміни збірної одиниці. На основі праці [3] для випадку розподілу /1/ оптимальне значення T повинно бути розв"язком рівняння

$$\left[(c_1-c_2)\frac{bT^{b-1}}{a^b}+\alpha c_3T^{\alpha-1}\right]\int_0^T e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}dt-(c_1-c_2)\left[1-e^{-\left(\frac{T}{a}\right)^b}\right]-$$

$$-c_3\left\{T^{\alpha}e^{-\left(\frac{T}{a}\right)^b}+\int_0^T\frac{bt^{\alpha+b-1}}{a^b}e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}dt\right\}=c_2. \qquad /2/$$

При $\alpha>1$ рівняння /2/ має скінченний розв"язок, оскільки при $T\to\infty$ ліва сторона рівняння прямує до нескінченності, а при $T\to 0$ – ліва сторона рівняння прямує до нуля. При $0<\alpha<1$ дістаємо $T=\infty$.

Два інтеграли у рівнянні /2/ зведемо до неповної гама-функції. Маємо

$$\int_0^T e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}dt=\frac{a}{b}\int_0^{\left(\frac{T}{a}\right)^b}e^{-\tau}\tau^{\frac{1}{b}-1}d\tau=a\Gamma\left(\frac{1}{b}+1\right)\left\{1-Q\left(\chi^2=2\left(\frac{T}{a}\right)^b/\nu=\frac{2}{b}\right)\right\}, \qquad /3/$$

де
$$Q(\chi^2/\nu)=\frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_{\chi^2}^{\infty}t^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}dt;\quad 0<\chi^2<\infty\ — \qquad /4/$$

табульована функція [2]. Аналогічно

$$\frac{b}{a^b}\int_0^T e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b} t^{\alpha+b-1}\,dt = a^\alpha \int_0^{\left(\frac{T}{a}\right)^b} e^{-\tau}\tau^{\frac{\alpha}{b}}\,d\tau = a^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{b}+1\right)\left\{1-Q\left(\chi^2=2\left(\frac{T}{a}\right)^b / \nu=2\left(\frac{\alpha}{b}+1\right)\right)\right\}. \quad /5/$$

З допомогою /3/–/5/ вираз /2/ набуде вигляду

$$\left[(c_1-c_2)\frac{bT^{b-1}}{a^b}+\alpha c_3 T^{\alpha-1}\right] a\Gamma\left(\frac{1}{b}+1\right)\left\{1-Q\left(\chi^2=2\left(\frac{T}{a}\right)^b / \nu=\frac{2}{b}\right)\right\}+ \quad /6/$$

$$+(c_1-c_2-c_3T^\alpha)e^{-\left(\frac{T}{a}\right)^b}-c_3a^\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{b}+1\right)\left\{1-Q\left(\chi^2=2\left(\frac{T}{a}\right)^b / \nu=2\left(\frac{\alpha}{b}+1\right)\right)\right\}=c_1.$$

Рівняння /6/ розв"язуємо методом проб.

Для розв"язування /2/ на ЕОМ зводимо його до вигляду

$$T^{\alpha-1}=\frac{c_1+c_3\frac{b}{a^b}\int_0^T t^{\alpha+b-1}e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}dt-(c_1-c_2-c_3T^\alpha)e^{-\left(\frac{T}{a}\right)^b}}{\int_0^T e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}dt\left((c_1-c_2)\frac{b}{a^b}T^{b-\alpha}+\alpha c_3\right)}. \quad /7/$$

Рівняння /7/ розв"язуємо методом простої ітерації. При цьому інтеграли /3/ та /5/ обчислюємо методом Сімпсона.

На основі числових експериментів з допомогою ЕОМ виявлено, що при сталих c_1, c_2 і c_3 з ростом параметра форми b оптимальне T зменшується. Це видно з таких даних / c_1 = 12, c_2 = 7; c_3 = 1,49; a = 1,6400; α = 2/:

b	0,4	0,8	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
T	3,7866	3,1487	2,7717	1,9613	1,5467	1,3712	1,2933	1,2572

Приклад. Нехай напрацювання збірної одиниці 40-0-04-0 підпорядковане розподілу Вейбула з параметрами a = 1,6400 та b = 2,0518. Вартість заміни збірної одиниці, що відмовила, дорівнює c_1 = 12 крб, вартість заміни збірної одиниці, що не відмовила, c_2 = 7 крб., вартість утримання збірної одиниці 1,49 · x^2 крб.; c_3 = 1,49. Визначити оптимальну тактику T заміни збірної одиниці.

Методом простої ітерації з рівняння /7/ знаходимо T = 1,5209.

Список літератури: 1. Б а р л о у Р., П р о ш а н Ф. Математическая теория надежности. – М.: Сов. радио, 1969. – С. 488. 2. Б о л ь ш е в Л.Н., С м и р н о в Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с. 3. Technometrics, 1971, vol.13, N1, p.139-144.

Стаття надійшла до редколегії 28.02.84