УДК 518:517.948

Л.Л.Роман

ПРО РОЗВ"ЯЗОК ОДНОМІРНИХ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Розв"язок одномірних геометрично нелінійних задач термопружності у випадку нелінійних граничних умов апроксимацією нелінійних граничних умов зводиться до послідовності розв"язку крайових задач з лінійними граничними умовами. Одержані при цьому крайові задачі розв"язують методом Ньютона-Канторовича [4].

Розглядається ізотропна смуга товщини $\ell\,(0 \le x \le \ell)$ з матеріалу з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_t(t)$, який залежить від температури $t(x)$. Температура навколишнього середовища по різні сторони шару допускається відомою t_f^+, t_f^-. Вихідні рівняння термопружності для досліджуваної смуги містять рівняння теплопровідності [3]

$$\lambda_t(t)\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{d\lambda_t(t)}{dt}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \omega_t = 0 \qquad /1/$$

і рівняння рівноваги відносно переміщення $u(x)$ [1]

$$\left\{E(t)\left(1+\frac{\nu}{1-2\nu}\right)\left[\frac{du}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]-\frac{1+\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon(t)\right\}\frac{d^2u}{dx^2}+$$

$$+\left(1+\frac{du}{dx}\right)\left\{\left(1+\frac{\nu}{1-2\nu}\right)\left[\frac{du}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]\frac{dE}{dt}+E(t)\left(1+\frac{\nu}{1-2\nu}\right)\times\right. \qquad /2/$$

$$\left.\times\left[\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}\right]+\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha(t)\frac{dt}{dx}\right\}+\rho F = 0,$$

де ν – коефіцієнт Пуассона; $E(t)$, $\alpha(t)$ – залежні від температури модуль пружності та коефіцієнт лінійного температурного розширення; $\varepsilon_t = \int_{t_0}^{t}\alpha(\xi)\,d\xi$ – чисто теплова деформація; ρ – густина; ω_t – густина внутрішніх джерел тепла.

Визначимо температурні напруження та переміщення, що виникають у смузі для граничних умов

$$\left\{\lambda_t(t)\frac{dt}{dx}+\frac{c_n}{10^8}\left[t^4-(t_f^-)^4\right]\right\}\Big|_{x=0}=0,$$

$$\left\{\lambda_t(t)\frac{dt}{dx}+\frac{c_n}{10^8}\left[t^4-(t_f^+)^4\right]\right\}\Big|_{x=\ell}=0,$$

$$\left\{\left\{E(t)\left(1+\frac{\nu}{1-2\nu}\right)\left[\frac{du}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]-\frac{1+\nu}{1-2\nu}\varepsilon(t)\right\}\left(1+\frac{du}{dx}\right)-P_1\right\}\Big|_{\substack{x=0\\x=\ell}}=0, \qquad /3/$$

де C_n – зведений коефіцієнт випромінювання; ρ_1 – параметр силового впливу.

Використовуючи заміну

$$z_1 = t(x),\ z_2 = \frac{dt}{dx},\ z_3 = u(x),\ z_4 = \frac{du}{dx}, \tag{4}$$

розв"язок задачі /I/–/3/ зведемо до розв"язку крайової задачі вигляду

$$\frac{dz}{dx^*} = f(x^*, z), \tag{5}$$

$$g(z_0, z_1) = d, \tag{6}$$

при

$$f(x^*,z) = \begin{pmatrix} z_2(x^*) \\ -\left[\omega_{z_1} + \frac{d\lambda_{z_1}}{dz_1} z_2^2(x^*)\right] / \lambda_{z_1} \\ z_3(x^*) \\ \left\{A_1[1+z_4(x^*)]\cdot[z_4(x^*)+z_4^2(x^*)]\frac{dE}{dz_2} + A_2\alpha(z_1)z_2(x^*) + \right. \\ \left. +\rho F\right\} / \left\{A_1 E(z_1) z_4^2(x^*) - A_2\varepsilon(z_1) + A_1 E(z_1)\left[1+z_4(x^*)\right]\left[1+2z_4(x^*)\right]\right\} \end{pmatrix};$$

$$d = \begin{pmatrix} -\frac{c_n}{10^8}\left(t_f^-\right)^4 \\ -\frac{c_n}{10^8}\left(t_f^+\right)^4 \\ \rho_{10} \\ \rho_{11} \end{pmatrix},$$

$$g(z_0,z_1)=\begin{bmatrix} -\lambda_{z_1}(z_{10})z_{20}-\frac{c_n}{10^8}\ z_{10}^{\ 4} \\ -\lambda_{z_1}(z_{11})z_{21}-\frac{c_n}{10^8}\ z_{11}^4 \\ A_1E(z_{10})z_{40}^3+A_1[E(z_{10})+\varepsilon(z_{10})]\cdot z_{40}^2+[A_1E(z_{10})- \\ -A_2\varepsilon(z_{10})]\cdot z_{40}-A_2\varepsilon(z_{10}) \\ A_1E(z_{11})z_{41}^3+A_1[E(z_{11})+\varepsilon(z_{11})]z_{41}^2+[A_1E(z_{11})-A_2\varepsilon(z_{11})]z_{40}-A_2\varepsilon(z_{11}) \end{bmatrix},$$

де

$$A_1=1+\frac{\nu}{1-2\nu};\ A_2=\frac{1+\nu}{1-2\nu};\ x^*=\frac{x}{\ell};\ z=(z_1,z_2,z_3,z_4);\ z_0=z(0);\ z_1=z(1).$$

Лінеаризуючи граничні умови /6/ за формулою Лагранжа, одержуємо послідовність крайових задач

$$\frac{dz^{(\kappa+1)}}{dx^*}=f(x^*,z^{(\kappa+1)}), \qquad /7/$$

$$\Gamma_0^{(\kappa)}(z_0^{(\kappa+1)}-z_0^{(\kappa)})+\Gamma_1^{(\kappa)}(z_1^{(\kappa+1)}-z_1^{(\kappa)})=d-g(z_0^{(\kappa)},\ z_1^{(\kappa)}), \qquad /8/$$

$\kappa=0,1,\ldots,$

де $\Gamma_0=\Gamma_0(z_0,z_1)$, $\Gamma_1=\Gamma_1(z_0,z_1)$ – матриці Якобі векторфункції $g(z_0,z_1)$ по z_0 , z_1 відповідно.

Після виконання відповідних перетворень система /8/ набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} &B_{10}^{(\kappa)}\cdot z_{10}^{(\kappa+1)}+B_{20}^{(\kappa)}\cdot z_{20}^{(\kappa+1)}=C_{10}^{(\kappa)}, \\ &B_{11}^{(\kappa)}\cdot z_{11}^{(\kappa+1)}+B_{21}^{(\kappa)}\cdot z_{21}^{(\kappa+1)}=C_{11}^{(\kappa)}, \\ &B_{30}^{(\kappa)}\cdot z_{10}^{(\kappa+1)}+B_{40}^{(\kappa)}\cdot z_{40}^{(\kappa+1)}=C_{20}^{(\kappa)}, \\ &B_{31}^{(\kappa)}\cdot z_{11}^{(\kappa+1)}+B_{41}^{(\kappa)}\cdot z_{41}^{(\kappa+1)}=C_{21}^{(\kappa)}, \end{aligned} \qquad /9/$$

де

$$B_{1i}^{(\kappa)}=-4\frac{c_n}{10^8}\left[z_{1i}^{(\kappa)}\right]^3-\frac{d\lambda(z_{1i}^{(\kappa)})}{dz_{1i}^{(\kappa)}}\cdot z_{2i}^{(\kappa)};$$

$$B_{2i}^{(\kappa)} = -\lambda_{z_1}(z_{1i}^{(\kappa)});$$

$$B_{3i}^{(\kappa)} = A_1 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}}[z_{4i}^{(\kappa)}]^3 + A_1\left[\frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} + \frac{d\varepsilon}{dz_{1i}^{(\kappa)}}\right] \times [z_{4i}^{(\kappa)}]^2 +$$

$$+\left[A_1 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} - A_2 \frac{d\varepsilon}{dz_{1i}^{(\kappa)}}\right] \cdot z_{4i}^{(\kappa)} - A_2 \frac{d\varepsilon}{dz_{1i}^{(\kappa)}};$$

$$B_{4i}^{(\kappa)} = 3A_1E(z_{1i}^{(\kappa)})[z_{4i}^{(\kappa)}]^2 + 2A_1[E(z_{1i}^{(\kappa)}) + \varepsilon(z_{1i}^{(\kappa)})] \cdot z_{4i}^{(\kappa)} + A_1E(z_{1i}^{(\kappa)}) - A_2\varepsilon(z_{1i}^{(\kappa)});$$

$$C_{1i}^{(\kappa)} = -\frac{c_n}{10^8}(t_{fi})^4 - 3\frac{c_n}{10^8}[z_{1i}^{(\kappa)}]^4 - \frac{d\lambda_{z_1}}{dz_{1i}^{(\kappa)}} \cdot z_{2i}^{(\kappa)} \cdot z_{1i}^{(\kappa)};$$

$$C_{2i}^{(\kappa)} = p_{1i} + 2A_1E(z_{1i}^{(\kappa)}) \cdot [z_{4i}^{(\kappa)}]^3 + A_1[E(z_{1i}^{(\kappa)}) + \varepsilon(z_{1i}^{(\kappa)})][z_{4i}^{(\kappa)}]^2 - A_2\varepsilon(z_{1i}^{(\kappa)}) +$$

$$+ A_1 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}}[z_{4i}^{(\kappa)}]^3 \cdot z_{1i}^{(\kappa)} + A_1\left[\frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} + \frac{d\varepsilon}{dz_{1i}^{(\kappa)}}\right][z_{4i}^{(\kappa)}]^2 \cdot z_{1i}^{(\kappa)} +$$

$$+\left[A_1 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} - A_2 \frac{d\varepsilon}{dz_{1i}^{(\kappa)}}\right] z_{4i}^{(\kappa)} \cdot z_{1i}^{(\kappa)} - A_2 \frac{d\varepsilon}{dz_{1i}^{(\kappa)}} \cdot z_{1i}^{(\kappa)};$$

$$t_{f0} = t_f^-; \quad t_{f1} = t_f^+;$$
$$i = 0,1; \quad \kappa = 0,1,\ldots$$

Таким чином, крайова задача /5/, /6/ звелась до послідовності крайових задач /7/, /9/. Для кожного κ розв"язок крайової задачі /7/, /9/ еквівалентний розв"язку системи рівнянь

$$B_{11}^{(\kappa)} z_{11}^{(\kappa+1)} + B_{21}^{(\kappa)} z_{21}^{(\kappa+1)} = C_{11}^{(\kappa)},$$

$$B_{31}^{(\kappa)} \cdot z_{11}^{(\kappa+1)} + B_{41}^{(\kappa)} z_{41}^{(\kappa+1)} = C_{21}^{(\kappa)} \qquad /10/$$

відносно невідомих $z_{30}^{(\kappa+1)}$, $z_{40}^{(\kappa+1)}$ і задачі Коші для системи диференціальних рівнянь /7/ з початковими умовами

$$z_1^{(\kappa+1)}(0) = \frac{1}{B_{20}^{(\kappa)}}[C_{20}^{(\kappa)} - B_{40}^{(\kappa)} z_{40}^{*}],$$

$$z_2^{(\kappa+1)}(0)=\frac{1}{B_{20}^{(\kappa)}B_{30}^{(\kappa)}}\left[C_{10}^{(\kappa)}B_{30}^{(\kappa)}-B_{10}^{(\kappa)}C_{20}^{(\kappa)}+B_{10}^{(\kappa)}B_{40}^{(\kappa)}\; z_{40}^{*}\right],$$

$$z_3^{(\kappa+1)}(0)=z_{30}^{*},$$

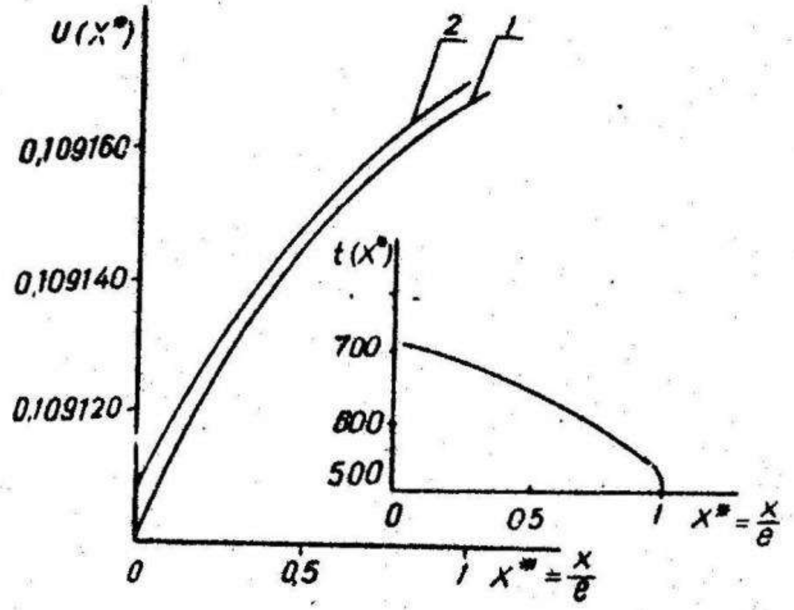
$$z_4^{(\kappa+1)}(0)=z_{40}^{*},$$

де z_{30}^{*}, z_{40}^{*} – розв"язок системи рівнянь /I0/.

Розв"язок системи /I0/, враховуючи алгоритм УІ побудови, знаходимо різницевим аналогом методу Ньютона-Канторовича. За початкове наближення для $(\kappa+1)$ -Ї задачі вибираємо розв"язок задачі /7/, /9/, одержаний для κ -Ї задачі з деякою точністю ε_κ, що вибирається з умови мінімуму затраченої кількості обчислень.

Числові дослідження проводили при таких параметрах: $\omega_t = 0$, $p_1 = 10$, $C_n = 10$, $\rho F = 50$, $t_f^{+} = 25$, $t_f^{-} = 700$. Залежність $\lambda_t(t)$ згідно з експериментальними даними [2] для сталі марки IXI8H9T мала вигляд

$$\lambda_t(t)=0{,}972\cdot 10^{-5}t^2+\text{[illegible]}{,}87\cdot 10^{-4}t+18{,}9945.$$



Температурні залежності функцій $E(t)$, $\alpha(t)$ вибирали лінійними

$$E(t)=1-0{,}25\cdot 10^{-4}t,$$

$$\alpha(t)=1+0{,}47\cdot 10^{-4}t$$

і квадратичними

$$E(t)=1+0,7\cdot10^{-4}t-0,1\cdot10^{-8}t^2,$$
$$\alpha(t)=1-0,5\cdot10^{-4}t+0,1\cdot10^{-8}t^2.$$

На рисунку показано розподіл температури t по товщині шару та зміну переміщення u по координаті $x^*=\frac{x}{l}$ /крива I відповідає лінійній залежності функцій $E(t)$, $\alpha(t)$, крива 2 – квадратичній/.

Список літератури: I. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высш. шк., 1976. – 271 с. 2. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с. 3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с. 4. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. – К.: Наук. думка, 1966. – 242 с.

Стаття надійшла до редколегії 28.06.84

УДК 518:517.948

С.М.Кічура, Б.А.Остудін

РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ У ВИПАДКУ ЧАСТКОВО НЕОБМЕЖЕНИХ ПОВЕРХОНЬ

У праці [4] розглянута зовнішня задача Діріхле для рівняння Лапласа в R^2 у випадку частково необмежених границь, а в [2] – просторова задача електростатики. Модифіковані функції Гріна ми використаємо для розрахунку осесиметричного електростатичного поля.

Нехай у тривимірному евклідовому просторі R^3 на одній осі (OY) задані нескінченна кругова мембрана S_1, перпендикулярна OY, і циліндр S_2 з круговим отвором на одній з основ. Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля, утвореного нерухомими в просторі та незмінними в часі електростатичними зарядами, розміщеними на поверхнях S_1 і S_2. Потрібно знайти електростатичне поле $U(M)$ у довільній точці простору, якщо на поверхнях виконується гранична умова першого роду.

Задача зводиться до розв"язування зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\Delta U=0, \qquad /1/$$

$$U|_{S_1}=f_1, \qquad /2/$$