і квадратичними

$$E(t)=1+0{,}7\cdot10^{-4}t-0{,}1\cdot10^{-8}t^2,$$
$$\alpha(t)=1-0{,}5\cdot10^{-4}t+0{,}1\cdot10^{-8}t^2.$$

На рисунку показано розподіл температури t по товщині шару та зміну переміщення u по координаті $x^*=\frac{x}{l}$ /крива I відповідає лінійній залежності функцій $E(t)$, $\alpha(t)$, крива 2 – квадратичній/.

Список літератури: І. А м е н з а д е Ю.А. Теория упругости. – М.: Высш. шк., 1976. – 271 с. 2. Б е з у х о в Н.И., Б а ж а н о в В.Л., Г о л ь д е б л а т И.И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с. 3. К а р с л о у Г., Е г е р Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с. 4. Ш а м а н с к и й В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. – К.: Наук. думка, 1966. – 242 с.

Стаття надійшла до редколегії 28.06.84

УДК 518:517.948

С.М.Кічура, Б.А.Остудін

РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ У ВИПАДКУ ЧАСТКОВО НЕОБМЕЖЕНИХ ПОВЕРХОНЬ

У праці [4] розглянута зовнішня задача Діріхле для рівняння Лапласа в R^2 у випадку частково необмежених границь, а в [2] – просторова задача електростатики. Модифіковані функції Гріна ми використаємо для розрахунку осесиметричного електростатичного поля.

Нехай у тривимірному евклідовому просторі R^3 на одній осі (OY) задані нескінченна кругова мембрана S_1, перпендикулярна OY, і циліндр S_2 з круговим отвором на одній з основ. Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля, утвореного нерухомими в просторі та незмінними в часі електростатичними зарядами, розміщеними на поверхнях S_1 і S_2. Потрібно знайти електростатичне поле $U(M)$ у довільній точці простору, якщо на поверхнях виконується гранична умова першого роду.

Задача зводиться до розв"язування зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\Delta U=0, \qquad /1/$$

$$U|_{S_1}=f_1, \qquad /2/$$

$$U|_{S_2} = f_2 \,, \qquad /3/$$

$$U(\infty) = 0 \,. \qquad /4/$$

Розв"язок /I/-/4/ представимо у вигляді $U = U_1 + U_2$,
.е U_1 - розв"язок задачі:

$$\Delta U_1 = 0 \,, \qquad /5/$$

$$U_1|_{S_1} = f_1 \,, \qquad /6/$$

$$U_1(\infty) = 0 \,, \qquad /7/$$

а U_2 - розв"язок задачі:

$$\Delta U_2 = 0 \,, \qquad /8/$$

$$U_2|_{S_1} = 0 \,, \qquad /9/$$

$$U_2|_{S_2} = f_2 - U_1|_{S_2} = f_3 \,, \qquad /10/$$

$$U_2(\infty) = 0 \,. \qquad /11/$$

Для граничної задачі /5/-/7/ характерний аналітичний розв"язок [5]:

$$U_1(M) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{S_1} \frac{y_0^3}{R_{MP}^3} f_1(P)\, dS_p \,,$$

причому точка M має координати (x_0, y_0, z_0) , а точка P - (x, y, z) .

Функція U_2 , яка є розв"язком граничної задачі /8/-/II/, можна зобразити [3] у вигляді потенціалу простого шару:

$$U_2(M) = \iint\limits_{S_2} \varphi(P) \cdot G(M, P)\, dS_p \,, \quad M \in S_2 \,, \qquad /12/$$

де $\varphi(P)$ - невідома густина розподілу зарядів по поверхні S_2 ; $G(M,P)$ - функція Гріна для півпростору.

Враховуючи граничну умову /I0/, для визначення густини записуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду:

$$\iint\limits_{S_2} \varphi(P) G(M,P)\, dS_p = f_3 \,, \quad M \in S_2 \,.$$

Введемо циліндричну систему координат (r, y, φ) :
$x = r\cos\varphi$, $y = y$, $z = r\sin\varphi$.

У кожній півплощині $\varphi = \text{const}$ поверхня S_2 представляється рівнянням $R = R(\xi)$, $y_1 \le \xi \le y_2$, причому $R(\xi)$ – кусково-гладка функція. Враховуючи

$$G(M,P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} - \frac{1}{4\pi R_{MP_1}} ,$$

/точка P_1 симетрична P по відношенню до мембрани/, а також осьову симетрію поля, формула /I2/ набуває вигляду:

$$U_2^*(r,y) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_2}\varphi^*(R,\xi)\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta+(y-\xi)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta+(y+\xi)^2}}\right] dS , \qquad /I3/$$

де (r, y) – координати довільної точки поза поверхнею S_2 ; (R, ξ) – координати довільної точки на поверхні S_2 .

Перейдемо у першому інтегралі /I3/ до повторного, враховуючи, що $dS = R\,dR\,d\theta$:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_2}\varphi^*(R,\xi)\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta+(y-\xi)^2}}\,dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{y_1}^{y_2}\varphi^*(R,\xi)\cdot R\,dR\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta+(y-\xi)^2}} .$$

У внутрішньому інтегралі виконаємо заміну змінних $\theta = \pi + 2\alpha$:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta+(y-\xi)^2}} = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cos 2\alpha+(y-\xi)^2}} =$$

$$=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{R^2+r^2+2Rr-4Rr\sin^2\alpha+(y-\xi)^2}}=4\int_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{(R+r)^2+(y-\xi)^2-4Rr\sin^2\alpha}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(R+r)^2+(y-\xi)^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}=\frac{4K(k)}{\sqrt{(R+r)^2+(y-\xi)^2}}\ .$$

Перетворивши аналогічним чином другий інтеграл у формулі /13/ і позначивши $4R\varphi^*$ через $q(\xi)$, дістаємо

$$U_2^*(r,y)=\frac{1}{4\pi}\int_{y_1}^{y_2}q(\xi)\left[\frac{1}{\sqrt{(R+r)^2+(y-\xi)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(R+r)^2+(y+\xi)^2}}\right]K(k)d\xi\ . \qquad /14/$$

Причому $k^2=4Rr\left[(R+r)^2+(y-\xi)^2\right]^{-1}$, а $K(k)$ – еліптичний інтеграл першого роду, для якого застосовується апроксимація [1] :

$$K(k)=\sum_{i=0}^{4}a_i\eta^i-\ln\eta\sum_{i=0}^{4}b_i\eta^i\ ,$$

де

$$\eta=1-k^2=\frac{(R-r)^2+(y-\xi)^2}{(R+r)^2+(y-\xi)^2}\ ,\ 0<\eta<1\ ;$$

a_i , b_i – відомі коефіцієнти.

Для знаходження густини $q(\xi)$ маємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\frac{1}{4\pi}\int_{y_1}^{y_2}q(\xi)\left[\frac{1}{\sqrt{(R+r)^2+(y-\xi)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(R+r)^2+(y+\xi)^2}}\right]K(k)d\xi=U_2^*(r,y)\Big|_{S_2}. \qquad /15/$$

Знайшовши густину $q(\xi)$ із /15/, потенціал шукаємо по формулі /14/.

Список літератури: 1. Дымарский Я.С., Лозинский Н.Н., Макушкин А.Т. Справочник программиста. – Л.: Судпромгиз, 1963. – 628 с. 2. Кичура С.М., Остудин Б.А. Модифицированные функции Грина в пространственных задачах электростатики. – Львов, 1984. – 18 с. – Рукопись деп. в УкрНИИНТИ,

№ 2097Ук-84Деп. 3. Людкевич И.В., Гордийчук В.И., Бакалец В.А. и др. Численное решение пространственных задач теории потенциала. - Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1979. - 116 с. 4. Остудин Б.А., Кичура С.М. Использование модифицированных функций Грина при решении внешних задач для частично неограниченных областей. - Львов, 1984. - 14 с. - Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 919Ук-84Деп. 5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 736 с.

Стаття надійшла до редколегії 23.05.85

УДК 518.517

О.В.Жук, Б.А.Остудін, Р.М.Пасічник

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОРОЗВІДКИ МЕТОДОМ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Один з ефективних методів пошуку рудних родовищ - це індуктивна електророзвідка, зокрема метод перехідних процесів, де засобом дослідження геоелектричного розрізу є перехідна характеристика вторинного електромагнітного поля.

Відомо, що криві перехідного процесу від тіл ізомірної форми досить добре апроксимуються нескінченною сумою затухаючих експонент. Це дає змогу характерним параметром процесу вибирати коефіцієнт затухання експонент α, за яким з допомогою відомих методів [3] визначають параметри рудного тіла.

Запишемо сигнал перехідного процесу від провідників ізомірної форми в непровідному середовищі:

$$u(t)=x(\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\alpha t(k\pi)^2\right] \equiv x(\alpha)K(t,\alpha), \qquad /1/$$

де t - час; α - параметр форми кривої, що характеризує швидкість затухання перехідної характеристики.

У випадку, коли в досліджуваному районі знаходиться декілька зон, аномальних за провідністю, або, наприклад, декілька ізомірних провідних тіл, то при відсутності їх взаємного впливу сумарний сигнал визначається суперпозицією компонент виду /1/:

$$E(t)=\sum_{i=1}^{m} u_i(t)=\sum_{i=1}^{m} x(\alpha_i)K(t,\alpha_i)$$

або

$$E(t)=\sum_{\alpha} x(\alpha)K(t,\alpha).$$