№ 2097Ук-84Деп. 3. Людкевич И.В., Гордийчук В.И., Бакалец В.А. и др. Численное решение пространственных задач теории потенциала. - Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1979. - 116 с. 4. Остудин Б.А., Кичура С.М. Использование модифицированных функций Грина при решении внешних задач для частично неограниченных областей. - Львов, 1984. - 14 с. - Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 919Ук-84Деп. 5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 736 с.

Стаття надійшла до редколегії 23.05.85

УДК 518.517

О.В.Жук, Б.А.Остудін, Р.М.Пасічник

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОРОЗВІДКИ МЕТОДОМ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Один з ефективних методів пошуку рудних родовищ - це індуктивна електророзвідка, зокрема метод перехідних процесів, де засобом дослідження геоелектричного розрізу є перехідна характеристика вторинного електромагнітного поля.

Відомо, що криві перехідного процесу від тіл ізомірної форми досить добре апроксимуються нескінченною сумою затухаючих експонент. Це дає змогу характерним параметром процесу вибирати коефіцієнт затухання експонент α, за яким з допомогою відомих методів [3] визначають параметри рудного тіла.

Запишемо сигнал перехідного процесу від провідників ізомірної форми в непровідному середовищі:

$$u(t)=x(\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\exp[-\alpha t(k\pi)^2]\equiv x(\alpha)K(t,\alpha), \qquad /1/$$

де t - час; α - параметр форми кривої, що характеризує швидкість затухання перехідної характеристики.

У випадку, коли в досліджуваному районі знаходиться декілька зон, аномальних за провідністю, або, наприклад, декілька ізомірних провідних тіл, то при відсутності їх взаємного впливу сумарний сигнал визначається суперпозицією компонент виду /1/:

$$E(t)=\sum_{i=1}^{m}u_i(t)=\sum_{i=1}^{m}x(\alpha_i)K(t,\alpha_i)$$

або

$$E(t)=\sum_{\alpha}x(\alpha)K(t,\alpha).$$

Якщо перейти від дискретної суми до неперервної, то дістанемо [I, 2]

$$\int_a^b K(t,\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha = E(t), \quad 0 \le t \le T. \qquad /2/$$

Таким чином, побудовано математичну модель, яка записується у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Її можна використати для розв"язування задачі розкладу сумарного перехідного процесу на складові.

Задача /2/ належить до некоректно поставлених [5]. Для розв"язання застосуємо метод регуляризації А.М.Тихонова [5]. Цей метод полягає в тому, що /2/ заміняється близькою до неї варіаційною задачею:

$$\int_0^T \left\{ \int_a^b K(t,\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha - E(t) \right\}^2 dt \; +$$

$$+\gamma \int_a^b \left[p(\alpha)\,x^2(\alpha) + q(\alpha)\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 \right] d\alpha = \min , \qquad /3/$$

де $q(\alpha)$, $p(\alpha) > 0$ – неперервні функції; γ – параметр регуляризації. Задача /3/ коректно поставлена, причому алгоритм /3/ дає змогу отримати розв"язок $x_\gamma(\alpha)$, що при $\gamma \to 0$ рівномірно збігається /якщо він існує/ до розв"язку задачі /2/.

Для мінімізації функціоналу з /3/ використаємо ідеї методу скінченних елементів [4], причому обмежимося квадратичною апроксимацією шуканої функції $x(\alpha)$.

Відрізок $\Omega = [a, b]$ розіб"ємо на N рівних частин /елементів/ $\Omega^l (l = 1, 2, \ldots, N)$. Зафіксуємо середину кожного з підінтервалів Ω^l. Отриману множину точок разом із точками розбиття відрізка Ω позначимо через $\{\alpha_i\}_{i=1}^{2N+1}$, причому $\alpha_i = a + (i-1)\,h_\alpha$, а $h_\alpha = (b-a)/2N$.

Враховуючи розбиття відрізка Ω на елементи, інтеграли в /3/ запишемо таким чином:

$$\int_a^b K(t,\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha = \sum_{k=1}^{N} \int_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k+1}} K(t,\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha , \qquad /4/$$

$$\int\limits_{\Omega} \rho(\alpha) x^2(\alpha)\, d\alpha = \sum_{k} \int\limits_{\Omega^k} \rho(\alpha) x^2(\alpha)\, d\alpha, \qquad /5/$$

$$\int\limits_{\Omega} q(\alpha)[x'(\alpha)]^2 d\alpha = \sum_{k} \int\limits_{\Omega^k} q(\alpha)[x'(\alpha)]^2 d\alpha. \qquad /6/$$

У кожному інтегралі, що входять у праві частини співвідношень /4/–/6/, зробимо заміну змінних:

$$\alpha(\beta) = \varphi_1(\beta)\alpha_{2k-1} + \varphi_2(\beta)\alpha_{2k} + \varphi_3(\beta)\alpha_{2k+1} \; (\beta \in [-1,1]), \qquad /7/$$

де $\varphi_1(\beta) \equiv -\frac{1}{2}\beta(1-\beta), \varphi_2(\beta) \equiv 1-\beta^2, \varphi_3(\beta) \equiv \frac{1}{2}\beta(1+\beta)$.
При цьому очевидно, що

$$d\alpha(\beta) = [\varphi_1'(\beta)\alpha_{2k-1} + \varphi_2'(\beta)\alpha_{2k} + \varphi_3'(\beta)\alpha_{2k+1}]\, d\beta = \sigma_{2k}(\beta)\, d\beta, \qquad /8/$$

де $\varphi_1'(\beta) = \beta - \frac{1}{2}$; $\varphi_2'(\beta) = -2\beta$; $\varphi_3'(\beta) = \beta + \frac{1}{2}$.

Враховуючи заміни /7/, /8/, дістаємо

$$\int\limits_{\Omega^k} K(t,\alpha) x(\alpha)\, d\alpha = \int\limits_{-1}^{1} \sigma_{2k}(\beta) K_{2k}(t,\beta)\, x_{2k}(\beta)\, d\beta, \qquad /9/$$

$$\int\limits_{\Omega^k} \rho(\alpha) x^2(\alpha)\, d\alpha = \int\limits_{-1}^{1} \rho_{2k}(\beta)\sigma_{2k}(\beta)\, x_{2k}^2(\beta)\, d\beta, \qquad /10/$$

$$\int\limits_{\Omega^k} q(\alpha)[x'(\alpha)]^2 d\alpha = \int\limits_{-1}^{1} q_{2k}(\beta)\sigma_{2k}(\beta)[x_{2k}'(\beta)]^2 d\beta, \qquad /11/$$

де

$$\rho_{2k}(\beta) = \rho[\alpha(\beta)]; \quad q_{2k}(\beta) = q[\alpha(\beta)];$$

$$K_{2k}(t,\beta) = K[t,\alpha(\beta)]; \quad x_{2k}(\beta) = x[\alpha(\beta)].$$

Згідно з основною ідеєю методу скінченних елементів шуканий розв"язок запишемо як

$$x_{2\kappa}(\beta)=\sum_{i=1}^{3}\varphi_i(\beta)\,x_{2(\kappa-1)+i}\ , \qquad /12/$$

де $x_{2(\kappa-1)+i}\approx x(\alpha_{2(\kappa-1)+i})$ – параметри, які потрібно визначити. Далі, враховуючи позначення

$$A_{2\kappa,i}(t)=\int_{-1}^{1}\sigma_{2\kappa}(\beta)K_{2\kappa}(t,\beta)\varphi_i(\beta)\,d\beta\ \ (i=1,2,3),$$

на підставі /9/–/12/ одержуємо дискретний аналог функціоналу із /3/:

$$\int_0^T\Big\{\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}A_{2\kappa,i}(t)\,x_{2(\kappa-1)+i}-E(t)\Big\}^2 dt\ +$$

$$+\gamma\sum_{\kappa=1}^{N}\int_{-1}^{1}p_{2\kappa}(\beta)\sigma_{2\kappa}(\beta)\Big[\sum_{i=1}^{3}\varphi_i(\beta)\,x_{2(\kappa-1)+i}\Big]^2 d\beta\ +$$

$$+\gamma\sum_{\kappa=1}^{N}\int_{-1}^{1}q_{2\kappa}(\beta)\sigma_{2\kappa}(\beta)\Big[\sum_{i=1}^{3}\varphi_i'(\beta)\,x_{2(\kappa-1)+i}\Big]^2 d\beta=U. \qquad /13/$$

Очевидно, що U є функцією $2N+1$ змінної $x_1, x_2, \dots, x_{2N+1}$. Необхідна умова екстремуму функції багатьох змінних має вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial x_{2(\ell-1)+j}}=0\ \ (\ell=1,2,\dots,N;\ j=1,2,3). \qquad /14/$$

Співвідношення /14/ дає систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $x_1, x_2, \dots, x_{2N+1}$:

$$\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}B_{2\kappa,2\ell}^{i,j}\,x_{2(\kappa-1)+i}=E_{2\ell}^{i}\ , \qquad /15/$$

де

$$B_{2k,2l}^{i,j} = \begin{cases} A_{2k,2l}^{i,j}, & k \neq l; \\ A_{2l,2l}^{i,j} + \gamma\left(\bar{A}_{2l}^{i,j} + \bar{\bar{A}}_{2l}^{i,j}\right), & k = l, \end{cases}$$

причому

$$A_{2k,2l}^{i,j} = \int_0^T A_{2k,i}(t) \cdot A_{2l,j}(t)\,dt,$$

$$\bar{A}_{2l}^{i,j} = \int_{-1}^{1} p_{2l}(\beta)\sigma_{2l}(\beta)\varphi_i(\beta)\,\varphi_j(\beta)\,d\beta,$$

$$\bar{\bar{A}}_{2l}^{i,j} = \int_{-1}^{1} q_{2l}(\beta)\sigma_{2l}(\beta)\varphi_i'(\beta)\,\varphi_j'(\beta)\,d\beta,$$

$$E_{2l}^{j} = \int_0^T E(t)\,A_{2l,j}(t)\,dt.$$

Описана методика реалізована у вигляді комплексу прикладних програм, написаних на алгоритмічній мові Фортран-ІУ, і апробована при розв"язуванні ряду задач методичного характеру. Наведем результати розв"язування конкретної задачі.

Нехай потрібно визначити спектр $\mathfrak{X}(\alpha)$, якщо сигнал сумарного перехідного процесу моделюється функцією

$$E(t) = \text{EXP}(-0{,}25\pi^2 t) + \text{EXP}(-0{,}75\pi^2 t),$$

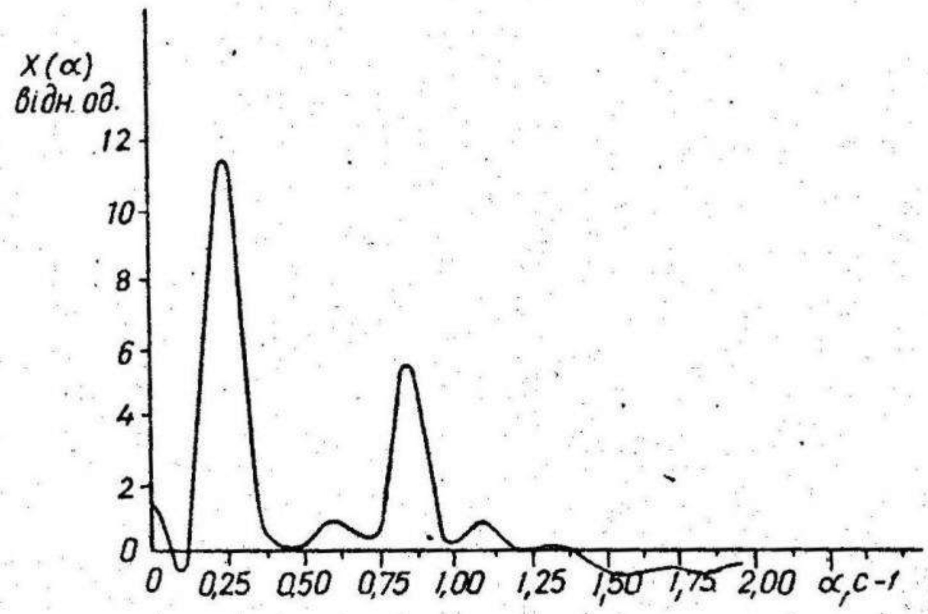
а сам перехідний процес – експонентою вигляду

$$K(t,\alpha) = \text{EXP}(-\alpha t \pi^2).$$

Для задачі характерно те, що сигнал $E(t)$ у кожній точці спостереження t_i ускладнюється завадою

$$\tilde{E}(t_i) = E(t_i) + 0{,}01\rho\,\theta_i \max|E(t)|, \quad t \in [0,T],$$

де θ_i – випадкове число нормально розподілене на відрізку $[-1,1]$ і отримане за допомогою генератора випадкових чисел; ρ – рівень завади /в процентах/. Для мінімізації функціоналу використано вісім елементів, при цьому порядок лінійної системи /І5/ дорівнює $2N+1 = 17$. Спектр досліджували в межах від 0 до 2, рівень завади 2,5 %, вагові функції $p(\alpha) \equiv 1$, $q(\alpha) \equiv 5$. Оптимальне значення параметра регуляризації [4] одержували шляхом обчислювального експерименту ($\gamma_{опт.} \sim 0,01$) .



На графіку показано обчислений при згаданих умовах спектр $x(\alpha)$. Характер кривої ілюструє добре розділення сигналів навіть при наявності порівняно високого рівня завади.

Список літератури: I. Ж у к А.В. К вопросу о построении математической модели задачи разложения сигнала на составляющие в электроразведке МПП. - В кн.: Мат. IX конф. молодых ученых ФМИ АН УССР: Сборник. Львов, 1979, с. 30-32. Рукопись деп. в ВИНИТИ № 3160-80. 2. Ж у к А.В., О с т у д и н Б.А. О корректности решения одной задачи электроразведки. - В кн.: Мат. IX конф. молодых ученых ФМИ АН УССР: Сборник. Львов, 1979, с. 33-35. Рук. деп. в ВИНИТИ. 3. Руководство по применению метода переходных процессов в рудной геофизике /Под ред. Ф.М.Каменецкого. - Л.: Недра, 1976. - 126 с. 4. С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е н к о Г.А., В о в к В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. - Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1981. - 87 с. 5. Т и х о н о в А.Н., А р с е н и н В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1974. - 223 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.02.83