УДК 539.319

Р.І.Мокрик, О.М.Уханська

НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛА ЗМІННОЇ МАСИ

Кількісне вивчення явищ і процесів, що наявні в реальних деформівних системах, можливе на основі конкретних теоретичних моделей механіки суцільного середовища, які досить точно описують явища та процеси в взаємозв"язку з максимальним врахуванням відомих теоретичних й експериментальних даних. Як правило, при вивченні деформівно-напруженого стану в термопружному тілі вважається, що маса його незмінна [3, 4].

Розглянемо пружне тіло, маса якого не постійна, а змінюється з часом, що приводить до інших законів розподілу полів деформації і температури порівняно з тілами незмінної маси.

Нехай зміна в часі маси m тіла характеризується деякою функцією $f(t)$ з густиною $f^*(t)$, тобто

$$\frac{dm}{dt} = f(t) = \int f^*(t)\,d\tau_0 , \qquad /1/$$

τ_0 – об"єм тіла; $m = \int_{\tau_0}^{\tau_0} \varrho\, d\tau_0$; ϱ – густина середовища.

Введемо позначення: $\vec{u}$ – вектор переміщення; $\bar{\theta}$ – температура; λ, μ – коефіцієнти Ламе; α_T – коефіцієнт лінійного розширення; l_1 – коефіцієнт, що характеризує зміну маси; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; ε_{ij} – компоненти тензора деформацій; N – кількість молекул у тілі; N_a – число Авогадро; λ_0 – коефіцієнт теплопровідності; $\bar{\mu}$ – хімічний потенціал; ξ_i – просторові координати; $\vec{F}$ – вектор масових сил; C_ε – питома теплоємність; W_1 – кількість теплоти, що виробляється; W_2 – кількість теплоти, яка витрачається в одиниці об"єму за одиницю часу; a – коефіцієнт температуропровідності.

Тоді з врахуванням /1/ на основі законів зміни кількості руху та енергії [2, 3] отримуємо такі основні співвідношення для середовища зі змінною масою:

рівняння нерозривності руху

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\, div\,\dot{\vec{u}} = f^*(t) ; \qquad /2/$$

рівняння кількості руху

$$\varrho\ddot{\vec{u}} + f^*(t)\dot{\vec{u}} = (\lambda+\mu)\, grad\, div\, \vec{u} + \\ + \mu\Delta\vec{u} - \gamma\, grad\,\bar{\theta} + l_1\, grad\, N + \varrho\vec{F} ; \qquad /3/$$

співвідношення Дюгамеля-Неймана для ізотропного середовища

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda e - \gamma\bar{\Theta} + \ell_1 N)\delta_{ij} \; ; \qquad /4/$$

рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2\bar{\Theta}}{\partial\xi_i^2} - \frac{1}{\varkappa}\dot{\bar{\Theta}} - \eta\dot{e} + \frac{1}{N_0\lambda_0}\,\bar{\mu}\dot{N} = -Q \; . \qquad /5/$$

Зв"язок між густиною зміни маси $f^*(t)$ і зміною кількості молекул $N(t)$

$$f^*(t) = \varrho\,\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} \; , \qquad /6/$$

де

$$\varkappa = \frac{\lambda_0}{C_\xi + \frac{\bar{\mu}N(t)}{N_0 T_0}} \; ; \; \eta = \frac{\gamma T_0}{\lambda_0} \; ; \; Q = \frac{W}{\lambda_0} \; ;$$

$$a = \frac{\lambda_0}{C_\xi} \; ; \; \gamma = \alpha_T(3\lambda + 2\mu) \; ; \; W = W_1 - W_2 \; . \qquad /7/$$

Вважаючи відсутніми масові сили та джерела тепла $/\vec{F} = 0, Q = 0/$ і нехтуючи зв"язністю у рівнянні енергії $/\eta = 0/$, розглянемо одновимірну задачу термопружності для шару з фіксованою нижньою границею $/\xi = 0/$ і змінною верхньою $/\xi = h(t)/$. У початковий момент часу температура тіла стала, переміщення та швидкості відсутні. На нижній основі шару, яка жорстко защемлена, підтримується постійна температура. На вільній від напружень верхній основі задано змінну в часі температуру. Зміщення верхньої границі задається

$$h(t) = h_0(R - e^{-vt}) \qquad /8/$$

і відповідно зміна коефіцієнта $\varkappa$

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{a}\left[1 + m_0(1 - e^{-\lambda' t})\right] \; , \qquad /9/$$

де R, m_0 - постійні величини; h_0 - початкова товщина шару; v - параметр, що характеризує швидкість зміщення верхньої границі; λ' - характеризує швидкість зміни коефіцієнта $\varkappa$, що є аналогом коефіцієнта температуропровідності a для випадку тіла змінної маси.

Використавши заміну змінних

$$z_0 = \frac{h_0 \xi}{h(t)} ; \qquad /10/$$

$$y = \frac{z_0}{h_0} , \quad \tau = \frac{at}{h_0^2} ; \qquad /11/$$

$$\bar{\Theta} = T_0 \Theta , \quad \bar{\Theta}_0 = T_0 \Theta_0 , \quad u = U h_0 , \qquad /12/$$

задачу зводимо до розв"язування системи рівнянь

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} - \left[1 + m_0 (1 - e^{-\alpha_0 \tau})\right] (R - e^{-v_0 \tau})^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} +$$

$$+ v_0 \left[1 + m_0 (1 - e^{-\alpha_0 \tau})\right] (R - e^{-v_0 \tau}) e^{-v_0 \tau} y \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \qquad /13/$$

$$+ m_0 \alpha_0 e^{-\alpha_0 \tau} (R - e^{-v_0 \tau})^2 = 0 ,$$

$$\left[1 - B_1 y^2 v_0^2 e^{-2 v_0 \tau}\right] \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - B_3 (R - e^{-v_0 \tau}) \frac{\partial \Theta}{\partial y} =$$

$$= B_1 \frac{\alpha_0 e^{-\alpha_0 \tau}}{R - e^{-\alpha_0 \tau}} (R - e^{-v_0 \tau})^2 \frac{\partial U}{\partial \tau} + B_1 (R - e^{-v_0 \tau})^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \qquad /14/$$

$$+ y v_0 e^{-v_0 \tau} B_1 \Big[y v_0 (R + e^{-v_0 \tau}) -$$

$$- \frac{\alpha_0 e^{-\alpha_0 \tau}}{R - e^{-\alpha_0 \tau}} (R - e^{-v_0 \tau}) \Big] \frac{\partial U}{\partial y} -$$

$$- 2 B_1 y v_0 e^{-v_0 \tau} (R - e^{-v_0 \tau}) \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \tau}$$

при граничних і початкових умовах

$$\Theta \big|_{y=0} = \Theta_0 , \quad U \big|_{y=0} = 0 ; \qquad /15/$$

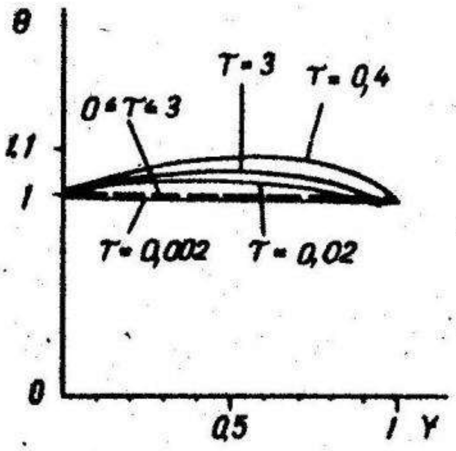
$$\Theta \big|_{y=1} = \Theta_0 (R - e^{-\beta_0 \tau}) , \quad \sigma_{yy} \big|_{y=1} = 0 ,$$

$$\Theta \big|_{\tau=0} = \Theta_0 , \quad U \big|_{\tau=0} = \frac{\partial U}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 . \qquad /16/$$

Задача /13/–/16/ розв"язується за допомогою сіткового методу з використанням явної різницевої схеми [1]. Ввівши дискретну сітку

$$y_i = iS , \quad i = \overline{0, L} ,$$

$$\tau_k = k\ell , \quad k = \overline{0, M} , \qquad /17/$$



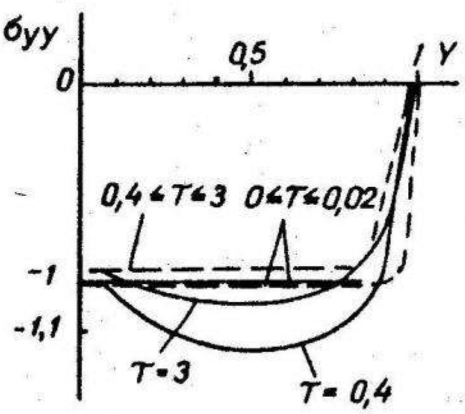


Рис. I.

Рис. 2.

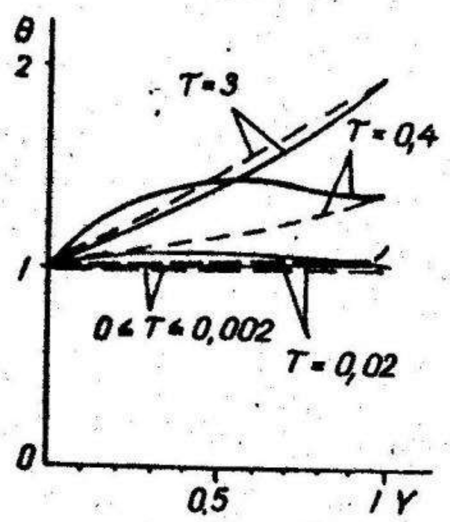


Рис. 3.

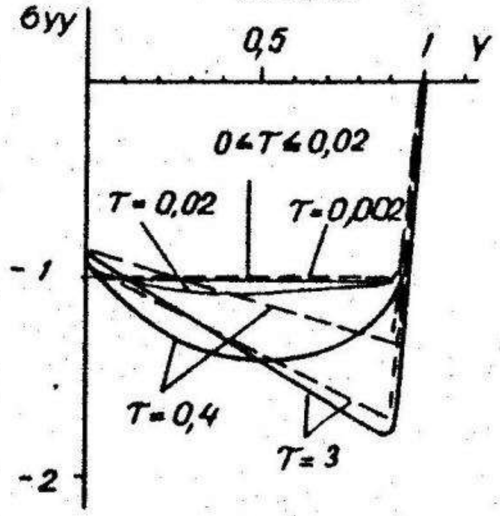


Рис. 4.

замінюємо задачу /I3/–/I6/ наступною різницевою:

$$\theta_{i,k+1} = a_{i,k}\theta_{i,k} + b_{i,k}\theta_{i+1,k} + c_{i,k}\theta_{i-1,k} + d_{i,k} \ , \qquad /18/$$

$$U_{i,k+1} = -\frac{1}{c^6_{i,k}}\Big[c^1_{i,k}\cdot U_{i+1,k} - c^2_{i,k}U_{i,k} + c^3_{i,k}U_{i-1,k} - \qquad /19/$$

$$- c^5_{i,k}U_{i,k-1} + c^4_{i,k}U_{i+1,k+1} - c^7_{i,k}\left(\theta_{i+1,k} - \theta_{i,k}\right)\Big]$$

при граничних і початкових умовах

$$\theta_{0,k} = \theta_0 \ , \quad U_{0,k} = 0 \ , \quad k = \overline{0,M} \ ; \qquad /20/$$

$$\Theta_{L,k} = \Theta_0(R - e^{-\beta_0 \tau_k}), \quad k = \overline{0,M};$$
$$U_{L,k} = U_{L-1,k} + W_k, \quad k = \overline{2,M}; \qquad /2I/$$

$$\Theta_{i,0} = \Theta_0, \; U_{i,0} = 0, \; U_{i,1} = 0, \; i = \overline{0,L}. \qquad /22/$$

З /4/ і /I7/ випливає співвідношення для знаходження напружень

$$\sigma_{i,k} = \frac{A_1}{S(R - e^{-\nu_0 \tau_k})}(U_{i+1,k} - U_{i,k}) - A_2 \Theta_{i,k}, \qquad /23/$$

де A_1 і A_2 – постійні величини.

Числові розрахунки проводили для параметрів $0 \le \tau \le 3$, S = 0,I; ℓ = 0,00I; $B_1 = B_3 = 1$; A_1 = I0; A_2 = I. На рис.I показано розподіл температури Θ, а на рис. 2 напруження σ_{yy} по безрозмірній товщині шару y для різних значень безрозмірного часу τ при значеннях параметрів $\alpha_0 = 1$, $\nu_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ тобто врахований лише ефект зміни маси. На рис. 3, 4 зображено відповідно розподіл температури Θ і напруження σ_{yy} при α_0 = 5, ν_0 = 5, β_0 = I, тобто враховано ще зміну температури за рахунок зміщення верхньої границі. Пунктирною лінією позначені аналогічні розподіли для тіла сталої маси / $\varkappa = a$, $N(t) = f^*(t) = 0$, $h(t) = h_0$ /.

Список літератури: I. Б а х в а л о в Н.С. Численные методы.- М.: Наука, 1973. Т.I. - 634 с. 2. Д е Г р о о т С.Р., М а з у р П. Неравновесная термодинамика. - М.: Мир, 1964. - 456 с. 3. Н о в а ц к и й В. Динамические задачи термоупругости. - М.: Мир, 1964. - 256 с. 4. П о д с т р и г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Обобщенная термомеханика. - К.: Наук. думка, 1976. - 3I0 с.

Стаття надійшла до редколегії 23.0I.84