УДК 536.2

В.Ф.Кочубей, І.В.Оліярник, О.О.Вошик

ТЕПЛООБМІН І ДИФУЗІЯ В ТРУБІ КІЛЬЦЕВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Вивченню процесів теплообміну в циліндричних трубах присвячено ряд праць [2, 4].

Розглянемо процеси теплообміну та дифузії під час руху бінарної суміші в"язких рідин або газів між двома напівбезмежними співосними циліндрами радіусів r_1 і r_2 / $r_2 > r_1$ / при осьовій симетрії. Такі процеси описує система диференціальних рівнянь у частинних похідних на температуру T і парціальний тиск дифундуючої компоненти p [I]:

$$\frac{dT}{dt} = a\Delta T + \gamma \frac{Dk_T P}{c\varrho}\Delta \ln p ,$$

$$\frac{dp}{dt} = D\Delta p + \frac{Dk_T P}{T}\Delta T, \qquad /I/$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}$; D - коефіцієнт дифузії; k_T - термодифузійне співвідношення; a - коефіцієнт температуропровідності; P - загальний тиск суміші / $P = const$ /; ϱ - густина суміші; c - питома теплоємність; γ - механічний еквівалент теплоти.

Припускаємо, що рух суміші, процеси теплообміну та дифузії стаціонарні; рух суміші стабілізований, тобто профіль швидкості не змінюється по довжині труби; рух у поперечному напрямку відсутній; зміни теплового потоку та парціального тиску вздовж осі труби незначні порівняно зі зміною вздовж радіуса; впливом дифузії на зміну температурного поля можна знехтувати.

Виходячи з цих припущень, систему /I/ записують у такому вигляді:

$$\frac{1}{a} W_z \frac{\partial T}{\partial z_1} = \Delta T ,$$

$$W_z \frac{\partial p}{\partial z_1} = D\Delta p + \frac{Dk_T P}{T}\Delta T , \qquad /2/$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$; W_z - швидкість суміші у кільцевій трубі в напрямку осі z, яка задається як [2]

$$W_z = W_0 \frac{(r_2^2 - r^2)\ln r_1/r_2 - (r_2^2 - r_1^2)\ln r/r_2}{r_2^2 - r_1^2 + (r_2^2 + r_1^2)\ln r_1/r_2} , \qquad /3/$$

де

$$W_0 = \frac{\Delta P}{4\mu\ell}\left(r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln r_2^2 - \ln r_1^2} \right);$$

ΔP – перепад тиску на відстані ℓ від вхідного перерізу труби; μ – коефіцієнт динамічної в"язкості.

Припустимо, що на вході труби при $z_1 = 0$ задано постійні значення температури T_0 і парціального тиску p_0 ; зовнішня стінка підтримується при температурі T_2 і парціальному тиску p_2 ; внутрішня стінка – при температурі T_1 і парціальному тиску p_1 .

З допомогою безрозмірних співвідношень

$$R = \frac{r}{r_2}, \quad R_1 = \frac{r_1}{r_2}, \quad R_2 = \frac{r_2}{r_2} = 1; \quad z = \frac{z_1}{Pe^c r_2}; \quad D_0 = \frac{D}{T};$$

$$Pe^T = \frac{W_0 r_2}{a}, \quad Pe^c = \frac{W_0 r_2}{D}$$ – критерії Пекле,

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \quad p^* = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1}, \quad \eta = \frac{D_0 k_T P (T_2 - T_1)}{D(p_2 - p_1)}, \quad \varkappa = \frac{Pe^T}{Pe^c} \qquad /4/$$

система /2/ і граничні умови у безрозмірних величинах наберуть вигляду:

$$\varkappa W \frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial^2\theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\theta}{\partial R},$$

$$W\frac{\partial p^*}{\partial z} = \frac{\partial^2 p^*}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial p^*}{\partial R} + \eta\varkappa W\frac{\partial\theta}{\partial z}; \qquad /5/$$

$$\theta\big|_{z=0} = \theta_0, \quad \theta\big|_{R_1} = 0, \quad \theta\big|_{R_2} = 1; \qquad /6/$$

$$p^*\big|_{z=0} = p_0^*, \quad p^*\big|_{R_1} = 0, \quad p^*\big|_{R_2} = 1, \qquad /7/$$

де

$$W = \frac{(1-R^2)\ln R_1 - (1-R_1^2)\ln R}{1 - R_1^2 + (1+R_1^2)\ln R_1}.$$

Згідно з методом розділення змінних [I] функцію $\Theta(R,z)$ можна записати як

$$\Theta(R,z) = \ln\frac{R}{R_1} \Big/ \ln\frac{R_2}{R_1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \psi_k(R) e^{-\lambda_k^2 z}, \qquad /8/$$

де λ_k і $\psi_k(R)$ – відповідно власні значення та функції задачі Штурма – Ліувіля:

$$\psi''(R) + \frac{1}{R}\psi'(R) + \lambda^2 \varkappa W \psi(R) = 0,$$
$$\psi(R_1) = 0, \quad \psi(R_2) = 0. \qquad /9/$$

Постійні коефіцієнти A_k знаходимо з умови ортогональності власних функцій і значення $\Theta(R,z)$ на вході при $z=0$

$$A_k = \int_{R_1}^{R_2} \left[\Theta_0 - \frac{\ln\frac{R}{R_1}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right] R W(R)\, dR \Big/ \int_{R_1}^{R_2} \psi_k^2(R) R W(R)\, dR. \qquad /10/$$

Розв"язок задачі /5/, /7/ шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$p^*(R,z) = p_1^*(R,z) + p_2^*(R,z),$$

де $p_1^*(R,z)$ – частковий розв"язок неоднорідного рівняння

$$p_1^*(R,z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \psi_k(R) e^{-\lambda_k^2 z}. \qquad /11/$$

Після підстановки /11/ в друге рівняння /5/ з врахуванням /9/ дістаємо вирази постійних C_k:

$$C_k = \frac{\eta\varkappa}{1-\varkappa} A_k \qquad k = 1, 2, \ldots . \qquad /12/$$

Тоді функція $p_2^*(R,z)$ є розв"язком задачі

$$W\frac{\partial p_2^*}{\partial z} = \frac{\partial^2 p_2^*}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial p_2^*}{\partial R},$$
$$p_2^*\big|_{z=0} = p_0^* - p_1^*(R,0),$$
$$p_2^*\big|_{R_1} = 0, \quad p_2^*\big|_{R_2} = 1. \qquad /13/$$

Функцію $p_2^*(R,z)$ шукаємо у вигляді

$$p_2^*(R,z) = \ln\frac{R}{R_1} \Big/ \ln\frac{R_2}{R_1} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \varphi_k(R) e^{-\varepsilon_k^2 z}, \qquad /14/$$

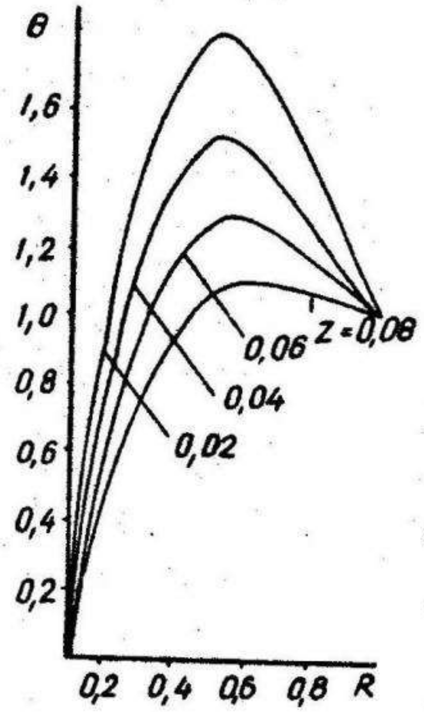

Рис. I.

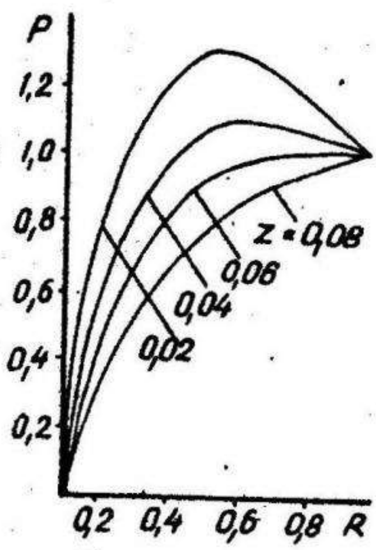

Рис. 2.

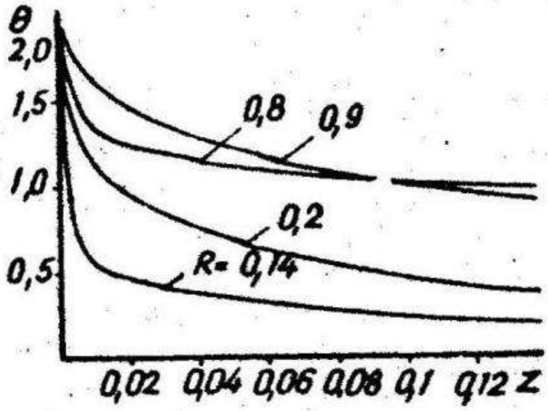

Рис. 3.

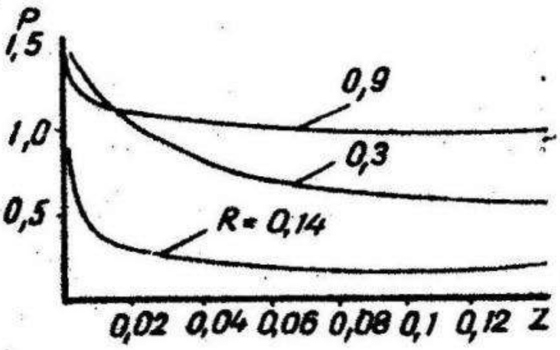

Рис. 4.

де $\mathcal{E}_K$ і $\varphi_K(R)$ – відповідно власні значення та функції задачі Штурма – Ліувілля:

$$\varphi_K''(R) + \frac{1}{R}\varphi_K'(R) + \mathcal{E}_K^2 W \varphi_K(R) = 0,$$
$$\varphi_K(R_1) = 0,$$
$$\varphi_K(R_2) = 0. \qquad /15/$$

Постійні коефіцієнти D_K знаходимо з умов ортогональності власних функцій φ_K :

$$D_K = \int_{R_1}^{R_2} \left(p_0^* - p_1^*(R,0) - \frac{\ln \frac{R}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right) R W(R) dR \Big/ \int_{R_1}^{R_2} \varphi_K^2(R) R W(R) dR . \qquad /16/$$

Кінцевий вираз парціального тиску

$$p^*(R,z) = \ln \frac{R}{R_1} \Big/ \ln \frac{R_2}{R_1} + \sum_{K=1}^{\infty} D_K \varphi_K(R) e^{-\varepsilon_K^2 z} + \frac{\eta \varkappa}{1-\varkappa} \sum_{K=1}^{\infty} A_K \psi_K(R) e^{-\lambda_K^2 z} . \qquad /17/$$

Аналогічним методом одержуємо розв"язок задачі у випадку теплоізоляції однієї стінки при постійній температурі іншої.

Проведемо числовий аналіз отриманих результатів. Власні значення задач Штурма - Ліувіля /9/, /15/ знаходимо як корені алгебраїчного рівняння нескінченного порядку. На рис. I, 2 показано розподіл відповідно температури і парціального тиску по перерізу кільцевої труби для деяких значень z . На рис. 3, 4 зображено зміну температури та парціального тиску по довжині труби для деяких значень R . Для числового аналізу приймали $\varkappa$ = 0,I; η = 0,8; θ_0 = 2,0; p_0 = I,5; R_1 = I,0.

Список літератури: I. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики.-М.: Высш. шк., I970. - 7I0 с. 2. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах.- М.: Энергия, I967. - 4II с. 3. Франк-Каменецкий Д.А. Теплообмен и диффузия в химической кинетике.-М.: Гостехиздат, I947. - 368 с. 4. Hatton A.P., Quarmby A. Heat transfer in the thermal entry leught with laminar flow in an annulus.- Int. J. Heat and Mass Transfer, 1962, N 5, p. 973-980.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.84