УДК 534.24

О.М.Горечко

РОЗСІЯННЯ ВУЗЬКОНАПРЯМЛЕНОГО ЗВУКОВОГО ПУЧКА НА ПЛАСТИНІ

Розглянемо двовимірну задачу розсіяння плоскої вузьконапрямленої гармонійної акустичної хвилі на тонкій пружній пластині, яка контактує з півпростором ідеальної стисливої рідини. Ця задача зводиться до розв"язування рівнянь

$$D d_x^4 w - \varrho_0 h \omega^2 w = -(p_i + p_s)_{z=0}, \quad \partial_x^2 p_s + \partial_z^2 p_s + k^2 p_s = 0 \qquad /1/$$

за умови безвідривного контакту рідини з пластинкою

$$\partial_z (p_i + p_s)_{z=0} = \varrho \omega^2 w \qquad /2/$$

та випромінення на безмежності. В /1/, /2/ прийняті такі позначення: $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ - циліндрична жорсткість пластини; ϱ_0 - густина матеріалу пластини; ϱ, c - густина та швидкість звуку в рідині; $p_i = p_0 S[a^2 - (z\sin\varphi_0 - x\cos\varphi_0)^2] \times \exp(ik_x x + ik_z z)$ - тиск в зондуючому пучку шириною $2a$ з ідеальною діаграмою направленості [2]; φ_0 - кут падіння; $S(x)$ - функція Хевісайда. Гармонійний множник $\exp(i\omega t)$ тут і далі опущено.

Застосовуючи перетворення Фур"є за змінною x, приходимо до розв"язку задачі /1/, /2/

$$p_s = \frac{p_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\varkappa_x + \alpha} \sin\left(\frac{\varkappa_x + \alpha}{\cos\varphi_0}\right) \left\{ \frac{\sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2} + H(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2}\, G(\alpha)} \left[G(\alpha) + \Lambda \right] - 1 \right\} \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2}\,\zeta - i\alpha\xi\right) d\alpha, \qquad /3/$$

де

$$\xi = x/a; \; \zeta = z/a; \; \Lambda = \varrho c^2 x^2 a^3 / D; \; \varkappa = ka;$$

$$G(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2}\,(\alpha^4 - \Omega^4) - \Lambda; \; H(\alpha) = i\left[\varkappa_z + (\varkappa_x + \alpha)\, tg\,\varphi_0\right];$$

$\Omega^4 = \varrho_0 h c^2 a^2 \varkappa^2 / D$. Аналітичне обчислення інтегралу /3/ неможливе. Тому обмежимося обчисленням асимптотичного значення цього інтегралу на великих відстанях від пластинки з допомогою методу перевалу [1]. Записуючи синус в підінтегральному виразі /3/ у вигляді різниці двох експонент і обчислюючи асимптотичні значення кожного з отриманих інтегралів, приходимо до

$$\frac{p_s}{p_0} \approx \eta_+ \exp\left(\frac{i\varkappa_x}{\cos\varphi_0} - i\varkappa R_+\right) - \eta_- \exp\left(-\frac{i\varkappa_x}{\cos\varphi_0} - i\varkappa R_-\right)$$

при $|v+\varphi_0| > 1/R + 6/\sqrt{\varkappa R}$;

$$\approx \left\{\lambda\left[\mathrm{sign}(\varphi_0+\psi_+)F(\beta_+) - \gamma_+\right] + \eta_+\right\} \exp\left(\frac{i\varkappa_x}{\cos\varphi_0} - i\varkappa R_+\right) -$$

$$-\left\{\lambda\left[\mathrm{sign}(\varphi_0+\psi_-)F(\beta_-) - \gamma_-\right] + \eta_-\right\} \exp\left(-\frac{i\varkappa_x}{\cos\varphi_0} - i\varkappa R_-\right)$$

при $1/R < |v+\varphi_0| \leq 1/R + 6/\sqrt{\varkappa R}$;

$$\approx \lambda \exp\left[-i\varkappa R\cos(\varphi_0+v)\right] - \left\{\lambda\left[F(\beta_+) + \gamma_+\right] - \eta_+\right\} \exp\left(\frac{i\varkappa_x}{\cos\varphi_0} - \right.$$

$$\left. - i\varkappa R_+\right) - \left\{\lambda\left[F(\beta_-) - \gamma_-\right] + \eta_-\right\} \exp\left(-\frac{i\varkappa_x}{\cos\varphi_0} - i\varkappa R_-\right)$$

при $|v+\varphi_0| \leq 1/R$, /4/

де $\lambda = \dfrac{\bar{G}(\varkappa_x)}{G(\varkappa_x)}$; $\eta_\pm = \dfrac{(1-i)\cos\psi_\pm\left[\Lambda + (\varkappa^4 \sin^4\psi_\pm - \Omega^4)H(\varkappa\sin\psi_\pm)\right]}{2\sqrt{\pi R_\pm \varkappa}(\sin\varphi_0 + \sin\psi_\pm)\bar{G}(\varkappa\sin\psi_\pm)}$;

$$\gamma_\pm = \frac{0{,}25(1-i)}{\sqrt{\pi R_\pm \varkappa}\,\sin\left[\frac{1}{2}(\varphi_0+\psi_\pm)\right]}; \quad F(\beta) = \pi^{-1/2} e^{2i\beta^2} \int_{(1+i)\beta}^{\infty} e^{-x^2} dx;$$

$\beta_\pm = \sqrt{\varkappa R_\pm}\left|\sin\left[\frac{1}{2}(\varphi_0+\psi_\pm)\right]\right|$; (R, v), (R_+, ψ_+), (R_-, ψ_-) — полярні координати з початком в точках $(\xi = 0, \zeta = 0)$, $(\xi = 1/\cos\varphi_0$, $\zeta = 0)$ і $(\xi = -1/\cos\varphi_0$, $\zeta = 0)$ відповідно.

З аналізу асимптотики розсіяного тиску /4/, справедливої при $R \gg 1$ і $|v| < \pi/2$, випливає, що поле тисків в акустичному півпросторі є суперпозицією циліндричних хвиль, які випромінюють краї звукової плями на пластині. Максимальних значень розсіяний тиск набуває в дзеркально відбитому пучку $v = -\varphi_0$. У цьому напрямку поширюється плоска вузьконапрямлена хвиля, амплітуда якої дорівнює коефіцієнтові відбиття від пластинки λ.

Список літератури: 1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. - 344 с. 2. Поддубняк А.П. Рассеяние ограниченного звукового пучка на акустически мягком круговом цилиндре. - Акустический журн., 1979, т.25, вып.1, с.108-112.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.84

УДК 518.12:517.544

Г.А.Шинкаренко, О.М.Левченко

АПРОКСИМАЦІЯ ГРАДІЄНТА РОЗВ"ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА МЕТОДОМ ШТРАФУ

1. Постановка задачі. Позначимо через Ω обмежену зв"язну область точок $x=(x_1,\dots,x_n)$ n - вимірного евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем границею Γ, причому $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$, $\Gamma_i\cap\Gamma_j=\emptyset$, $i\neq j$. Розглянемо наступну крайову задачу: знайти функцію $u(x)$ таку, що

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}=f \quad в\ \Omega, \qquad /1.1/$$

$$u=0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \partial u/\partial\nu=0 \text{ на } \Gamma_2,$$

$$-\partial u/\partial\nu=\alpha u-g \text{ на } \Gamma_3,$$

де $f\in L^2(\Omega)$, $g\in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha\in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha>0$ на Γ_3 - задані функції; $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ; тут і далі по повторних індексах передбачається підсумовування від 1 до n.

У застосуваннях досить часто основний інтерес становить не розв"язок $u(x)$ задачі /1.1/, а його антиградієнт $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, $\sigma=-grad\, u$. Ясно, що коли наближений розв"язок задачі /1.1/ знайдено, то його градієнт визначається просто, але операція диференціювання понижує точність і достовірність значень. Щоб уникнути цього, доцільно сформулювати задачу безпосередньо у термінах вектора $\sigma(x)$. Скористаємось доповнювальною варіаційною задачею: знайти вектор $\sigma^*\in T(f)$ такий, що

$$K(\sigma^*)\leq K(\sigma) \quad \forall\sigma\in T(f), \qquad /1.2/$$

де

$$K(\sigma)=\int_\Omega \sigma_i\sigma_i\,dx+\int_{\Gamma_3}\alpha^{-1}(\sigma_\nu+g)^2d\gamma, \quad \sigma_\nu=\sigma_i\nu_i;$$

$$T(f)=\{\sigma\,|\,\sigma_\nu=0 \text{ на } \Gamma_2;\ div\,\sigma=f \ в\ \Omega;\ \sigma\in H(div;\Omega)\};$$

$$H(div;\Omega)=\{\sigma\,|\,\sigma\in[L^2(\Omega)]^n;\ div\,\sigma\in L^2(\Omega)\}.$$