Список літератури: 1. Б р е х о в с к и х Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 344 с. 2. П о д д у б н я к А.П. Рассеяние ограниченного звукового пучка на акустически мягком круговом цилиндре. – Акустический журн., 1979, т.25, вып.1, с.108–112.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.84

УДК 518.12:517.544

Г.А.Шинкаренко, О.М.Левченко

АПРОКСИМАЦІЯ ГРАДІЄНТА РОЗВ"ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА МЕТОДОМ ШТРАФУ

1. Постановка задачі. Позначимо через Ω обмежену зв"язну область точок $x=(x_1,\ldots,x_n)$ n – вимірного евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем границею Γ, причому $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$, $\Gamma_i\cap\Gamma_j=\emptyset$, $i\neq j$. Розглянемо наступну крайову задачу: знайти функцію $u(x)$ таку, що

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}=f \text{ в } \Omega, \qquad /1.1/$$

$$u=0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \partial u/\partial\nu=0 \text{ на } \Gamma_2,$$

$$-\partial u/\partial\nu=\alpha u-g \text{ на } \Gamma_3,$$

де $f\in L^2(\Omega)$, $g\in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha\in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha>0$ на Γ_3 – задані функції; $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ; тут і далі по повторних індексах передбачається підсумовування від 1 до n.

У застосуваннях досить часто основний інтерес становить не розв"язок $u(x)$ задачі /1.1/, а його антиградієнт $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, $\sigma=-\operatorname{grad} u$. Ясно, що коли наближений розв"язок задачі /1.1/ знайдено, то його градієнт визначається просто, але операція диференціювання понижує точність і достовірність значень. Щоб уникнути цього, доцільно сформулювати задачу безпосередньо у термінах вектора $\sigma(x)$. Скористаємось доповнювальною варіаційною задачею: знайти вектор $\sigma^*\in T(f)$ такий, що

$$K(\sigma^*)\leq K(\sigma) \quad \forall\sigma\in T(f), \qquad /1.2/$$

де

$$K(\sigma)=\int_\Omega\sigma_i\sigma_i\,dx+\int_{\Gamma_3}\alpha^{-1}(\sigma_\nu+g)^2d\gamma, \quad \sigma_\nu=\sigma_i\nu_i;$$

$$T(f)=\{\sigma\mid\sigma_\nu=0 \text{ на } \Gamma_2;\ \operatorname{div}\sigma=f \text{ в } \Omega;\ \sigma\in H(\operatorname{div};\Omega)\};$$

$$H(\operatorname{div};\Omega)=\{\sigma\mid\sigma\in[L^2(\Omega)]^n;\ \operatorname{div}\sigma\in L^2(\Omega)\}.$$

Основна трудність наближеного розв"язування задачі мінімізації /1.2/ полягає в побудові апроксимацій, які, крім умов гладкості, задовольняють рівняння

$$div\,\sigma = f \text{ в } \Omega . \qquad /1.3/$$

Побудувати такі функції досить складно. Цим, зокрема, пояснюється широке використання чисельних схем, де за вихідну точку беруть основну варіаційну задачу, та відносно невелика кількість праць в альтернативному напрямі [5].

Зауваження 1.1. Задача /1.2/ коректно поставлена в праці [4].

Зауваження 1.2. Позначення гільбертових просторів і норм в них запозичено зі Сьярле [2].

2. Регуляризація доповнювальної задачі. Щоб уникнути використання методів нелінійного програмування чи введення як додаткових невідомих множників Лагранжа, скористаємось регуляризацією задачі /1.2/ методом штрафу. Зафіксуємо параметр /штрафу/ $\varepsilon = const > 0$ і розглянемо задачу

$$\begin{cases} \text{знайти } \sigma^{\varepsilon} \in H \text{ такий, що} \\ K_{\varepsilon}(\sigma^{\varepsilon}) \leq K_{\varepsilon}(\sigma) \ \forall \sigma \in H, \end{cases} \qquad /2.1/$$

де $K_{\varepsilon}(\sigma) = K(\sigma) + \varepsilon^{-1} \| div\,\sigma - f \|^2_{0,\Omega}$,

$$H = \{ \sigma \mid \sigma_{\nu} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \ ; \ \sigma \in H(div;\Omega) \} ,$$

або еквівалентну їй /поки що формально/ варіаційну задачу

$$\begin{cases} \text{знайти } \sigma^{\varepsilon} \in H \text{ такий, що} \\ A_{\varepsilon}(\sigma^{\varepsilon}, \tau) = L_{\varepsilon}(\tau) \ \forall \tau \in H, \end{cases} \qquad /2.2/$$

де $A_{\varepsilon}(\sigma,\tau) = \int_{\Omega} (\sigma_i \tau_i + \varepsilon^{-1} div\,\sigma \cdot div\,\tau)\, dx + \int_{\Gamma_3} \alpha^{-1} \sigma_{\nu} \tau_{\nu}\, d\gamma$;

$$L_{\varepsilon}(\tau) = \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} f\, div\,\tau\, dx - \int_{\Gamma_3} \alpha^{-1} g \tau_{\nu}\, d\gamma .$$

З огляду на нерівності

$$|A_{\varepsilon}(\sigma,\tau)| \leq max\{c, \varepsilon^{-1}\} \|\sigma\|_{H(div;\Omega)} \|\tau\|_{H(div;\Omega)} ,$$

$$A_{\varepsilon}(\sigma,\sigma) \geq min\{1, \varepsilon^{-1}\} \|\sigma\|^2_{H(div;\Omega)} \ \forall \sigma, \tau \in H, \qquad /2.3/$$

$$|L_{\varepsilon}(\tau)| \leq max\{c, \varepsilon^{-1}\} \{ \|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Gamma_3} \} \|\sigma\|_{H(div;\Omega)}$$

і теорему Лакса-Мільграма регуляризована задача /2.2/, чи, що еквівалентно, /2.1/ має єдиний розв"язок.

Зауваження 2.1. Тут і далі символом C позначаємо додатні константи. Як правило, у різних місцях вони наоувають неоднакових значень, але не залежать від $\varepsilon, \sigma^*, u^*, \sigma^\varepsilon, u^\varepsilon$ і т.д.

Теорема 2.1. Нехай u^*, σ^* та σ^ε узагальнений розв"язок крайової задачі /1.1/, задачі мінімізації /1.2/ та регуляризованої задачі /2.2/. Тоді регуляризуюча послідовність $\sigma^\varepsilon \in H$ збігається в $H(div;\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ до розв"язку $\sigma^* \in T(f)$, причому

$$\|\sigma^\varepsilon-\sigma^*\|_{H(div;\Omega)} \le \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\min\{1,1/2\varepsilon\}}}\,\|u^*\|_{0,\Omega}, \qquad /2.4/$$
$$\|div\,\sigma^\varepsilon - f\|_{0,\Omega} \le \varepsilon\|u^*\|_{0,\Omega}.$$

Доведення. Неважко бачити, що вектор $e^\varepsilon = \sigma^\varepsilon - \sigma^*$ задовольняє рівняння

$$A_\varepsilon(e^\varepsilon,\sigma) = -(u^*, div\,\sigma)_{0,\Omega} \quad \forall \sigma \in H, \qquad /2.5/$$

звідки з огляду на нерівність Буняковського-Шварца і нерівність $2ab \le \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$ маємо

$$|(u^*, div\,\sigma)_{0,\Omega}| \le \frac{\varepsilon}{2}\|u^*\|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2\varepsilon}\|div\,\sigma\|^2_{0,\Omega}. \qquad /2.6/$$

Прийнявши тепер $\sigma = e^\varepsilon$, з /2.5/ та /2.6/ дістаємо оцінку

$$\|e^\varepsilon\|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2\varepsilon}\|div\,e^\varepsilon\|^2_{0,\Omega} \le \frac{\varepsilon}{2}\|u^*\|^2_{0,\Omega},$$

яка безпосередньо приводить до /2.4/.

Отже, розв"язок регуляризованої задачі /2.2/ можна розглядати як наближення до розв"язку σ^*. Важливо відзначити також, що чисельне розв"язування задачі /2.2/ можна здійснити стандартною процедурою методу скінченних елементів [1, 2].

3. Інтерпретація регуляризованої задачі. Інтегруючи рівняння /2.2/ по частинах і позначаючи через

$$u^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(div\,\sigma^\varepsilon - f), \qquad /3.1/$$

приходимо до висновку, що вектор σ^ε є /в крайньому разі формальним/ розв"язком задачі

$$\begin{aligned} &\sigma^\varepsilon + grad\,u^\varepsilon = 0 \\ &div\,\sigma^\varepsilon + \varepsilon u^\varepsilon = f \quad в\ \Omega, \\ &u^\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma_1,\ \sigma^\varepsilon_\nu = 0 \text{ на } \Gamma_2, \\ &\sigma^\varepsilon_\nu - \alpha u^\varepsilon + g = 0 \text{ на } \Gamma_3. \end{aligned} \qquad /3.2/$$

Порівнюючи цю крайову задачу з /I.I/, бачимо, що в термінах функції u^ε використана нами регуляризація фактично заміняє рівняння Пуассона задачі /I.I/ рівнянням Гельмгольца з коефіцієнтом $\varepsilon>0$ при абсолютному члені. Одночасно наведена інтерпретація дає більше, ніж результати теореми 2.I; вона дає змогу охарактеризувати збіжність u^ε до u^* при $\varepsilon\to 0$.

Справді, з врахуванням/3.I/ рівняння /2.5/ записуємо у вигляді

$$(e^\varepsilon,\sigma)_{0,\Omega}=-(u^\varepsilon-u^*,\operatorname{div}\sigma)_{0,\Omega}\quad\forall\sigma\in H. \qquad /3.3/$$

Розглянемо варіаційну задачу: знайти $w\in V$,
$V=\{v\,|\,v=0 \text{ на } \Gamma_1;\ v\in H^1(\Omega)\}$ таку, що

$$(\operatorname{grad} w,\operatorname{grad} v)_{0,\Omega}=-(u^\varepsilon-u^*,v)_{0,\Omega}\quad\forall v\in V.$$

Вона має єдиний розв"язок $w\in V$, причому
$\|w\|_{1,\Omega}\leq c\|u^\varepsilon-u^*\|_{0,\Omega}$, $c=const>0$. Приймемо тепер $\sigma_0=-\operatorname{grad} w$, тоді $\operatorname{div}\sigma_0=-(u^\varepsilon-u^*)$, $\sigma_0\in H$. Крім цього,

$$\|\sigma_0\|^2_{H(div;\Omega)}=\|\operatorname{grad} w\|^2_{0,\Omega}+\|u^\varepsilon-u^*\|^2_{0,\Omega}\leq c\|u^\varepsilon-u^*\|^2_{0,\Omega}.$$

Підставляючи σ_0 в /3.3/, дістаємо

$$\|u^\varepsilon-u^*\|^2_{0,\Omega}=(e^\varepsilon,\sigma_0)_{0,\Omega}\leq c\|e^\varepsilon\|_{H(div;\Omega)}\|u^\varepsilon-u^*\|_{0,\Omega}.$$

Повертаючись до теореми 2.I, приходимо до висновку, що існує така теорема.

Теорема 3.I. Нехай на додаток до умов теореми 2.I функція $u^\varepsilon\in L^2(\Omega)$ визначається виразом /3.I/. Тоді при $\varepsilon\to 0$ послідовність пар $(\sigma^\varepsilon,u^\varepsilon)$ збігається до (σ^*,u^*) в нормі $H(div;\Omega)\times L^2(\Omega)$ і для достатньо малих $\varepsilon>0$ наявна оцінка

$$\|\sigma^\varepsilon-\sigma^*\|_{H(div;\Omega)}+\|u^\varepsilon-u^*\|_{0,\Omega}\leq c\sqrt{\varepsilon}\,\|u^*\|_{0,\Omega}, \qquad /3.4/$$

де $c=const>0$ не залежить від ε та u^*.

Зауваження 3.I. Якщо σ^ε достатньо гладкий, наприклад, такий, що $\operatorname{div}\sigma^\varepsilon\in H^1(\Omega)$, то оцінка /3.4/ може бути поліпшена до такої:

$$\|\sigma^\varepsilon-\sigma^*\|_{H(div;\Omega)}+\|u^\varepsilon-u^*\|_{1,\Omega}\leq c\varepsilon\|u^*\|_{0,\Omega},\ c=const>0. \qquad /3.5/$$

4. Дискретизація регуляризуючої послідовності. Наближений розв"язок задачі /2.2/ визначимо як вектор $\sigma^{\varepsilon h}$ зі скінченно-вимірного підпростору $S_h^k\in H$ такий, що

$$A_\varepsilon(\sigma^{\varepsilon h},\tau^h)=L_\varepsilon(\tau^h)\quad\forall\tau^h\in S_h^k. \qquad /4.I/$$

Причому припускаємо, що простір S_h^k має таку властивість апроксимації /звичайну для методу скінченних елементів/: для кожного $\sigma \in [H^{k+1}(\Omega)]^n$, $k \geq 0$, знайдуться $\sigma^h \in S_h^k$ і $c = const > 0$ такі, що

$$\|\sigma - \sigma^h\|_{m,\Omega} \leq c h^{k+1-m} \|\sigma\|_{k+1,\Omega}, \quad 0 \leq m \leq k. \qquad /4.2/$$

Охарактеризуємо похибку $e^{\varepsilon h} = \sigma^{\varepsilon h} - \sigma^*$. Неважко бачити, що вона є розв"язком варіаційного рівняння

$$A_\varepsilon(e^{\varepsilon h}, \tau^h) = -(u^*, \operatorname{div} \tau^h)_{0,\Omega} \quad \forall \tau^h \in S_h^k.$$

Звідси

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(e^{\varepsilon h}, e^{\varepsilon h}) &= A_\varepsilon(e^{\varepsilon h}, \sigma^{\varepsilon h} - \sigma^h + \sigma^h - \sigma^*) \\ &= -(u^*, \operatorname{div}(\sigma^{\varepsilon h} - \sigma^h))_{0,\Omega} + A_\varepsilon(e^{\varepsilon h}, \sigma^h - \sigma^*) \\ &= -(u^*, \operatorname{div} e^{\varepsilon h})_{0,\Omega} + (u^*, \operatorname{div}(\sigma^h - \sigma^*))_{0,\Omega} + A_\varepsilon(e^{\varepsilon h}, \sigma^h - \sigma^*) \quad \forall \sigma^h \in S_h^k. \end{aligned}$$

На основі нерівностей

$$|(u, \operatorname{div} \sigma)_{0,\Omega}| \leq \varepsilon \|u\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\operatorname{div} \sigma\|_{0,\Omega}^2,$$

$$A_\varepsilon(\sigma, \tau) \leq \frac{1}{2} [A_\varepsilon(\sigma, \sigma) + A_\varepsilon(\tau, \tau)] \quad \forall \sigma, \tau \in H$$

та рівняння /4.I/ після нескладних перетворень приходимо до оцінки

$$\|e^{\varepsilon h}\|_{H(div;\Omega)}^2 + \|e_\nu^{\varepsilon h}\|_{0,\Gamma_3}^2 \leq c \left\{ \varepsilon \|u^*\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\sigma^h - \sigma^*\|_{1,\Omega}^2 \right\} \quad \forall \sigma^h \in S_h^k.$$

Вибираючи $\sigma^h \in S_h^k$ належним чином на основі /4.2/, знаходимо

$$\|\sigma^{\varepsilon h} - \sigma^*\|_{H(div;\Omega)} \leq c \left\{ \sqrt{\varepsilon} \|u^*\|_{0,\Omega} + \frac{h^k}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma^*\|_{k+1,\Omega} \right\}. \qquad /4.3/$$

Таким чином доведена наступна терема.

<u>Теорема 4.I.</u> Нехай u^*, σ^* – розв"язки крайової задачі /I.I/ та /I.2/, причому для деякого $k \geq 0$ $\sigma^* \in H \cap [H^{k+1}(\Omega)]^n$. Припустимо також, що наближений розв"язок $\sigma^{\varepsilon h}$ регуляризованої задачі /2.2/ визначається у просторі S_h^k, що має властивість апроксимації /4.2/. Тоді послідовність $\sigma^{\varepsilon h}$ збігається при $\varepsilon \to 0$ і $h \to 0$ до σ^*, якщо параметри регуляризації ε і дискретизації h узгоджені таким чином, що

$$h^k / \sqrt{\varepsilon} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0, h \to 0. \qquad /4.4/$$

Більше того, оптимальний порядок збіжності досягається при $\varepsilon = c h^k$. У цьому випадку

$$\|\sigma^{\varepsilon h} - \sigma^*\|_{H(div;\Omega)} \leq c h^{k/2} \left\{ \|u^*\|_{0,\Omega} + \|\sigma^*\|_{k+1,\Omega} \right\}, \quad c = const > 0. \qquad /4.5/$$

Зауваження 4.I. Теорема 4.I є повним аналогом теореми 2.I; при допущеннях цієї теореми нічого не можна стверджувати відносно збіжності $u^{\varepsilon h} = -\varepsilon^{-1}(div\sigma^{\varepsilon h} - f)$ до u^*.

5. Обчислювальні аспекти. Використана регуляризація задачі мінімізації /I.2/ приводить до чисельних схем її розв"язування, достатньою умовою стійкості яких є умова /4.4/. Оскільки чисельне розв"язування задачі /4.I/ здійснюється, як правило, з фіксованим простором S_h^k, то вибір значення $\varepsilon > 0$ вимагає належної уваги. Зауважимо, що з нерівностей /2.3/ при достатньо малих $\varepsilon > 0$ випливає, що

$$\|\sigma\|^2_{H(div;\Omega)} \leq A_\varepsilon(\sigma,\sigma) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|\sigma\|^2_{H(div;\Omega)} \quad \forall\sigma \in H. \qquad /5.I/$$

Ця обставина приводить до евристичного висновку: зменшення параметра ε погіршує зумовленість матриці системи рівнянь /4.I/; вибір $\varepsilon = ch^k$, $c = const > 0$ обмежує ріст числа зумовленості цієї матриці. Більше того, при $k = 1$ можна надіятись, що під час розв"язування /4.I/ похибки заокруглення будуть найменшими.

6. Аналіз числових результатів. Для ілюстрації розглянемо задачу /I.I/ з $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid |x_i| \leq 1\} \subset R^2$, $\Gamma = \Gamma_1$, $f = 2$, яка моделює кручення призматичного стержня; при цьому компоненти вектора $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, які з точністю до знака збігаються з ненульовими компонентами тензора напружень, апроксимували білінійними поліномами на чотирикутних елементах [I]. Одержані результати зведені в таблицю.

У перший і другий рядок кожної графи внесено результати, одержані на сітці з 6x6 та I0xI0 скінченних елементів. Обчислення виконували з подвійною точністю, оскільки ординарна точність розв"язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь приводила до значного зростання похибок заокруглення при згущенні сітки. Оскільки для точного розв"язку $|\sigma_2^*(0,1)| = |\sigma_1^*(1,0)| = \max_{x\in\Omega,\, i=1,2} |\sigma_i^*(x)|$, то перший та другий стовбчики таблиці ілюструють вплив похибок заокруглень на наближений розв"язок. Видно, що ці похибки стають помітними при значеннях параметра регуляризації значно більших від оптимальних /$\varepsilon^{-1}_{опт} \in [40, 60]$ і $\varepsilon^{-1}_{опт} \in [100, 200]$ для сіток 6x6 та I0xI0 відповідно/. Відзначимо, що навіть при значеннях $\varepsilon = 10^{-3}$ відносні похибки не перевищують половини процента. Це дає змогу змінювати ε у процесі обчислень у досить

Залежність наближених розв"язків від параметру регуляризації

ε^{-1}	$10^4\times\sigma_1^{\varepsilon h}(1,0)$	$10^4\times\sigma_2^{\varepsilon h}(0,1)$	$10^4\times K(\sigma^{\varepsilon h})/4$	$10^4\times M(\sigma^{\varepsilon h})/4$
I0	I3346	I3346	5445	269
	I33I5	I33I5	5424	II4
20	I3452	I3452	5549	26I
	I34I9	I34I9	5528	I06
40	I3506	I3506	5603	259
	I3472	I3474	558I	I05
80	I3533	I3533	5630	259
	I350I	I3500	5608	I04
I00	I3536	I3540	5635	259
	I3503	I3508	56I4	I04
200	I3546	I3552	5646	258
	I35I3	I35I9	5624	I04
400	I3554	I3555	5652	258
	I35I3	I3530	5630	I04
800	I3556	I3559	5654	258
	I3498	I3548	5633	I04
I000	I3557	I3559	5655	258
	I35I7	I3529	5633	I04
Точне значення	I3506	I3506	5623	0

Примітка. $K(\sigma)=\|\sigma\|^2_{0,\Omega}$, $M(\sigma)=\|div\,\sigma-2\|^2_{0,\Omega}$.

широких межах. Оскільки значення $M(\sigma^{\varepsilon h})$ монотонно спадають до своїх асимптотичних значень /які залежать від параметра h /, то практично за верхню границю $\varepsilon_{опт}$ інтервалу оптимальних значень параметра регуляризації можна прийняти перше з найбільших значень ε , що задовольняють умову $dM(\sigma^{\varepsilon h})/d\varepsilon=0$. Цікаво, що асимптотичні значення $\max\limits_{x\in\Omega,\,i=1,2}|\sigma_i^{\varepsilon h}(x)|$ та $K(\sigma^{\varepsilon h})$ є верхніми оцінками відповідних характеристик точного розв"язку.

Запропонований метод ефективний, коли градієнт σ^* розв"язку /I.I/ достатньо гладкий, наприклад, наперервний в Ω. Якщо ж σ^* належить лише $H(div;\Omega)$, то необхідно внести відповідні зміни в побудову простору S_h^k. Інші підходи до цієї проблеми розглянуті в працях [3 - 7].

Список літератури: I. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. - Львов, 1981. - 88 с. 2. Сьярле Ф. Метод конечных элементов эллиптических задач. - М.: Мир, 1980. - 512 с. 3. Fix G.J., Gunzburger M.D., Nicolaides R.A. On mixed finite element methods for first order elliptic systems. - Numer. Math., 1981, 37, N1, p. 29-48. 4. Haslinger J., Hlaváček I. Convergence of a finite element method based on the dual variational formulation. - Apl. Mat., 1976, 21, N1, p. 43-65. 5. Křížek M. Conforming equilibrium finite element methods for some elliptic plane problems. - RAIRO/Numer. Anal., 1983, 17, N1, p. 35-65. 6. Lesaint P., Zlamal M. Superconvergence of the gradient of finite element solution. - RAIRO/Numer. Anal., 1979, 13, N2, p. 139-166. 7. Neittaanmäki P., Saranen J. On finite element approximation of the gradient for solution of Poisson equation. - Numer. Math., 1981, 37, N3, p. 333-337.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.84.