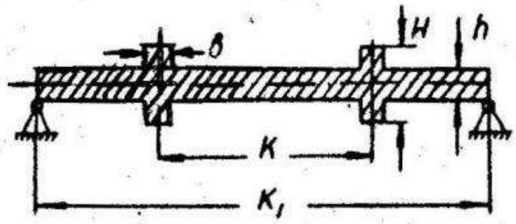
УДК 539.3

Л.Й.Ощипко

ПРО ОПТИМАЛЬНЕ ПІДКРІПЛЕННЯ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ КОНЦЕНТРИЧНИМ РЕБРОМ ЖОРСТКОСТІ

Розглянемо задачу оптимального проектування круглої пластинки товщини h, радіуса R_1, підкріпленої концентричним ребром жорсткості радіуса R. Ребро має прямокутний поперечний переріз з розмірами b і H /див. рисунок/.



Задачу розв"язуємо в двох постановках: визначаємо параметри конструкції, оптимальної за вагою та жорсткістю.

Задача оптимального проектування за вагою на прогин полягає в мінімізації ваги /об"єму/ конструкції

$$V = \pi(R_1^2 h_4 + 2h_1 h_2 (h_3 - h_4)) \qquad /1/$$

на підпросторі проектування

$$H = \{\bar{h} \mid w_{max} \leq [w];\ \delta_1 \leq [\delta_1]\}. \qquad /2/$$

Друга задача полягає в знаходженні

$$\min \max w(\bar{h}, r) \qquad /3/$$

на підпросторі проектування

$$H = \{\bar{h} \mid V(\bar{h}) \leq [V],\ \delta_1 \leq [\delta_1]\}, \qquad /4/$$

де $w(\bar{h}, r)$ – прогин пластинки; $\delta_1 = (1-\nu^2)\dfrac{bH^3}{Rh^3}$ – відносна жорсткість ребра на згин; $[w]$, $[V]$, $[\delta_1]$ – відповідно допустимі прогин, об"єм та відносна жорсткість ребра; $\bar{h}(h_1, h_2, h_3, h_4) = \bar{h}(R, b, H, h)$ – вектор регульованих параметрів.

Задачі /1/ – /2/ і /3/ – /4/ зводимо до задач геометричного програмування. Для цього представляємо об"єм і прогин пластинки двочленними позіномами, виділяючи позиноміальні члени й апроксимуючи залишкові члени одночленними позіномами згідно з формулами [I]

$$g_i(\bar h)=c_i\prod_{j=1}^{m}h_j^{a_{ij}}, \qquad /5/$$

$$a_{ij}=\left(\frac{\partial g_i(\bar h)}{\partial h_j}\,\frac{h_j}{g_i(\bar h)}\right)_{\bar h^*}, \quad j=\overline{1,m}, \qquad /6/$$

$$c_i=\left(g_i(\bar h)/\prod_{j=1}^{m}h_j^{a_{ij}}\right)_{\bar h^*},$$

де $\bar h^*$ – вихідна точка.

Тоді /I/–/2/, /3/–/4/ зводяться відповідно до задач геометричного програмування з нульовим ступенем важкості. Мінімізувати

$$g_0(\bar h)=V(\bar h)/\pi=\sum_{i=1}^{2}c_i\prod_{j=1}^{4}h_j^{a_{ij}} \qquad /7/$$

при умовах

$$h_j>0,\ j=\overline{1,4},$$

$$g_1(\bar h)=w_{max}(\bar h)/[w]=\sum_{i=3}^{4}c_i\prod_{j=1}^{4}h_j^{a_{ij}}\le 1,$$

$$g_2(\bar h)=\delta_1/[\delta_1]=c_5\,h_1^{-1}h_2h_3^{3}h_4^{-3}\le 1, \qquad /8/$$

та мінімізувати

$$g_0(\bar h)=w_{max}(\bar h)=\sum_{i=1}^{2}d_i\prod_{j=1}^{4}h_j^{a_{ij}} \qquad /9/$$

при умовах

$$h_j>0,\ j=\overline{1,4},$$

$$g_1(\bar h)=V(\bar h)/[V]=\sum_{i=3}^{4}d_i\prod_{j=1}^{4}h_j^{a_{ij}}\le 1, \qquad /10/$$

$$g_2(\bar h)=\delta_1/[\delta_1]=d_5h_1^{-1}h_2h_3^{3}h_4^{-3}\le 1.$$

На алгоритмічній мові PL/I складена програма, яка визначає максимальний прогин пластинки і точку, де він виникає, зводить задачу оптимального проектування до задачі геометричного програмування і розв"язує її. Одержані дані для випадку вільно опертої /жорстко защемленої/ пластинки, що знаходиться під дією рівномірного тиску /зосередженої сили в центрі/.

Якщо в задачі /3/–/4/ допустимий об"єм $[V]$ дорівнює $V_{опт}$ задачі /1/–/2/, то оптимальні параметри задач /1/–/2/ і /3/–/4/ збігаються.

Приклад. Розглянемо вільно оперту круглу пластинку під дією рівномірного тиску.

Прогин такої пластинки записуємо у вигляді [2].

$$w(r,\bar h)=\frac{qR_1^4}{64(1+\nu)D}\left\{\left(1-\frac{r^2}{R_1^2}\right)\left[5+\nu-(1+\nu)\frac{r^2}{R_1^2}\right]+w_1(\bar r,\bar h)\right\},$$

$$w_1(r,\bar h)=\frac{\kappa^2\delta_1(1+\nu)[(1+\nu)\kappa^2-(3+\nu)]}{2(1+\nu)+\delta_1[\kappa^2(1-\nu)+(1+\nu)]}\left\{\frac{2(1-\nu)}{1+\nu}\left(1-\frac{r^2}{R_1^2}\right)+\right.$$

$$\left.+2\left(1-\frac{r^2}{\kappa^2R_1^2}-2\ln\kappa\right)\right\},\quad 0\le r\le R,$$

$$w_1(r,\bar h)=\frac{(1+\nu)\kappa^2\delta_1[(1+\nu)\kappa^2-(3+\nu)]}{2(1+\nu)+\delta_1[\kappa^2(1-\nu)+(1+\nu)]}\left\{\frac{2(1-\nu)}{1+\nu}\left(1-\frac{r^2}{R_1^2}\right)-\right.$$

$$\left.-4\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right\},\quad R\le r\le R_1,$$

де ν – коефіцієнт Пуассона; D – циліндрична жорсткість пластинки; $\kappa=R/R_1$.

Задачі /1/–/2/ і /3/–/4/ розв"язуємо в безрозмірних параметрах $h_1=R/R_1$; $h_2=b/R_1$; $h_3=H/R_1$; $h_4=h/R_1$; $V_1=V/(\pi R_1^3)$; $w_1=w/\left(\frac{3}{16}\frac{q(1-\nu)R_1}{E}\right)$.

При $\nu=0{,}3$ і $[w_1]=0{,}1\ 10^6$ одержуємо такі оптимальні параметри:

δ_1	R/R_1	b/R_1	H/R_1	h/R_1	$V/(\pi R_1^3)$
3	$3{,}76\cdot10^{-1}$	$1{,}90\cdot10^{-2}$	$1{,}27\cdot10^{-1}$	$3{,}26\cdot10^{-2}$	$3{,}39\cdot10^{-2}$
5	$2{,}44\cdot10^{-1}$	$3{,}47\cdot10^{-2}$	$1{,}07\cdot10^{-1}$	$3{,}26\cdot10^{-2}$	$3{,}25\cdot10^{-2}$
7	$1{,}84\cdot10^{-1}$	$5{,}15\cdot10^{-2}$	$9{,}52\cdot10^{-2}$	$3{,}26\cdot10^{-2}$	$3{,}12\cdot10^{-2}$

Як і слід було чекати, зі зростанням відносної жорсткості ребра радіус його зменшується.

Список літератури: 1. Даффин Р., Питерсон З., Зенер К. Геометрическое программирование. – М.: Мир, 1972. – 307 с. 2. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. – К.: Наук. думка, 1964. – 380 с.

Стаття надійшла до редколегії 28.04.83