

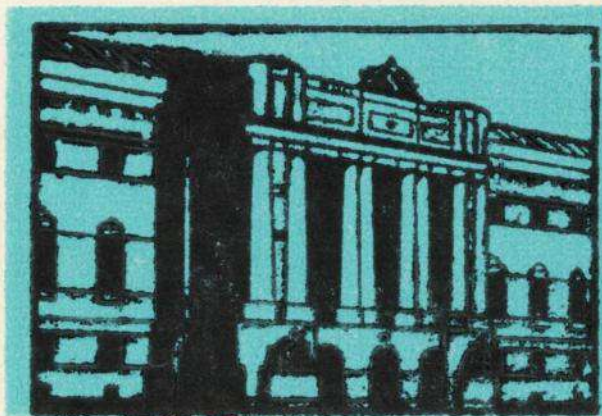
ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК
26

1986



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

Виходить з 1965 р.

ВИПУСК 26

ЗАДАЧІ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
І МЕХАНІКИ

Л Ь В І В

ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»

1986

УДК 518

В Вестнике помещены статьи по численным методам решения уравнений математической физики и задач оптимизации, статистические и динамические задачи механики сплошной среды.

Для научных работников, преподавателей и студентов старших курсов.

Библиогр. в конце статей.

Редакційна колегія: проф., д-р техн. наук Д.В.Гри-
лицький /відп. ред./, доц., канд. фіз.-мат. наук
Ю.М.Щербіна /відп. секр./, доц., канд. фіз.-мат. наук
М.Я.Бартіш, доц., канд. фіз.-мат. наук Й.В.Людке-
вич, проф., д-р техн. наук Н.П.Флейшман.

Адреса редакційної колегії:
290000 Львів-центр, вул. Університетська, 1.
Університет, кафедра прикладної математики

Редакція науково-технічної літератури
Зав. редакцією М.П. Парцей

В I702050000-017
M225/04/-86

Замовне

© Львівський державний
університет, 1986

М.Я.Бартіш, Л.Л.Роман
ПРО ОДИН РЕКУРСИВНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай дано нелінійне операторне рівняння

$$P(x) = 0, \quad /1/$$

де $P(x)$ – неперервний оператор, що діє з одного банахового простору X в інший. Для розв'язування /1/ широко використовують метод Ньютона-Канторовича [3]. Досить ефективний метод з праці [1], який за трудомісткістю кожної ітерації практично еквівалентний методу Ньютона-Канторовича, але має вищий порядок збіжності $(1 + \sqrt{2})$. На практиці поряд з основними методами доцільно застосовувати побудовані на їх базі рекурсивні [2] з оптимальною глибиною рекурсії. Розглянемо рекурсивний метод на базі методу з праці [1]. Запишемо його у вигляді

$$x_0 = z_0^{(0)} = \bar{x}_0 \quad - \text{початкове наближення,}$$

$$z_n^{(i+1)} = z_n^{(i)} - [P'(\bar{x}_n)]^{-1} P(z_n^{(i)}),$$

$$i = 0, 1, \dots, t-1,$$

$$x_{n+1} = z_{n+1}^{(0)} = z_n^t,$$

$$\bar{x}_{n+1} = x_{n+1} - \frac{1}{2} [P'(\bar{x}_n)]^{-1} P(x_{n+1}),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad /2/$$

Для послідовності $\{x_n\}$, визначеної з /2/, наявна така теорема.

Теорема. Нехай

1/ для початкового наближення x_0 існує оператор $G_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, причому $\|G_0\| \leq B_0$;

2/ $\|G_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$;

3/ для $x, y \in \Omega_0 = \{x : \|x - x_0\| \leq 4\eta_0\}$ мають місце оцінки $\|P''(x)\| \leq M, \|P''(x) - P''(y)\| \leq N\|x - y\|$;

4/ $h_0 = MB_0\eta_0, (1 - \frac{5}{2}h_0)\sqrt{2l} > 1, l h_0 < 1$,

де $l = \frac{5}{4} + \left[\frac{\varepsilon_0}{6} \frac{1}{1 - \frac{5}{2}h_0} + \frac{\varepsilon_0}{8} \left(1 - \frac{5}{2}h_0\right) \right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}, \varepsilon_0 = \frac{N}{MB_0}$;

$$5/ \quad q = \delta h_0 < 1; \quad \delta^{t+1} = 2\gamma^{t-1}\ell^2,$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{2}h_0\right) + \ell h_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{2}h_0}.$$

Тоді рівняння /1/ має в Ω_0 розв'язок, до якого збігається $\{x_n\}$, отримана з /2/, причому наявна оцінка

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{1}{2^{n-2}\ell^{n/2}} q^{D_n-1} \eta_0, \quad /3/$$

де $D_0 = 1$; $D_1 = t+1$; $D_n = (t+1)D_{n-1} + D_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$

Порядок збіжності $\{x_n\}$ визначають зі співвідношення

$$\varphi = t+1 + \frac{1}{\varphi}. \quad /4/$$

Доведення здійснимо за схемою Л.В.Канторовича [3].

З /2/, використовуючи умови теореми, отримуємо

$$\begin{aligned} \|P(z_0^{(1)})\| &\leq \left\| \int_0^1 (1-\tau) P''(x_0 + \tau(z_0^{(1)} - x_0)) \times \right. \\ &\quad \times (z_0^{(1)} - x_0)^2 d\tau \left. \right\| \leq \frac{M}{2} \eta_0^2 \\ \|z_0^{(2)} - z_0^{(1)}\| &\leq \frac{h_0}{2} \eta_0. \end{aligned} \quad /5/$$

Використовуючи рівність

$$\begin{aligned} \|P(z_0^{(i+1)})\| &= \left\| \int_0^1 [P'(\bar{x}_0) - P'(z_0^{(i)} + \tau(z_0^{(i+1)} - z_0^{(i)}))] d\tau \times \right. \\ &\quad \times [P'(\bar{x}_0)]^{-1} P(z_0^{(i)}) \left. \right\|, \end{aligned} \quad /6/$$

одержуємо оцінки

$$\begin{aligned} \|P(z_0^{(2)})\| &\leq \frac{M}{2} (1+h_0) h_0 \eta_0^2, \\ \|P(z_0^{(t)})\| &\leq \frac{M}{2} (1+h_0)^{t-1} h_0^{t-1} \eta_0^2 \end{aligned} \quad /7/$$

і

$$\begin{aligned} \|z_0^{(3)} - z_0^{(2)}\| &\leq \frac{1+h_0}{2} h_0^2 \eta_0, \\ \|z_0^{(t)} - z_0^{(t-1)}\| &\leq \frac{1}{2} (1+h_0)^{t-2} h_0^{t-1} \eta_0. \end{aligned} \quad /8/$$

Тепер можемо записати умови теореми для точки x_1 . Легко бачити, що

$$\|P(x_1)\| = \|P(z_0^{(t)})\| \leq \frac{1}{2} (1+h_0)^{t-1} h_0^t \|P(x_0)\| < \frac{q^{D_1-1}}{2\sqrt{2}\ell} \|P(x_0)\|, \quad /9/$$

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|z_0^{(t)} - x_0\| \leq \eta_0 + \frac{1}{2} h_0 \eta_0 + \frac{1}{2} h_0^2 (1+h_0) \eta_0 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} h_0^{t-1} (1+h_0)^{t-2} \eta_0 \leq \left[1 + \frac{\frac{1}{2} h_0}{1-h_0(1+h_0)} \right] \eta_0 \leq 2 \eta_0 ,$$

$$\| \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \| \leq 2 \eta_0 + \frac{1}{2} \eta_0 \leq \frac{5}{2} \eta_0 , \quad \bar{x}_1 \in \Omega_0 . \quad /10/$$

Умова 1. Використовуючи розклад у ряд Тейлора [4], запишемо

$$\begin{aligned} [P'(\bar{x}_1)]^{-1} &= [P'(\bar{x}_0) - \int_0^1 P''(\bar{x}_0 + \tau(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)) d\tau \times \\ &\quad \times (\bar{x}_1 - \bar{x}_0)]^{-1} . \end{aligned} \quad /11/$$

Звідси, враховуючи умови теореми, випливає, що оператор $\Gamma_1 = [P'(\bar{x}_1)]^{-1}$ існує та має місце оцінка

$$\| \Gamma_1 \| \leq \frac{B_0}{1 - \frac{5}{2} M B_0 \eta_0} \leq \frac{B_0}{1 - \frac{5}{2} h_0} = B_1 . \quad /12/$$

Умова 2. З /9/ і /12/ дістаємо

$$\eta_1 = \| \Gamma_1 P(x_1) \| \leq B_1 \| P(x_1) \| \leq \frac{B_0}{1 - \frac{5}{2} h_0} \cdot \frac{q^{D_1-1}}{2\sqrt{2}\ell} \| P(x_0) \| \leq \frac{q^{D_1-1}}{2\sqrt{2}} \eta_0 . /13/$$

Умова 3. Для $x \in \Omega_1 = \{x: \|x - x_1\| \leq 4\eta_1\}$ запишемо

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &\leq \|x - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq 2\eta_0 + 4\eta_1 \leq \\ &\leq 2 \left(1 + \frac{q^{D_1-1}}{\sqrt{2}} \right) \eta_0 < 4\eta_0 , \end{aligned} \quad /14/$$

тобто $\Omega_1 \subset \Omega_0$.

Умова 4. З /12/ і /13/ отримуємо

$$h_1 = M B \eta_1 \leq \frac{M B_0}{1 - \frac{5}{2} h_0} \cdot \frac{q^{D_1-1}}{2\sqrt{2}} \eta_0 \leq \frac{q^{D_1-1}}{\sqrt{2}} h_0 < h_0 . \quad /15/$$

Умову 5 легко одержати прямою підстановкою. Оскільки сам метод починає працювати з x_1 , то необхідно визначити виконання умов теореми для точки x_2 . Проводячи викладки, аналогічні попереднім, маємо

$$\begin{aligned} \|P(z_1^{(1)})\| &\leq M^2 B_0^2 B_1^2 \left\{ \frac{5}{4} \|P(x_0)\| + \left(\frac{\varepsilon_0}{6} \frac{1}{1 - \frac{5}{2} h_0} + \frac{\varepsilon_0}{8} (1 - \frac{5}{2} h_0) \right) \times \right. \\ &\quad \times \|P(x_1)\| \left. \right\} \|P(x_1)\|^2 \leq h_0 h_1 \|P(x_1)\| \left\{ \frac{5}{4} + \left(\frac{\varepsilon_0}{6} \frac{1}{1 - \frac{5}{2} h_0} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\varepsilon_0}{8} (1 - \frac{5}{2} h_0) \right) \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\} \leq \ell h_0 h_1 \|P(x_1)\| , \\ \|z_1^{(2)} - z_1^{(1)}\| &\leq \ell h_0 h_1 \eta_1 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|P(x_1^{(2)})\| &\leq M \left\{ \|x_1^{(1)} - x_1\| + \|x_1 - \bar{x}_1\| + \frac{1}{2} \|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\| \right\} \times \\
&\times B_1 \|P(x_1^{(1)})\| \leq \gamma \ell h_0 h_1^2 \|P(x_1)\|, \\
\|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\| &\leq \gamma \ell h_0 h_1^2 \eta_1, \\
&\dots \dots \dots \\
\|P(x_1^{(t)})\| &\leq \gamma^{t-1} \ell h_0 h_1^t \|P(x_1)\|. \quad /16/
\end{aligned}$$

Звідси

$$\|P(x_2)\| = \|P(x_1^{(t)})\| \leq \gamma^{t-1} \ell h_0 \left(\frac{q^{D_1-1} h_0}{\sqrt{2}} \right)^t \cdot \frac{q^{D_1-1}}{2\sqrt{2}\ell} \|P(x_0)\| \leq \frac{q^{D_2-1}}{2^3 \ell^2}, \quad /17/$$

$$\begin{aligned}
\|x_2 - x_1\| &\leq \eta_1 + \ell h_0 h_1 \eta_1 + \dots + \gamma^{t-2} \ell h_0 h_1^{t-1} \eta_1 \leq \\
&\leq \left[1 + \ell h_0 h_1 \frac{1 - \gamma^{t-1} h_1^{t-1}}{1 - \gamma h_1} \right] \eta_1 \leq 2 \eta_1, \quad /18/
\end{aligned}$$

$$\|\bar{x}_2 - \bar{x}_1\| \leq \|\bar{x}_2 - x_2\| + \|x_2 - x_1\| + \|\bar{x}_1 - x_1\| \leq \frac{5}{2} \eta_1. \quad /19/$$

Перевіримо виконання умов 1 - 5 теореми для точки x_2 .

Умова 1:

$$\|\Gamma_2\| \leq \frac{B_1}{1 - \frac{5}{2} h_1} = B_2.$$

Умова 2:

$$\eta_2 = \|\Gamma_2 P(x_2)\| \leq \frac{B_1}{1 - \frac{5}{2} h_1} \cdot \frac{q^{D_2-1} \|P(x_0)\|}{2^3 \ell^2} \leq \frac{q^{D_2-1}}{2^2 \ell} \eta_0.$$

Умова 4:

$$h_2 = MB_2 \eta_2 \leq \frac{MB_0}{(1 - \frac{5}{2} h_0)^2} \cdot \frac{q^{D_2-1}}{2^2 \ell} \eta_0 \leq \frac{q^{D_2-1} h_0}{2} < h_0.$$

Умови 3, 5 перевіряють простим підстановкою.

Використовуючи метод математичної індукції, записуємо

$$\|P(x_n)\| \leq \frac{q^{D_n-1}}{2^{3/2 n} \ell^n} \|P(x_0)\|, \quad /20/$$

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2 \eta_{n-1}, \quad /21/$$

$$\eta_n \leq \frac{q^{D_n-1}}{2^n \ell^{n/2}} \eta_0, \quad /22/$$

$$h_n \leq \frac{q^{D_n-1} h_0}{2^{n/2}}. \quad /23/$$

Легко бачити, що $x_n \in \Omega_0$. Справді

$$\|x_n - x_0\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + \dots + \|x_1 - x_0\| \leq 2(\eta_{n-1} + \dots + \eta_0) \leq 2 \left(\frac{q^{D_{n-1}-1}}{\ell^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1}} + \dots + 1 \right) \eta_0 \leq 4\eta_0.$$

З нерівностей $n+m-1$

$$\|x_n - x_{n+m}\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq 2 \sum_{i=n}^{\infty} q^{D_i-1} \frac{\eta_0}{2^i \ell^{i/2}} \leq \frac{q^{D_n-1}}{2^{n-2} \ell^{n/2}} \eta_0$$

впливає існування граничного елемента $x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, при цьому має місце оцінка /3/ теореми. Переходячи до границі у нерівності /20/, дістаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = P(x_*) = 0,$$

тобто x_* є розв'язком рівняння /1/.

При виведенні оцінки /23/ маємо нерівність

$$h_n \leq \gamma^{t-1} \ell h_{n-2} h_{n-1}^t \eta_{n-1} \frac{1}{(1 - \frac{5}{2} h_0)^2} \leq \frac{\gamma^{t-1} \ell}{(1 - \frac{5}{2} h_0)^2 BM} h_{n-1}^{t+1} h_{n-2}. \quad /24/$$

Аналогічно [5] із оцінки /24/ одержуємо рівняння /4/ для визначення порядку збіжності послідовності $\{x_n\}$, визначеної з /2/. Теорема доведена.

Як і в праці [2], можна визначити оптимальну глибину рекурсії при виборі методу з класу /2/ для розв'язування конкретного рівняння.

Список літератури: 1. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь. - Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 5, с.387-391. 2. Б а р т і ш М.Я., Щ е р б і н а Ю.Н. Итерационные формулы, полученные с помощью рекурсии. - В кн.: Мат. сб. К.: Наук. думка, 1976, с.50-53. 3. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона. - Тр. мат. ин-та им.Стеклова, 1949, № 28, с. 104-144. 4. К а р т а н А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. - М.: Мир, 1971. - 392 с. 5. Schmidt I.W. Z.angen.-Math. Mech., 1963, N43, p.1-8.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.85

М.Я.Баріш, І.В.Огірко, В.М.Фарат
 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
 ДВОВИМІРНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
 У ЗМІШАНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Розглянемо нелінійне рівняння теплопровідності [4]

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{H_\beta}{H_\alpha} \lambda \frac{\partial t}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H_\alpha}{H_\beta} \lambda \frac{\partial t}{\partial \beta} \right) \right] = -\omega \quad /1/$$

в D з умовою на границі

$$t|_{\Gamma_i} = t_i, i = \overline{1, S}; U\Gamma_i = \Gamma, \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, i \neq j, \quad /2/$$

де $H_\alpha(\alpha, \beta) = A(1 + \kappa_1 \gamma)$; $H_\beta(\alpha, \beta) = B(1 + \kappa_2 \gamma)$;

$\kappa_1 = \frac{1}{R_\alpha}$; $\kappa_2 = \frac{1}{R_\beta}$ - кривини; $-H \leq \gamma \leq H$; A, B - коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні [5]; ω - густина внутрішніх джерел тепла; коефіцієнт теплопровідності λ згідно з табличними даними [1] залежить від температури $t(\alpha, \beta)$.

Зауважимо, при $H_\alpha = H_\beta = 1$ ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0, A = B = 1$) /1/ збігається з відповідним рівнянням у декартовій системі координат [4].

Перепишемо рівняння /1/ у вигляді

$$\rho = \lambda \left[f_1 \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2} + f_2 \frac{\partial^2 t}{\partial \beta^2} + f_3 \frac{\partial t}{\partial \alpha} + f_4 \frac{\partial t}{\partial \beta} \right] + \frac{d\lambda}{dt} \left[f_1 \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha} \right)^2 + f_2 \left(\frac{\partial t}{\partial \beta} \right)^2 \right] + H_\alpha^3 H_\beta^3 \omega = 0, \quad /3/$$

де

$$f_1(\alpha, \beta) = H_\alpha H_\beta^3; \quad f_2(\alpha, \beta) = H_\alpha^3 H_\beta;$$

$$f_3(\alpha, \beta) = H_\alpha H_\beta^2 \frac{\partial H_\beta}{\partial H_\alpha} - H_\beta^3 \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha};$$

$$f_4(\alpha, \beta) = H_\alpha^2 H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} - H_\alpha^3 \frac{\partial H_\beta}{\partial \beta}.$$

Для розв'язування задачі /3/-/2/ застосовуємо метод Ньютона-Канторовича [3]. При цьому отримуємо послідовність лінійних задач відносно функції $V^{(n)}(\alpha, \beta)$:

$$\lambda^{(n)} \left[f_1^{(n)} \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial \alpha^2} + f_2^{(n)} \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial \beta^2} + f_3^{(n)} \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \alpha} + f_4^{(n)} \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \beta} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \left[f_1^{(n)} \frac{\partial t^{(n)}}{\partial \alpha} \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \alpha} + f_2^{(n)} \frac{\partial t^{(n)}}{\partial \beta} \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \beta} \right] + \\
& + \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \left[f_1^{(n)} \frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial \alpha^2} + f_2^{(n)} \frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial \beta^2} + f_3^{(n)} \frac{\partial t^{(n)}}{\partial \alpha} + \right. \\
& \left. + f_4^{(n)} \frac{\partial t^{(n)}}{\partial \beta} \right] V^{(n)} + \frac{d^2 \lambda^{(n)}}{dt^2} \left[f_1^{(n)} \left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial \alpha} \right)^2 + f_2^{(n)} \left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial \beta} \right)^2 \right] V^{(n)} = \rho^{(n)} / 4 /
\end{aligned}$$

$$t^{(n+1)} = t^{(n)} - \alpha_n V^{(n)} \in D; \quad t^{(n+1)} / \Gamma_i = t_i, \quad i = \overline{1, S}, \quad /5/$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$, $t^{(0)}$ - початкове наближення; $0 < \alpha_n \leq 1$ параметр збіжності ітераційного процесу для випадку "поганого" початкового наближення.

Вважаємо, що D - прямокутник у системі координат α, β . Дискретизуємо область D рівномірною сіткою [2]:

$$D_h = \{(\alpha_i, \beta_j): \alpha_i = ih_\alpha, \beta_j = jh_\beta, i = \overline{0, M}, j = \overline{0, N}\},$$

де h_α, h_β - відповідні кроки сітки по осях α і β .

Замінімо /4/ у точці (α_i, β_j) різницевим рівнянням з другим порядком апроксимації [2]. Тоді запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$b_{1,ij}^{(n)} V_{i,j-1}^{(n)} + b_{2,ij}^{(n)} V_{i-1,j}^{(n)} + b_{3,ij}^{(n)} V_{i,j}^{(n)} + b_{4,ij}^{(n)} V_{i+1,j}^{(n)} + b_{5,ij}^{(n)} V_{i,j+1}^{(n)} = b_{6,ij}^{(n)}, \quad /6/$$

де $V_{ij}^{(n)} = 0$; $i = \overline{0, M}$ при $j = 0, N$; $j = \overline{0, N}$ при $i = \overline{0, M}$;

$$b_{1,ij}^{(n)} = \left\{ \lambda \left[\frac{f_2}{h_\beta^2} - \frac{f_4}{2h_\beta} \right] - f_4 \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial t}{\partial \beta} / h_\beta \right\}_{ij}^{(n)} + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2);$$

$$b_{2,ij}^{(n)} = \left\{ \lambda \left[\frac{f_1}{h_\alpha^2} - \frac{f_3}{2h_\alpha} \right] - f_3 \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial t}{\partial \alpha} / h_\alpha \right\}_{ij}^{(n)} + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2);$$

$$\begin{aligned}
b_{3,ij}^{(n)} = & \left\{ \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \left[f_1 \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha} \right)^2 + f_2 \left(\frac{\partial t}{\partial \beta} \right)^2 \right] - \frac{2\lambda f_1}{h_\alpha^2} - \frac{2\lambda f_2}{h_\beta^2} + \right. \\
& \left. + \frac{d\lambda}{dt} \left[f_1 \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2} + f_2 \frac{\partial^2 t}{\partial \beta^2} + f_3 \frac{\partial t}{\partial \alpha} + f_4 \frac{\partial t}{\partial \beta} \right] \right\}_{ij}^{(n)} + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2);
\end{aligned}$$

$$b_{4,ij}^{(n)} = \left\{ \lambda \left[\frac{f_1}{h_\alpha^2} + \frac{f_3}{2h_\alpha} \right] + f_3 \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial t}{\partial \alpha} / h_\alpha \right\}_{ij}^{(n)} + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2);$$

$$b_{5,ij}^{(n)} = \left\{ \lambda \left[\frac{f_2}{h_p^2} + \frac{f_4}{2h_p} \right] + f_4 \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial t}{\partial p} / h_p \right\}_{ij}^{(n)} + O(h_\alpha^2 + h_p^2);$$

$$b_{6,ij}^{(n)} = P_{ij}^{(n)} + O(h_\alpha^2 + h_p^2).$$

Для розв'язування системи /6/ можна використовувати методи матричної прогонки, верхньої релаксації тощо.

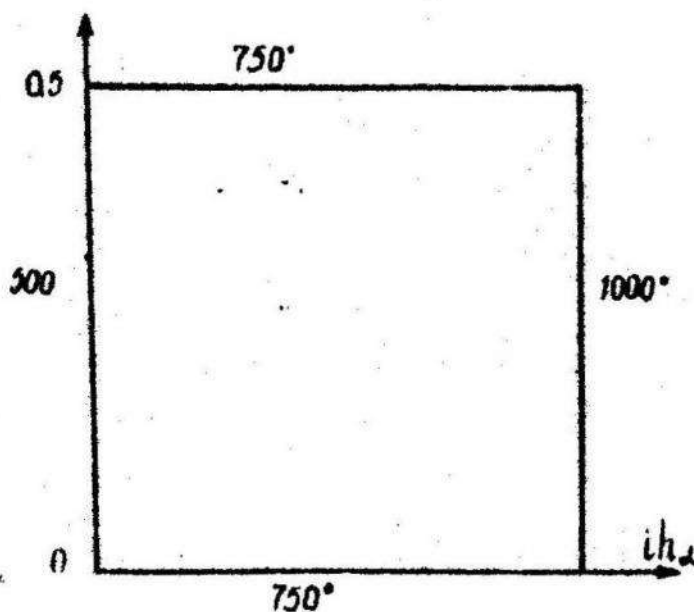


Рис. 1.

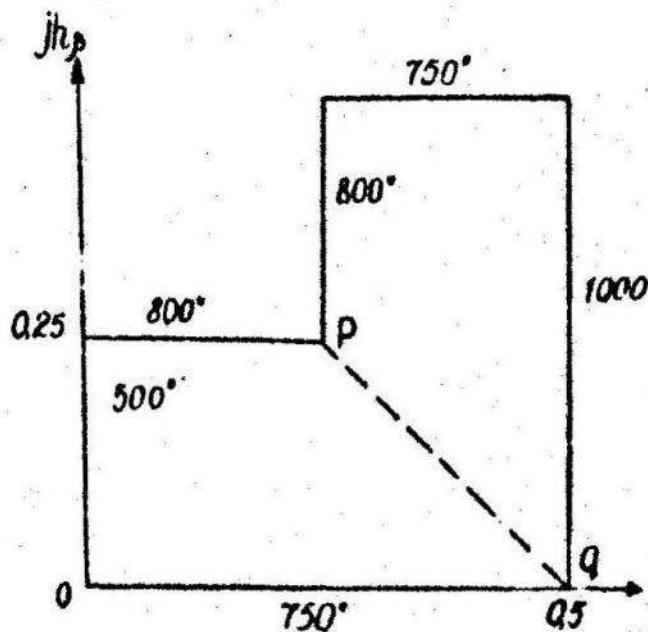


Рис. 2.

На практиці така методика застосовувалась для сталі марки 08 КП [1]. Розв'яземо дві задачі для областей і граничних умов, показаних на рис. 1, 2. При цьому вибираємо $\omega = 1$;

$$A(\alpha, \beta) = 1 + 0,1 \alpha + 0,2 \beta; \quad B(\alpha, \beta) = 1 + 0,5 \alpha + 0,7 \beta; \quad h_\alpha = h_\beta = 0,05; \quad K_1 = 0,1; \quad K_2 = 0,2; \quad \gamma = 0,01.$$

Для визначення $\lambda(t)$ з табличних даних [1] розглянемо три способи апроксимації:

1/ $\lambda(t) \sim L_1(t) = 54,2 - 0,036t$ - пряма лінія, яка найліпше наближає табличні дані на всьому проміжку $[t_0, t_k]$;

2/ $\lambda(t) \sim L_1(t)$ - ламана лінія, яка побудована за табличними значеннями функції $\lambda(t)$ на проміжку $[t_0, t_k]$;

3/ $\lambda(t) \sim L_2(t)$ - відрізок параболи на проміжку $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ ($t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$).

Таблиця 1

Розв'язок задачі /рис. 1/ $\gamma = 0,25$

λ	α								
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
1	549,5	598,1	644,7	689,2	732,9	777,4	824,6	876,4	934,4
2	551,0	601,1	648,6	693,8	738,4	784,2	832,7	886,7	942,4
3	551,1	601,1	648,8	693,7	738,5	784,5	833,1	887,7	942,7

Таблиця 2

Розв'язок задачі /рис. 2/ на лінії $pq(\alpha + \beta = 0,5)$

λ	α				
	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
1	800,0	822,9	843,8	861,4	872,4
2	800,0	827,2	851,0	869,4	881,4
3	800,0	826,7	849,3	869,1	882,5

Розв'язок задачі /1/-/2/ у першому випадку /рис. 1/ наведений у табл. 1 для $\gamma = 0,25$, а для другого випадку /рис. 2/ - у табл. 2 на лінії $pq(\alpha + \beta = 0,5)$. Як бачимо, при практичній реалізації методу достатньо для визначення $\lambda(t)$ вибрати ламану лінію. Треба відзначити, що для розглянутих вище задач досить легко отримати "хороше" початкове наближення і тим самим використовувати метод Ньютона-Канторовича в основному варіанті

$1/\alpha_n = 1/$. Ми одержали результати за чотири ітерації методом Ньютона-Канторовича. Під час практичної реалізації методу вибирали різні значення для h_α і h_β . Найбільш доцільним виявився випадок $h_\alpha = h_\beta$. Надалі розглядатимемо випадки більш складних областей, а також інших граничних умов.

Список літератури: 1. Безухов Н.И., Бажанов В.Д., Гольденблат И.И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебание в условиях высоких температур. - М.: Машиностроение, 1965. - 568 с. 2. Березин И.С., Жидков В.П. Методы вычислений. М.: Наука, 1966. - 464 с. 3. Канторович Л.В. О методе Ньютона. - Тр. мат. ин-та АН СССР, 1949, № 28, с.104-144. 4. Подстригач Я.С., Коляно В.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. - К.: Наук. думка, 1981. - 344 с. 5. Подстригач Я.С., Швець Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. - К.: Наук. думка, 1978. - 344 с.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.84

УДК 519.6

О.М.Щербина, Б.М.Голуб
ИТЕРАТИВНА РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ МЕТОДУ З ПАМ'ЯТТЮ
ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянемо задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad /1/$$

$$X = \{x: x \in H, g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; g_i(x) = 0, i = \overline{m+1, s}\}, \quad /2/$$

де функції $f(x), g_i(x), i = \overline{1, s}$ визначені на гільбертовому просторі H .

Припускаємо, що множина X непорожня, а

$$\min_X f(x) = f_* > -\infty, X_* = \{x: x \in X, f(x) = f_*\} \neq \emptyset. \quad /3/$$

Обмеження типу рівностей і нерівностей з /2/ враховуємо з допомогою штрафної функції

$$h(x) = \sum_{i=1}^m (\max\{0; g_i(x)\})^p + \sum_{i=m+1}^s |g_i(x)|^p, \quad /4/$$

$x \in H, p > 3.$

Складемо функцію Тихонова

$$T_k(x) = f(x) + A_k h(x) + \alpha_k \|x\|^2/2, \quad x \in H, \quad /5/$$

де $\alpha_k > 0, A_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k^{-1} = 0$.

Для розв'язання задачі /1/-/2/ дослідимо ітеративну регуляризацию методу з пам'яттю [1, 2, 5], порядок збіжності якого $1 + \sqrt{2}$:

$$x_{k+1} = x_k - [T_k''(\bar{x}_k)]^{-1} T_k'(x_k), \quad /6/$$

$$\bar{x}_k = \begin{cases} x_0, & \text{якщо } k=0 \\ x_k - \frac{1}{2} [T_k''(\bar{x}_{k-1})]^{-1} T_k'(x_k), & \text{якщо } k=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Достатні умови збіжності методу /6/ дає наступна теорема.

Теорема. Нехай: 1) функції $f(x), g_i(x), i = \overline{1, l}$ належать $C^3(H)$, функції $f(x), g_i(x), i = \overline{1, m}, |g_i(x)|, i = \overline{m+1, l}$ випуклі на H , виконуються умови /3/ 1, крім цього,

$$\|h'(x)\| \leq L_0(1 + \|x\|),$$

$$\max\{\|f'''(x)\|, \|h'''(x)\|\} \leq M,$$

$$\max\{\|f'''(x) - f'''(y)\|, \|h'''(x) - h'''(y)\|\} \leq L\|x - y\|, \\ x, y \in H,$$

$$M = \text{const} > 0, L_0 = \text{const} > 0, L = \text{const} > 0;$$

2/ функція Лагранжа

$$L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^l u_i g_i(x)$$

на множині $H \times U_0, U_0 = \{u = (u_1, \dots, u_l) : u_i \geq 0, \dots, u_m \geq 0\}$ має сідлову точку $(x_*, u^*) \in H \times U_0$ у наступному сенсі:

$$L(x_*, u) \leq L(x_*, u^*) \leq L(x, u^*), \quad x \in H, u \in U_0;$$

3/ для нормального розв'язку x_* задачі /1/-/2/ (тобто $x_* \in X_*, \|x_*\| = \min_{X_*} \|x\|$) відома апріорна оцінка $\|x_*\| \leq d$;

4/ числові послідовності $\{\alpha_k\}, \{A_k\}$ такі, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k A_k^{q-1} = +\infty, \quad q = p(p-1)^{-1}, \quad /7/$$

$$1 \leq \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \leq 2, \quad 1 \leq \frac{A_{k+1}}{A_k} \leq 2, \quad A_k \geq 1, \quad \frac{A_{k+1} - A_k}{\alpha_{k+1}} \leq \frac{1}{L_0}, \quad /8/$$

$$\frac{(\alpha_k - \alpha_{k-1})A_{k+1}}{\alpha_{k+1}^2} \leq \frac{1}{3Rlt}, \quad \frac{(A_{k+1} - A_k)A_{k+1}}{\alpha_{k+1}^2} \leq \frac{1}{3\ell L_0 t(1+R)}, \quad /9/$$

де $R = (d^2 + 2|u^*|^2 q^{-1} p^{1-q} \max_{k \geq 1} \alpha_k^{-1} A_k^{1-q})^{1/2}$;

$$l^2 = M^2 + \frac{L}{3} \frac{\alpha_0}{A_0}, \quad |u^*|^2 = \sum_{i=1}^n |u_i^*|^2;$$

t - довільне фіксоване число, $t \geq 48$;

б/ початкове наближення x_0 для послідовності $\{x_k\}$, яка визначається /6/, і числа A_0, α_0 такі, що

$$A_0 \ell t \|T'_0(x_0)\| \leq \alpha_0^2. \quad /10/$$

Тоді

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_*\| = 0. \quad /11/$$

Доведення. При зроблених допущеннях функція $T_k(x) \in C^3(H)$ сильно випукла на H і

$$\langle T_k''(x)y, y \rangle \geq \alpha_k \|y\|^2, \quad x, y \in H, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Звідси [3]

$$\| [T_k''(x)]^{-1} \| \leq \alpha_k^{-1}, \quad x \in H, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad /12/$$

Введемо послідовність $\{z_k\}$, яка однозначно визначається умовою

$$T_k(z_k) = \min_H T_k(z)$$

або

$$T'_k(z_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Послідовність $\{z_k\}$ збігається до єдиного нормального розв'язку x_* задачі /1/-/2/ [3], тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - x_*\| = 0. \quad /13/$$

Оскільки

$$\|x_k - x_*\| \leq \|x_k - z_k\| + \|z_k - x_*\|,$$

то для доведення рівності /11/ достатньо виявити, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - z_k\| = 0. \quad /14/$$

З сильною випуклості. $T_K(x)$ випливає

$$\alpha_K \|x_{K+1} - z_K\|^2 \leq \langle T'_K(x_{K+1}) - T'_K(z_K), x_{K+1} - z_K \rangle = \\ = \langle T'_K(x_{K+1}), x_{K+1} - z_K \rangle.$$

Звідси маємо

$$\|x_{K+1} - z_K\| \leq \|T'_K(x_{K+1})\| \alpha_K^{-1}. \quad /15/$$

Враховувачи, що $\|z_K\| \leq R$ [3], з /15/ отримуємо

$$\|x_{K+1}\| \leq \|z_K\| + \|x_{K+1} - z_K\| \leq R + \alpha_K^{-1} \|T'_K(x_{K+1})\|. \quad /16/$$

Введемо числові послідовності

$$a_K = \|T'_K(x_K)\|, \quad b_{K+1} = \|\bar{x}_{K+1} - \bar{x}_K\|, \quad c_K = \alpha_K^{-1} a_K, \quad K=0,1,2,\dots$$

Покажемо, що

$$c_K \leq \alpha_K A_K^{-1}(\ell t), \quad K=0,1,2,\dots \quad /17/$$

а також

$$b_K \leq 2\alpha_K^{-1} a_{K-1}, \quad K=1,2,\dots \quad /18/$$

При $K=0$ нерівність /17/ випливає з умови /10/. Доведемо нерівності /17/ і /18/ при $K=1$:

$$a_1 = \|T'_1(x_1)\| \leq \|T'_0(x_1)\| + \|T'_1(x_1) - T'_0(x_1)\| \leq \\ \leq \|T'_0(x_1)\| + (\alpha_0 - \alpha_1) \|x_1\| + (A_1 - A_0) \|h'(x_1)\| \leq \\ \leq \|T'_0(x_1)\| + [\alpha_0 - \alpha_1 + L_0(A_1 - A_0)] \|x_1\| + L_0(A_1 - A_0).$$

Далі з врахуванням нерівностей /8/ і /16/ при $K=0$

$$a_1 \leq 4\alpha_1\alpha_0^{-1} \|T'_0(x_1)\| + R(\alpha_0 - \alpha_1) + L_0(1+R)(A_1 - A_0). \quad /19/$$

Оцінимо $\|T'_0(x_1)\|$. З /6/ запишемо

$$T'_0(x_1) = T'_0(x_1) - T'_0(x_0) - T''_0(\bar{x}_0)(x_1 - x_0). \quad /20/$$

Розкладемо у правій частині рівності /20/ $T'_0(x_1)$ за формулою Тейлора [4]:

$$T'_0(x_1) = T'_0(x_0) + T''_0(x_0)(x_1 - x_0) + \\ + \int_0^1 (1-\tau) T'''_0(x_0 + \tau(x_1 - x_0))(x_1 - x_0)^2 d\tau - \\ - T'_0(x_0) - T''_0(\bar{x}_0)(x_1 - x_0).$$

Використовуючи умови теореми і те, що $\bar{x}_0 = x_0$, запишемо

$$\|T'_0(x_1)\| \leq \frac{1}{2}(1+A_0)M\|x_1-x_0\|^2 \leq A_0\alpha_0^{-2}la_0^2.$$

Підставивши цю оцінку в /19/, матимемо

$$a_1 \leq 4\alpha_1\alpha_0^{-3}A_0la_0^2 + \frac{2}{3}\alpha_1^2A_1^{-1}(lt)^{-1}.$$

Оцінимо c_1 :

$$\begin{aligned} c_1 = \alpha_1^{-1}a_1 &\leq 4\alpha_0^{-3}A_0la_0^2 + \frac{2}{3}\alpha_1A_1^{-1}(lt)^{-1} = \\ &= 4\alpha_0^{-1}A_0c_0^2l + \frac{2}{3}\alpha_1A_1^{-1}(lt)^{-1} \leq \\ &\leq 4\alpha_0^{-1}A_0l\alpha_0^2A_0^{-2}(lt)^{-2} + \frac{2}{3}\alpha_1A_1^{-1}(lt)^{-1} = \\ &= \alpha_1A_1^{-1}(lt)^{-1}\left[4\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\frac{A_1}{A_0}t^{-1} + \frac{2}{3}\right] \leq \\ &\leq \alpha_1A_1^{-1}(lt)^{-1}\left[16t^{-1} + \frac{2}{3}\right] \leq \\ &\leq \alpha_1A_1^{-1}(lt)^{-1}. \end{aligned}$$

Далі

$$b_1 = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\| = \|\bar{x}_1 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq \frac{1}{2}\alpha_1^{-1}a_1 + \alpha_0^{-1}a_0 \leq 2\alpha_1^{-1}a_0.$$

Нехай нерівності /17/, /18/ справедливі при деякому $K \geq 2$.

З умови /6/ маємо

$$T'_K(x_{K+1}) = T'_K(x_{K+1}) - T'_K(x_K) - T''_K(\bar{x}_K)(x_{K+1} - x_K). \quad /21/$$

Розкладемо $T'_K(x_{K+1})$ за формулою Тейлора [4]:

$$\begin{aligned} T'_K(x_{K+1}) &= T'_K(x_K) + T''_K(x_K)(x_{K+1} - x_K) + \\ &+ \int_0^1 (1-\tau)T'''_K(x_K + \tau(x_{K+1} - x_K))(x_{K+1} - x_K)^2 d\tau + \\ &+ \frac{1}{2}T'''_K(x_K)(x_{K+1} - x_K)^2 - \frac{1}{2}T'''_K(x_K)(x_{K+1} - x_K)^2 = \\ &= T'_K(x_K) + T''_K(x_K)(x_{K+1} - x_K) + \frac{1}{2}T'''_K(x_K)(x_{K+1} - x_K)^2 + J_{1,K}, \\ \text{де } J_{1,K} &= \int_0^1 (1-\tau)[T'''_K(x_K + \tau(x_{K+1} - x_K)) - T'''_K(x_K)](x_{K+1} - x_K)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Підставимо цей розклад в /21/ і ще раз використаємо формулу Тейлора:

$$T'_K(x_{K+1}) = T'_K(x_K) + T''_K(x_K)(x_{K+1} - x_K) +$$

$$+ \frac{1}{2} T_K'''(x_K)(x_{K+1}-x_K)^2 + \dot{J}_{1,K} - T_K'(x_K) - \\ - T_K''(x_K)(x_{K+1}-x_K) - T_K'''(x_K)(\bar{x}_K - x_K)(x_{K+1}-x_K) - \dot{J}_{2,K},$$

де $\dot{J}_{2,K} = \int_0^1 [T_K'''(x_K + \tau(\bar{x}_K - x_K)) - T_K'''(x_K)](\bar{x}_K - x_K)(x_{K+1} - x_K) d\tau.$
3 /6/ записуємо

$$T_K'(x_{K+1}) = -\frac{1}{2} T_K'''(x_K) [T_K''(\bar{x}_K)]^{-1} T_K'(x_K)(x_{K+1}-x_K) + \\ + \frac{1}{2} T_K'''(x_K) [T_K''(\bar{x}_{K-1})]^{-1} T_K'(x_K)(x_{K+1}-x_K) + \dot{J}_{1,K} - \dot{J}_{2,K} = \\ = \frac{1}{2} T_K'''(x_K) \{ [T_K''(\bar{x}_{K-1})]^{-1} - [T_K''(\bar{x}_K)]^{-1} \} T_K'(x_K)(x_{K+1}-x_K) + \\ + \dot{J}_{1,K} - \dot{J}_{2,K} = \frac{1}{2} T_K'''(x_K) [T_K''(\bar{x}_{K-1})]^{-1} \{ T_K''(\bar{x}_K) - T_K''(\bar{x}_{K-1}) \} \times \\ \times [T_K''(\bar{x}_K)]^{-1} T_K'(x_K)(x_{K+1}-x_K) + \dot{J}_{1,K} - \dot{J}_{2,K} = \\ = \frac{1}{2} T_K'''(x_K) [T_K''(\bar{x}_{K-1})]^{-1} \{ T_K''(\bar{x}_{K-1}) - T_K''(\bar{x}_K) \} (x_{K+1}-x_K)^2 + \\ + \dot{J}_{1,K} - \dot{J}_{2,K}.$$

Оцінимо $T_K'(x_{K+1})$, враховуючи /18/:

$$\|T_K'(x_{K+1})\| \leq \frac{1}{2} (1+A_K) M \alpha_K^{-1} (1+A_K) M b_K \alpha_K^{-2} a_K^2 + \\ + \frac{1}{6} (1+A_K) L \alpha_K^{-3} a_K^3 + \frac{1}{2} (1+A_K) L \alpha_K^{-3} a_K^3 \leq \\ \leq 4 A_K^2 \alpha_K^{-4} M^2 a_K^2 a_{K-1} + \frac{4}{3} A_K L \alpha_K^{-3} a_K^2 a_{K-1} = \\ = 4 A_K^2 \alpha_K^{-4} \left(M^2 + \frac{L}{3} \frac{\alpha_K}{A_K} \right) a_K^2 a_{K-1} \leq \\ \leq 4 A_K^2 \alpha_K^{-4} \left(M^2 + \frac{L}{3} \frac{\alpha_0}{A_0} \right) a_K^2 a_{K-1}$$

і остаточно

$$\|T_K'(x_{K+1})\| \leq 4 A_K^2 \alpha_K^{-4} \ell^2 a_K^2 a_{K-1}.$$

/22/

З визначення функції $T_K(x)$ з огляду на умови теореми маємо

$$a_{k+1} = \|T'_{k+1}(x_{k+1})\| \leq \|T'_k(x_{k+1})\| + \|T'_{k+1}(x_{k+1}) - T'_k(x_{k+1})\| \leq \\ \leq \|T'_k(x_{k+1})\| + [\alpha_k - \alpha_{k-1} + L_0(A_{k+1} - A_k)] \|x_{k+1}\| + L_0(A_{k+1} - A_k).$$

З врахуванням /16/ і нерівності

$$2\alpha_k - \alpha_{k+1} + L_0(A_{k+1} - A_k) \leq 4\alpha_{k+1},$$

яка випливає з умов /8/, дістаємо

$$a_{k+1} \leq 4\alpha_{k+1} \alpha_k^{-1} \|T'_k(x_{k+1})\| + R(\alpha_k - \alpha_{k-1}) + L_0(1+R)(A_{k+1} - A_k).$$

Підставивши в цю нерівність оцінку /22/ і використавши умову /9/, запишемо

$$a_{k+1} \leq 16\alpha_{k+1} \alpha_k^{-3} A_k^2 l^2 a_k a_{k-1} + \frac{2}{3} \alpha_{k+1}^2 A_{k+1}^{-1} (lt)^{-1}.$$

Тоді

$$c_{k+1} \leq 16A_k^2 \alpha_k^{-3} \alpha_{k-1} l^2 c_k a_{k-1} + \frac{2}{3} \alpha_{k+1} A_{k+1}^{-1} (lt)^{-1} \leq \\ \leq 16A_k^2 \alpha_{k-1} \alpha_k^{-3} l^2 \alpha_k^2 A_k^{-2} (lt)^{-2} a_{k-1} A_{k-1}^{-1} (lt)^{-1} + \\ + \frac{2}{3} \alpha_{k+1} A_{k+1}^{-1} (lt)^{-1} = \alpha_{k+1} A_{k+1}^{-1} (lt)^{-1} \left[16 \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_{k+1}} \frac{A_{k+1}}{A_k} \frac{1}{t^2} + \frac{2}{3} \right] \leq \\ \leq \alpha_{k+1} A_{k+1}^{-1} (lt)^{-1} \left[512t^{-2} + \frac{2}{3} \right]$$

і остаточно

$$c_{k+1} \leq \alpha_{k+1} A_{k+1}^{-1} (lt)^{-1}.$$

Далі

$$b_{k+1} = \|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k\| \leq \|\bar{x}_{k+1} - x_{k+1}\| + \|x_{k+1} - x_k\| + \\ + \|x_k - \bar{x}_k\| \leq \frac{1}{2} \alpha_{k+1}^{-1} a_{k+1} + \alpha_k^{-1} a_k + \frac{1}{2} \alpha_k^{-1} a_k \leq 2\alpha_{k+1}^{-1} a_k.$$

Оцінки /17/ і /18/ доведені.

Оскільки

$$\alpha_k \|x_k - z_k\|^2 \leq \langle T'_k(x_k), x_k - z_k \rangle \leq \alpha_k \|x_k - z_k\|,$$

то

$$\|x_k - z_k\| \leq \alpha_k^{-1} a_k = c_k \leq \alpha_k A_k^{-1} (lt)^{-1}$$

і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - z_k\| \leq (lt)^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k A_k^{-1} = 0.$$

Теорема доведена.

Метод /6/ збігається до нормального розв'язку x_* задачі /1/-/2/ при довільному початковому значенні $x_0 \in H$, за умови, що відповідно підібрані послідовності $\{\alpha_k\}$ і $\{A_k\}$, які задовольняють усі умови /7/-/10/ теореми. Можна, наприклад, прийняти

$$\alpha_k = B(k+1)^{-\alpha}, A_k = (k+1)^A, k=0,1,2,\dots, \quad /23/$$

де додатні числа A, B, α визначають умови

$$A + \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad \alpha < (q-1)A = (p-1)^{-1}A, \quad p > 3, \\ B \geq \max \left\{ L_0; 9lt^2; (81l^2t^2|u^*|^2q^{-1}p^{1-q})^{1/3}; \right. \\ \left. (36l^2L_0^2t^2(1+d^2))^{1/4}; (72l^2L_0^2t^2|u^*|^2q^{-1}p^{1-q})^{1/5}; \right. \\ \left. 2lt\|x_0\|; (2lt\|f'(x_0) + h'(x_0)\|)^{1/2} \right\},$$

t - довільне додатне число, $t \geq 48$.

Список літератури: 1. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь. - Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 5, с.387-391. 2. Б а р т і ш М.Я., Щ е р б і н а Д.Н. Об одном итерационном процессе решения нелинейного операторного уравнения. - Вычислительная и прикладная мат., 1972, вып. 16, с. 115-121. 3. В а с и л ь е в Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1981. - 400 с. 4. К а р т а н А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. - М.: Мир, 1971. - 392 с. 5. Щ е р б і н а Д.М., Г о л у б Б.М. Збіжність ітераційного методу з пам'яттю для мінімізації функцій. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1984, вип. 22, с. 3-7.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.84

Ю.М.Щербина, Л.А.Остапчук

ОДИН ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Відома [2] загальна теорія рекурсивних методів для розв'язування нелінійних операторних рівнянь. Застосуємо її для задачі мінімізації функції багатьох змінних

$$f(x) \rightarrow \min, x \in E^n. \quad /1/$$

Вважаємо, що функція $f(x)$ двічі неперервно диференційована і задовольняє умову

$$m\|y\|^2 \leq \langle f''(x)y, y \rangle \leq M\|y\|^2, \quad /2/$$

$$x, y \in E^n, M > m > 0, \text{ а також}$$

$$\|f''(x) - f''(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Із /2/, зокрема, випливає, що функція $f(x)$ - сильно випукла і, отже, має єдину точку мінімуму x_* . Крім того [3, 4], існує матриця $[f''(x)]^{-1}$, $x \in E^n$, причому

$$\|[f''(x)]^{-1}\| \leq \frac{1}{m}.$$

Нехай векторна функція $\Phi: E^n \rightarrow E^n$ неперервна. Скажемо, що ця функція породжує ітераційний метод порядку φ для розв'язування задачі /1/, якщо існує таке початкове наближення x_0 , коли послідовність $\{x_k\}$, визначена за формулою

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), k = 0, 1, \dots,$$

задовольняє умову

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq K\|x_k - x_*\|^\varphi,$$

де x_* - розв'язок задачі /1/; $K = \text{const}$; $0 < K < +\infty$.

Переформулюємо основну теорему з роботи [2] у термінах поставленої задачі.

Для розв'язування задачі /1/ розглянемо ітераційні формули

$$x_{k+1} = \Omega(x_k),$$

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

/3/

Векторні функції $\Omega(x)$, $\Phi(x)$ вважатимемо неперервними.

Теорема. Нехай неперервні векторні функції $\Omega(x)$ і $\Phi(x)$ породжують ітераційні методи порядку ω та φ відповідно, причому функція $\Omega(x)$ зображується у вигляді

$$\Omega(x) = x - F(x)f'(x),$$

де $F(x)$ — деяка симетрична матриця. А також

$$Q(x) = \Phi(x) - \mathcal{H}(x)f'(\Phi(x)), \quad /4/$$

де $\|F(\Phi(x)) - \mathcal{H}(x)\| \leq K_l \|x - x_*\|^l$,

$0 < K_l < +\infty$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $\mathcal{H}(x)$ — симетрична матриця. Тоді векторна функція $Q(x)$ породжує ітераційний метод

$$x_{k+1} = Q(x_k)$$

порядку $q = \min\{\omega\varphi, l + \varphi\}$.

Розглянемо тепер застосування цієї теореми, коли $\Omega(x) = x - u(x)$, де $u(x) = [f''(x)]^{-1}f'(x)$, а векторна функція $\Phi(x)$ породжує метод порядку $\varphi \geq 2$. Матрицю $\mathcal{H}(x)$ вибираємо у вигляді

$$\mathcal{H}(x) = [f''(x - u(x))]^{-1}.$$

Використовуючи результати з праці [1], запишемо

$$\Phi(x) = x - u(x) + \beta(x),$$

де $\|\beta(x)\| \leq K \|x - x_*\|^2$, $K = \text{const}$; $0 < K < +\infty$.

Оцінюємо

$$\begin{aligned} & \| [f''(\Phi(x))]^{-1} - [f''(x - u(x))]^{-1} \| \leq \\ & \leq \frac{1}{m^2} \| f''(x - u(x)) - f''(\Phi(x)) \| = \\ & = \frac{1}{m^2} \| f''(x - u(x)) - f''(x - u(x) + \beta(x)) \| \leq \\ & \leq \frac{L}{m^2} \|\beta(x)\| \leq \frac{LK}{m^2} \|x - x_*\|^2. \end{aligned}$$

Таким чином, $l = 2$ і порядок збіжності методу, що породжується вектор-функцією

$$Q(x) = \Phi(x) - [f''(x - u(x))]^{-1}f'(x),$$

дорівнює $q = \min\{2\varphi, \varphi + 2\} = \varphi + 2$ /оскільки $\varphi \geq 2$ за умовою/.

Тепер побудуємо ітераційний метод з порядком збіжності $2t+1$ /де t — фіксоване число, $t \geq 1$ / за такою рекурсивною схемою.

Приймаємо

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= W_t(x_k), & /5/ \\ \text{де } W_j(x) &= W_{j-1}(x) - [f''(x - u(x))]^{-1} f'(W_{j-1}(x)); \\ j &= 2, 3, \dots, t; \quad u(x) = [f''(x)]^{-1} f'(x); \\ W_1(x) &= x - \frac{1}{2} u(x) - \frac{1}{2} [f''(x - u(x))]^{-1} f'(x). \end{aligned}$$

Метод, що породжується векторною функцією $W_1(x)$, має кубічну збіжність [4]. Послідовно вибираючи в /4/ $\Phi(x) = W_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, t-1$, виявляємо, що метод має порядок збіжності $3+2(t-1) = 2t+1$.

Врешті запишемо обчислювальну схему методу:

$$\begin{aligned} f''(x_k) u_k &= f'(x_k), \\ y_k &= x_k - u_k, \\ f''(y_k) z_k &= f'(x_k), & /6/ \\ v_k^{(1)} &= x_k - \frac{1}{2} (u_k + z_k), \\ f''(y_k) S_k^{(j-1)} &= f'(v_k^{(j-1)}), \\ v_k^{(j)} &= v_k^{(j-1)} - S_k^{(j-1)}, \quad j = 2, 3, \dots, t, \\ x_{k+1} &= v_k^{(t)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Як бачимо, у схемі /6/ при порядку збіжності $2t+1$ необхідно лише два рази будувати матрицю Гессе $f''(x_k)$, $f''(y_k)$ та провести її LU -розклад [5]. Це основні обчислення. Обсяг інших обчислень незначний.

Список літератури: 1. Бартіш М.Я. О методах типа Ньютона-Канторовича. - Львов, 1973. - 23 с. - Рукопись. деп. в ВИНТИ. № 5653-73 Деп. 2. Бартіш М.Я., Щербина Д.Н. Итерационные формулы, получаемые с помощью рекурсии. - В кн.: Мат. сб. К.: Наук. думка, 1976, с. 50-53. 3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980. - 520 с. 4. Пшеничный Б.Н., Данилин Д.М. Численные методы в экстремальных задачах. - М.: Наука, 1975. - 320 с. 5. Форт Д.А., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. - М.: Мир, 1969. - 168 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.04.84

І.Д.Квіт
ІНФОРМАТИВНІСТЬ ВИБІРКИ

Інформативність повної вибірки. Нехай $x_{(1)}, \dots, x_{(i)}, \dots, x_{(n)}$ варіаційний ряд випадкової вибірки з абсолютно неперервної генеральної сукупності, що має функцію розподілу ймовірностей $F(x)$. Тоді медіанна емпірична функція розподілу в точках варіаційного ряду вибірки обчислюється за формулою [2]

$$F_n(x_{(i)}) = \frac{i-0,5}{n+0,4}, \quad (i=1, \dots, n; n=2, 3, \dots).$$

З ростом обсягу вибірки за теоремою Глівенка [1] емпірична функція розподілу майже вірогідно збігається до функції розподілу генеральної сукупності. Отже, у вибірці закладена інформація про генеральну сукупність. Яка інформативність вибірки?

Інформативність I_n повної вибірки обсягу n назовемо приріст медіанної емпіричної функції розподілу на розмаху вибірки

$$I_n = F_n(x_{(n)}) - F_n(x_{(1)}) = \frac{n-1}{n+0,4}, \quad (n=2, 3, \dots). \quad /1/$$

З формули /1/ випливає, що інформативність повної вибірки при збільшенні обсягу монотонно зростає до одиниці. Це добре ілюструють такі дані:

n	I_n	n	I_n	n	I_n	n	I_n
2	0,4166	12	0,8870	30	0,9539	120	0,9883
3	0,5882	13	0,8955	35	0,9604	140	0,9900
4	0,6818	14	0,9027	40	0,9653	160	0,9912
5	0,7407	15	0,9090	45	0,9691	180	0,9922
6	0,7812	16	0,9146	50	0,9722	200	0,9930
7	0,8108	17	0,9195	60	0,9768	500	0,9972
8	0,8333	18	0,9239	70	0,9801	1000	0,9986
9	0,8510	19	0,9278	80	0,9825	2000	0,99930
10	0,8653	20	0,9313	90	0,9845	5000	0,99972
11	0,8771	25	0,9448	100	0,9860	10000	0,99986

Оскільки в формулі $I_n = \frac{n-1}{n+0,4}$ явно не фігурує абсолютна неперервність генеральної сукупності, то її також можна використати для обчислення інформативності випадкової вибірки з дискретної популяції.

Із формули /1/ при заданні інформативності можна визначити обсяг вибірки.

$$n = \left\{ \frac{1+0,4I_n}{1-I_n} \right\}, \quad 0 < I_n < 1, \quad /2/$$

де фігурна дужка позначає заокруглення до найближчого більшого цілого. Наприклад:

I_n	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999	0,9999	0,99999
n	7	14	28	70	140	1400	14000	140000

Інформативність зрізаної вибірки. Нехай дано напрацювання n однотипних технічних виробів до відмови F або зупинки S . Позначимо через $t_1, \dots, t_i, \dots, t_k$ моменти відмов, $2 \leq k < n$. Тоді медіанна емпірична функція розподілу в точках t_i обчислюється за формулою [2]

$$F_n(t_i) = \frac{\bar{i} - 0,3}{n + 0,4}, \quad (i=1, \dots, k; 2 \leq k < n; n=3,4, \dots),$$

де $\bar{i}$ - сподіваний ранг i -ї відмови. Інформативність зрізаної вибірки назовемо приріст медіанної емпіричної функції розподілу на розмаху відмов

$$I_{n,k}(\cdot) = F_n(t_k) - F_n(t_1) = \frac{\bar{k} - \bar{1}}{n + 0,4}, \quad (2 \leq k < n; n=3,4, \dots), \quad /3/$$

де $(\cdot)$ позначає конкретну конфігурацію F і S . Наприклад,

$$I_{3,2}(FSF) = \frac{2,5-1}{3,4} = 0,442; \quad I_{3,2}(SFF) = \frac{2,56-1,33}{3,4} = 0,391; \quad I_{3,2}(FFS) = \frac{2-1}{3,4} = 0,294.$$

Відношення /3/ до /1/ назовемо відносною інформативністю зрізаної вибірки

$$\frac{I_{n,k}(\cdot)}{I_n} = \frac{\bar{k} - \bar{1}}{n - 1}, \quad (2 \leq k < n; n=3,4, \dots). \quad /4/$$

Інформативність згрупованої вибірки. Нехай напрацювання n однотипних пристроїв спостерігалися до згрупованих $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_k + \Delta_{k+1}$ зупинок і $f = f_1 + f_2 + \dots + f_k$ відмов, $\Delta + f = n$. При конфігурації спершу Δ_1 зупинок, потім f_1 відмов, згодом Δ_2 зупинок, далі f_2 відмов і т.д., врешті f_k відмов і Δ_{k+1} зупинок, інформативність вибірки дорівнює

$$I_{n,\Delta,f}(\cdot) = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \Delta_i - 0,3}{n + 0,4} - \frac{f_1 \Delta_1 - 0,3}{n + 0,4} = \frac{\sum_{i=2}^k f_i \Delta_i}{n + 0,4}, \quad /5/$$

де $\Delta \Delta_i$ - приріст середнього рангу відмов на i -й множині відмов [2]. Наприклад, при конфігурації $\Delta_1 = 15$, $f_1 = 25$, $\Delta_2 = 9$, $f_2 = 15$, $\Delta_3 = 4$, $f_3 = 9$, $\Delta_4 = 3$, $f_4 = 7$, $\Delta_5 = 13$ інформативність вибірки

$$I_{100,44,56} = \frac{15 \cdot 1,377683 + 9 \cdot 1,544675 + 7 \cdot 1,765343}{100 + 0,4} = 0,467378.$$

Відношення Π до I утворює відносну інформативність згрупованої вибірки.

Список літератури: 1. Г л і в е н к о В.І. Теорія імовірностей. - К.: Х., Рад. шк., 1938. - 148 с. 2. К в і т І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності". Львів, 1982. - 24 с. Стаття надійшла до редколегії 28.06.84

УДК 519.21

І.Д.Квіт МНОЖНИКИ ВІДБИТТЯ

Нехай система S розщеплюється на незалежні підсистеми $S_1, S_2, \dots$. Для підсистеми S_1 підсилюється дією підсистеми S_2 і т.д. Визначити дію системи S . Обернена задача: для системи S відома, знайти дії підсистем, якщо такі є. Обидві задачі багатозначні. Тому розглянемо одне їх уточнення.

Нехай підсистема S_1 описується додатною випадковою змінною ξ_1 з функцією розподілу $F_1(t)$, підсистема S_2 - змінною ξ_2 з функцією розподілу $F_2(t)$ і т.д. Визначити функцію розподілу $F(t)$ випадкової змінної $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots$. Задача однозначно розв'язується. Наприклад, для системи з двох підсистем

$$F(t) = \int_0^\infty F_1\left(\frac{t}{\tau}\right) dF_2(\tau), t > 0.$$

Для розв'язування оберненої задачі припустимо, що функція розподілу $F(t)$ додатної випадкової змінної ξ , яка описує систему S , має відбиття

$$\varphi(z) = \int_0^\infty t^{z-1} dF(t), 1-\alpha < \operatorname{Re} z < 1+\beta, (\alpha > 0, \beta > 0). \quad /I/$$

У праці [1] доведено, що відбиття дає змогу однозначно відновити функцію розподілу. Таким чином, відбиття $/I/$ повністю

описує систему S . Індукцією доводиться, що коли незалежні додатні випадкові змінні мають відбиття, то у спільній смузі аналітичності відбиття добутку цих змінних дорівнює добутку відбиття множників. Останній факт використовуємо для виявлення можливих підсистем даної системи. Проілюструємо це прикладами.

Нехай система S описується експонентною випадковою змінною ξ з функцією розподілу

$$F(t) = 1 - e^{-t}, t > 0,$$

що має відбиття

$$\varphi(z) = \Gamma(z), 0 < \operatorname{Re} z.$$

Оскільки рекурентна формула для гамма-функції дає змогу утворювати безліч добутків, то експонентну змінну можна розщепити безліччю способами. Наприклад, добуткові $\Gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot \Gamma(z+1)$ відповідає розщеплення системи S на дві незалежні підсистеми:

одна описується рівномірною на інтервалі $/0; 1/$ випадковою змінною, а друга – змінною Ерланга з густиною te^{-t} , $t > 0$.

Добуткові $\Gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z+1} \cdot \frac{\Gamma(z+2)}{2}$ відповідає розщеплення системи S на три незалежні підсистеми, одна з яких описується рівномірною на інтервалі $/0; 1/$ випадковою змінною, друга – монотонною на інтервалі $/0; 1/$ змінною з густиною $2t$, а третя – змінною Ерланга з густиною $\frac{1}{2}t^2e^{-t}$, $t > 0$. Приклад показує, що задача розщеплення системи на підсистеми не є однозначною.

Бозони /елементарні частинки з цілим спіном/ описуються функціями, зв'язаними з густиною

$$f_1(t) = \frac{1}{\zeta(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha)} \cdot \frac{t^\alpha}{e^t - 1}, t > 0, (\alpha > 0), \quad /2/$$

що має відбиття

$$\varphi_1(z) = \frac{\zeta(z+\alpha)}{\zeta(1+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}, 1-\alpha < \operatorname{Re} z. \quad /3/$$

Першому множникові відбиття /3/ відповідає дискретна випадкова змінна ζ з розподілом

$$P\left\{\zeta = \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{\zeta(1+\alpha)} \cdot \frac{1}{n^{1+\alpha}}, (n=1,2,\dots; \alpha > 0), \quad /4/$$

а другому – гамма випадкова змінна з густиною

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha e^{-t}, t > 0. \quad /5/$$

Отже, система з густиною /2/ розщеплюється на дві незалежні підсистеми: одна з розподілом /4/, друга з густиною /5/.

Ферміони /елементарні частинки з напівцілим спіном/ описуються функціями, зв'язаними з густиною

$$f_2(t) = \frac{1}{(1-2^{-\alpha})\zeta(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha)} \frac{t^\alpha}{e^t+1}, \quad t>0, (\alpha>0), \quad /6/$$

що має відбиття

$$\varphi_2(z) = \frac{1-2^{1-z-\alpha}}{1-2^{-\alpha}} \cdot \frac{\zeta(z+\alpha)}{\zeta(1+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad 1-\alpha < \operatorname{Re} z. \quad /7/$$

Звідси видно, що система з густиною /6/ розщеплюється на три незалежні підсистеми: дві з них такі, як у випадку /2/ - /3/, а третя з відбиттям, якому відповідає незвичайний двозначний розподіл

$$P\{\eta=1\} = \frac{2^\alpha}{2^\alpha-1} > 1, \quad P\{\eta=\frac{1}{2}\} = \frac{-1}{2^\alpha-1} < 0.$$

Рівномірна на інтервалі /0; a / випадкова змінна має відбиття

$$\varphi(z) = a^{z-1} \cdot \frac{1}{z}, \quad 0 < \operatorname{Re} z$$

і з добутком двох незалежних випадкових змінних: рівномірної на інтервалі /0; 1/ та імпульсу в точці a, $P\{\nu=a\}=1$.

Можливість розщеплення системи на зліченну множину незалежних підсистем або на підсистеми з сингулярними розподілами впливає з праці [2].

Таким чином, множники відбиття додатної випадкової змінної, що описує деяку систему, дають змогу виявити незалежні підсистеми, на які розщеплюється система.

Список літератури: 1. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1978, вип. 13, с. 47-53. 2. К в і т І.Д. Про розщеплення однієї абсолютно неперервної випадкової змінної на добуток двох незалежних сингулярних випадкових змінних. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1980, вип. 16, с.19-23.

Стаття надійшла до редколегії 28.06.84

О.П.Гнатюшин

ОПТИМАЛЬНА ТАКТИКА ПОПЕРЕДЖУВАЛЬНОЇ ЗАМІНИ
ПРИ ВЕЙБУЛІВСЬКИМ НАПРАЦЮВАННІ

Нехай напрацювання збірної одиниці до відмови T має функцію розподілу Вейбула

$$P(\tau \leq t) = F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}, \quad t \geq 0, \quad (a > 0, b > 0). \quad /1/$$

Збірна одиниця замінюється еквівалентною при відмові або в фіксований момент часу T залежно від того, що швидше відбудеться. Нехай напрацювання i -ї збірної одиниці дорівнює x_i , де $x_i = \min(t_i, T)$; t_i - напрацювання до відмови.

Позначимо через c_1 - вартість заміни збірної одиниці, що відмовила, а через c_2 - вартість заміни збірної одиниці, що не відмовила. Вартість утримання i -ї збірної одиниці вважатимемо пропорційною до x_i^α , $\alpha > 0$ з коефіцієнтом пропорційності c_3 , $c_3 > 0$.

У праці [1] доведено, що коли функція розподілу напрацювання до відмови $F(t)$ абсолютно неперервна, то існує оптимальна тактика заміни збірної одиниці. На основі праці [3] для випадку розподілу /1/ оптимальне значення T повинно бути розв'язком рівняння

$$\left[(c_1 - c_2) \frac{b T^{b-1}}{a^b} + \alpha c_3 T^{\alpha-1} \right] \int_0^T e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b} dt - (c_1 - c_2) \left[1 - e^{-\left(\frac{T}{a}\right)^b} \right] - c_3 \left\{ T^\alpha e^{-\left(\frac{T}{a}\right)^b} + \int_0^T \frac{b t^{\alpha+b-1}}{a^b} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b} dt \right\} = c_2. \quad /2/$$

При $\alpha > 1$ рівняння /2/ має скінченний розв'язок, оскільки при $T \rightarrow \infty$ ліва сторона рівняння прямує до нескінченності, а при $T \rightarrow 0$ - ліва сторона рівняння прямує до нуля. При $0 < \alpha < 1$ дістаємо $T = \infty$.

Два інтеграли у рівнянні /2/ зведемо до неповної гамма-функції. Маємо

$$\int_0^T e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b} dt = \frac{a}{b} \int_0^{\left(\frac{T}{a}\right)^b} e^{-\tau} \tau^{\frac{1}{b}-1} d\tau = a \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right) \left\{ 1 - Q\left(x^2 = 2\left(\frac{T}{a}\right)^b / \nu = \frac{2}{b}\right) \right\}, \quad /3/$$

$$\text{де } Q(x^2/\nu) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_{x^2}^{\infty} t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt; \quad 0 < x^2 < \infty \quad /4/$$

табульована функція [2]. Аналогічно

$$\frac{b}{a^b} \int_0^T e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b} t^{\alpha+b-1} dt = a^\alpha \int_0^{\left(\frac{T}{a}\right)^b} e^{-\tau} \tau^{\frac{\alpha}{b}} d\tau = a^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{b}+1\right) \left\{1 - Q\left(x^2 = 2\left(\frac{T}{a}\right)^b / \nu = 2\left(\frac{\alpha}{b}+1\right)\right)\right\} \quad /5/$$

З допомогою /3/-/5/ вираз /2/ набуде вигляду

$$\left[(c_1 - c_2) \frac{b \Gamma^{b-1}}{a^b} + \alpha c_3 T^{\alpha-1} \right] a \Gamma\left(\frac{1}{b}+1\right) \left\{1 - Q\left(x^2 = 2\left(\frac{T}{a}\right)^b / \nu = \frac{2}{b}\right)\right\} + \quad /6/$$

$$+ (c_1 - c_2 - c_3 T^\alpha) e^{-\left(\frac{T}{a}\right)^b} - c_3 a^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{b}+1\right) \left\{1 - Q\left(x^2 = 2\left(\frac{T}{a}\right)^b / \nu = 2\left(\frac{\alpha}{b}+1\right)\right)\right\} = c_1.$$

Рівняння /6/ розв'язуємо методом проб.

Для розв'язування /2/ на ЕОМ зводимо його до вигляду

$$T^{\alpha-1} = \frac{c_1 + c_3 \frac{b}{a^b} \int_0^T t^{\alpha+b-1} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b} dt - (c_1 - c_2 - c_3 T^\alpha) e^{-\left(\frac{T}{a}\right)^b}}{\int_0^T e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b} dt \left((c_1 - c_2) \frac{b}{a^b} T^{b-\alpha} + \alpha c_3 \right)} \quad /7/$$

Рівняння /7/ розв'язуємо методом простої ітерації. При цьому інтеграли /3/ та /5/ обчислюємо методом Сімпсона.

На основі числових експериментів з допомогою ЕОМ виявлено, що при сталих c_1 , c_2 і c_3 з ростом параметра форми b оптимальне T зменшується. Це видно з таких даних / $c_1 = 12$, $c_2 = 7$; $c_3 = 1,49$; $a = 1,6400$; $\alpha = 2$ /:

b	0,4	0,8	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
T	3,7866	3,1487	2,7717	1,9613	1,5467	1,3712	1,2933	1,2572

Приклад. Нехай напрацювання збірної одиниці 40-0-04-0 підпорядковане розподілу Вейбула з параметрами $a = 1,6400$ та $b = 2,0518$. Вартість заміни збірної одиниці, що відмовила, дорівнює $c_1 = 12$ крб., вартість заміни збірної одиниці, що не відмовила, $c_2 = 7$ крб., вартість утримання збірної одиниці $1,49 \cdot x^2$ крб.; $c_3 = 1,49$. Визначити оптимальну тактику T заміни збірної одиниці.

Методом простої ітерації з рівняння /7/ знаходимо $T = 1,5209$.

Список літератури: 1. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. - М.: Сов. радио, 1969. - с. 488.
2. Б о л ь ш е в Л.Н., С м и р н о в Н.В. Таблицы математической статистики. - М.: Наука, 1983. - 416 с. 3. Technometrics, 1971, vol.13, N1, p.139-144.

Стаття надійшла до редколегії 28.02.84

ПРО РОЗВ'ЯЗОК ОДНОМІРНИХ НЕЛІНІЙНИХ
КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Розв'язок одномірних геометрично нелінійних задач термопружності у випадку нелінійних граничних умов апроксимацією нелінійних граничних умов зводиться до послідовності розв'язку крайових задач з лінійними граничними умовами. Одержані при цьому крайові задачі розв'язують методом Ньютона-Канторовича [4].

Розглядається ізотропна смуга товщини l ($0 \leq x \leq l$) з матеріалу з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_t(t)$, який залежить від температури $t(x)$. Температура навколишнього середовища по різні сторони шару допускається відомою t_f^+ , t_f^- . Вихідні рівняння термопружності для досліджуваної смуги містять рівняння теплопровідності [3]

$$\lambda_t(t) \frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{d\lambda_t(t)}{dt} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \omega_t = 0 \quad /1/$$

і рівняння рівноваги відносно переміщення $u(x)$ [1]

$$\left\{ E(t) \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \left[\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \varepsilon(t) \right\} \frac{d^2 u}{dx^2} +$$

$$+ \left(1 + \frac{du}{dx} \right) \left\{ \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \left[\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] \frac{dE}{dt} + E(t) \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \times \right. \quad /2/$$

$$\times \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} \right] + \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha(t) \frac{dt}{dx} \left. \right\} + \varrho F = 0,$$

де ν - коефіцієнт Пуассона; $E(t)$, $\alpha(t)$ - залежні від температури модуль пружності та коефіцієнт лінійного температурного розширення; $\varepsilon_t = \int_{t_0}^t \alpha(\xi) d\xi$ - чисто тепла деформація; ϱ - густина; ω_t - густина внутрішніх джерел тепла.

Визначимо температурні напруження та переміщення, що виникають у смугі для граничних умов

$$\left\{ \lambda_t(t) \frac{dt}{dx} + \frac{c_n}{10^8} [t^4 - (t_f^-)^4] \right\} \Big|_{x=0} = 0,$$

$$\left\{ \lambda_t(t) \frac{dt}{dx} + \frac{c_n}{10^8} [t^4 - (t_f^+)^4] \right\} \Big|_{x=l} = 0,$$

$$\left\{ \left\{ E(t) \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \left[\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \varepsilon(t) \right\} \left(1 + \frac{du}{dx} \right) - \rho_1 \right\} \Big|_{\substack{x=0 \\ x=l}} = 0, \quad /3/$$

де C_n - зведений коефіцієнт випромінювання; ρ_1 - параметр силового впливу.

Використовуючи заміну

$$x_1 = t(x), \quad x_2 = \frac{dt}{dx}, \quad x_3 = u(x), \quad x_4 = \frac{du}{dx}, \quad /4/$$

розв'язок задачі /1/-/3/ зведемо до розв'язку крайової задачі вигляду

$$\frac{dx}{dx^*} = f(x^*, x), \quad /5/$$

$$g(x_0, x_1) = d, \quad /6/$$

при

$$f(x^*, x) = \begin{pmatrix} x_2(x^*) \\ -\left[\omega_{x_1} + \frac{d\lambda_{x_1}}{dx_1} x_2^2(x^*)\right] / \lambda_{x_1} \\ x_3(x^*) \\ \left\{ A_1 [1 + x_4(x^*)] \cdot [x_4(x^*) + x_4^2(x^*)] \frac{dE}{dx_2} + A_2 \alpha(x_1) x_2(x^*) + \right. \\ \left. + \varphi F \right\} / \left\{ A_1 E(x_1) x_4^2(x^*) - A_2 \varepsilon(x_1) + A_1 E(x_1) [1 + x_4(x^*)] [1 + 2x_4(x^*)] \right\} \\ d = \begin{pmatrix} -\frac{C_n}{10^8} (t_f^-)^4 \\ -\frac{C_n}{10^8} (t_f^+)^4 \\ \rho_{10} \\ \rho_{11} \end{pmatrix}, \end{pmatrix}$$

$$g(z_0, z_1) = \begin{pmatrix} -\lambda_{z_1}(z_{10})z_{20} - \frac{c_n}{10^8} z_{10}^4 \\ -\lambda_{z_1}(z_{11})z_{21} - \frac{c_n}{10^8} z_{11}^4 \\ A_1 E(z_{10})z_{40}^3 + A_1[E(z_{10}) + \varepsilon(z_{10})] \cdot z_{40}^2 + [A_1 E(z_{10}) - \\ - A_2 \varepsilon(z_{10})] \cdot z_{40} - A_2 \varepsilon(z_{10}) \\ A_1 E(z_{11})z_{41}^3 + A_1[E(z_{11}) + \varepsilon(z_{11})] \cdot z_{41}^2 + [A_1 E(z_{11}) - A_2 \varepsilon(z_{11})] \cdot z_{40} - A_2 \varepsilon(z_{11}) \end{pmatrix},$$

де

$$A_1 = 1 + \frac{\nu}{1-2\nu}; A_2 = \frac{1+\nu}{1-2\nu}; x^* = \frac{x}{e}; z = (z_1, z_2, z_3, z_4); z_0 = z(0); \dot{z}_1 = z(1).$$

Лінеаризуючи граничні умови /6/ за формулою Лагранжа, одержуємо послідовність крайових задач

$$\frac{dz^{(k+1)}}{dx^*} = f(x^*, z^{(k+1)}), \quad /7/$$

$$\Gamma_0^{(k)}(z_0^{(k+1)} - z_0^{(k)}) + \Gamma_1^{(k)}(z_1^{(k+1)} - z_1^{(k)}) = d - g(z_0^{(k)}, z_1^{(k)}), \quad /8/$$

$k = 0, 1, \dots,$

де $\Gamma_0 = \Gamma_0(z_0, z_1)$, $\Gamma_1 = \Gamma_1(z_0, z_1)$ — матриці Якобі вектор-функції $g(z_0, z_1)$ по z_0 та z_1 відповідно.

Після виконання відповідних перетворень система /8/ набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} B_{10}^{(k)} \cdot z_{10}^{(k+1)} + B_{20}^{(k)} \cdot z_{20}^{(k+1)} &= C_{10}^{(k)}, \\ B_{11}^{(k)} \cdot z_{11}^{(k+1)} + B_{21}^{(k)} \cdot z_{21}^{(k+1)} &= C_{11}^{(k)}, \\ B_{30}^{(k)} \cdot z_{30}^{(k+1)} + B_{40}^{(k)} \cdot z_{40}^{(k+1)} &= C_{20}^{(k)}, \\ B_{31}^{(k)} \cdot z_{31}^{(k+1)} + B_{41}^{(k)} \cdot z_{41}^{(k+1)} &= C_{21}^{(k)}, \end{aligned} \quad /9/$$

де

$$B_{1i}^{(k)} = -4 \frac{c_n}{10^8} [z_{1i}^{(k)}]^3 - \frac{d\lambda(z_{1i}^{(k)})}{dz_{1i}^{(k)}} \cdot z_{2i}^{(k)};$$

$$B_{2i}^{(\kappa)} = -\lambda_{z_1}(z_{1i}^{(\kappa)});$$

$$B_{3i}^{(\kappa)} = A_1 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} [z_{4i}^{(\kappa)}]^3 + A_1 \left[\frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} + \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} \right] \times [z_{4i}^{(\kappa)}]^2 + \\ + \left[A_1 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} - A_2 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} \right] \cdot z_{4i}^{(\kappa)} - A_2 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}};$$

$$B_{4i}^{(\kappa)} = 3A_1 E(z_{1i}^{(\kappa)}) [z_{4i}^{(\kappa)}]^2 + 2A_1 [E(z_{1i}^{(\kappa)}) + E(z_{1i}^{(\kappa)})] \cdot z_{4i}^{(\kappa)} + A_1 E(z_{1i}^{(\kappa)}) - A_2 E(z_{1i}^{(\kappa)});$$

$$C_{1i}^{(\kappa)} = -\frac{C_n}{10^6} (t_{fi})^4 - 3 \frac{C_n}{10^6} [z_{1i}^{(\kappa)}]^4 - \frac{d\lambda_{z_1}}{dz_{1i}^{(\kappa)}} \cdot z_{2i}^{(\kappa)} \cdot z_{1i}^{(\kappa)};$$

$$C_{2i}^{(\kappa)} = p_{fi} + 2A_1 E(z_{1i}^{(\kappa)}) [z_{4i}^{(\kappa)}]^3 + A_1 [E(z_{1i}^{(\kappa)}) + E(z_{1i}^{(\kappa)})] [z_{4i}^{(\kappa)}]^2 - A_2 E(z_{1i}^{(\kappa)}) + \\ + A_1 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} [z_{4i}^{(\kappa)}]^3 \cdot z_{1i}^{(\kappa)} + A_1 \left[\frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} + \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} \right] [z_{4i}^{(\kappa)}]^2 \cdot z_{1i}^{(\kappa)} + \\ + \left[A_1 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} - A_2 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} \right] z_{4i}^{(\kappa)} \cdot z_{1i}^{(\kappa)} - A_2 \frac{dE}{dz_{1i}^{(\kappa)}} \cdot z_{1i}^{(\kappa)};$$

$$t_{f0} = t_f^-; \quad t_{f1} = t_f^+;$$

$$i=0,1; \quad \kappa=0,1,\dots$$

Таким чином, крайова задача /5/, /6/ зведена до послідовності крайових задач /7/, /9/. Для кожного κ розв'язок крайової задачі /7/, /9/ еквівалентний розв'язку системи рівнянь

$$B_{11}^{(\kappa)} z_{11}^{(\kappa+1)} + B_{21}^{(\kappa)} z_{21}^{(\kappa+1)} = C_{11}^{(\kappa)},$$

$$B_{31}^{(\kappa)} z_{11}^{(\kappa+1)} + B_{41}^{(\kappa)} z_{41}^{(\kappa+1)} = C_{21}^{(\kappa)}$$

/10/

відносно невідомих $z_{30}^{(\kappa+1)}$, $z_{40}^{(\kappa+1)}$ і задачі Коші для системи диференціальних рівнянь /7/ з початковими умовами

$$z_i^{(\kappa+1)}(0) = \frac{1}{B_{30}^{(\kappa)}} [C_{20}^{(\kappa)} - B_{40}^{(\kappa)} z_{40}^*],$$

$$z_2^{(k+1)}(0) = \frac{1}{B_{20}^{(k)} B_{30}^{(k)}} [C_{10}^{(k)} B_{30}^{(k)} - B_{10}^{(k)} C_{20}^{(k)} + B_{10}^{(k)} B_{40}^{(k)} z_{40}^*],$$

$$z_3^{(k+1)}(0) = z_{30}^*,$$

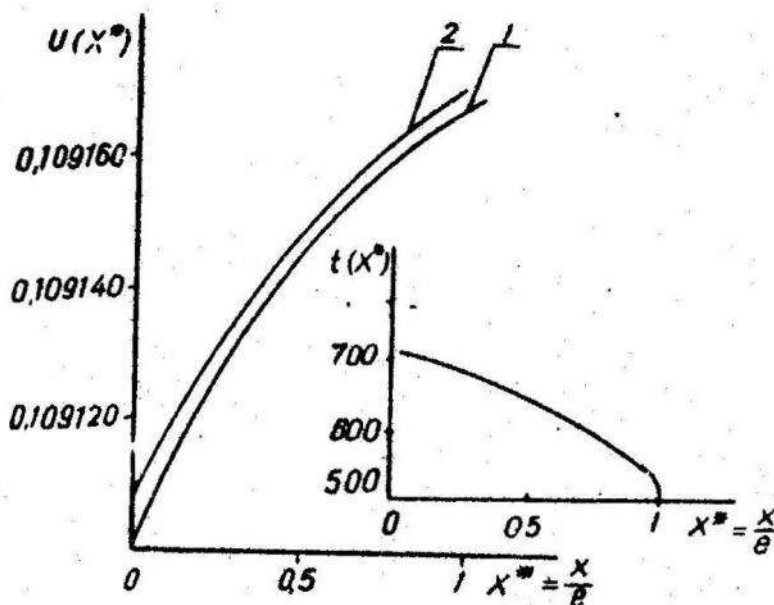
$$z_4^{(k+1)}(0) = z_{40}^*,$$

де z_{30}^*, z_{40}^* - розв'язок системи рівнянь /10/.

Розв'язок системи /10/, враховуючи алгоритм II побудови, знаходимо різницеvim аналогом методу Ньютона-Канторовича. За початкове наближення для $(k+1)$ -ї задачі вибираємо розв'язок задачі /7/, /9/, одержаний для k -ї задачі з деякою точністю ε_k , що вибирається з умови мінімуму затраченої кількості обчислень.

Числові дослідження проводили при таких параметрах: $\omega_t = 0$, $\rho_1 = 10$, $C_n = 10$, $\rho F = 50$, $t_f^+ = 25$, $t_f^- = 700$. Залежність $\lambda_t(t)$ згідно з експериментальними даними [2] для сталі марки IX18H9T мала вигляд

$$\lambda_t(t) = 0,972 \cdot 10^{-5} t^2 + 7,87 \cdot 10^{-4} t + 18,9945.$$



Температурні залежності функцій $E(t)$, $\alpha(t)$ вибирали лінійними

$$E(t) = 1 - 0,25 \cdot 10^{-4} t,$$

$$\alpha(t) = 1 + 0,47 \cdot 10^{-4} t$$

і квадратичними

$$E(t) = 1 + 0,7 \cdot 10^{-4} t - 0,1 \cdot 10^{-8} t^2,$$
$$\alpha(t) = 1 - 0,5 \cdot 10^{-4} t + 0,1 \cdot 10^{-8} t^2.$$

На рисунку показано розподіл температури t по товщині шару та зміну переміщення u по координаті $x^* = \frac{x}{l}$ /крива 1 відповідає лінійній залежності функцій $E(t)$, $\alpha(t)$, крива 2 - квадратичній/.

Список літератури: 1. А мен за де Ю.А. Теория упругости. - М.: Высш. шк., 1976. - 271 с. 2. Без у х о в Н.И., Ба х а - н о в В.Л., Г о л ь д е б л а т И.И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. - М.: Машиностроение, 1965. - 567 с. 3. К а р с л о у Г., Е г е р Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. - 487 с. 4. Ш а - м а н с к и й В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. - К.: Наук. думка, 1966. - 242 с.

Стаття надійшла до редколегії 28.06.84

УДК 518:517.948

С.М.Кічура, Б.А.Остудін

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ У ВИПАДКУ ЧАСТКОВО НЕОБМЕЖЕНИХ ПОВЕРХОНЬ

У праці [4] розглянута зовнішня задача Діріхле для рівняння Лапласа в R^2 у випадку частково необмежених границь, а в [2] - просторова задача електростатики. Модифіковані функції Гріна ми використаємо для розрахунку осесиметричного електростатичного поля.

Нехай у тривимірному евклідовому просторі R^3 на одній осі OY задані нескінченна кругова мембрана S_1 , перпендикулярна OY , і циліндр S_2 з круговим отвором на одній з основ. Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля, утвореного нерухомими в просторі та незмінними в часі електростатичними зарядами, розміщеними на поверхнях S_1 і S_2 . Потрібно знайти електростатичне поле $U(M)$ у довільній точці простору, якщо на поверхнях виконується гранична умова першого роду.

Задача зводиться до розв'язування зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\Delta U = 0, \quad /1/$$

$$U|_{S_i} = f_i, \quad /2/$$

$$U|_{S_2} = f_2, \quad /3/$$

$$U(\infty) = 0. \quad /4/$$

Розв'язок /1/-/4/ представимо у вигляді $U = U_1 + U_2$,
 де U_1 - розв'язок задачі:

$$\Delta U_1 = 0, \quad /5/$$

$$U_1|_{S_1} = f_1, \quad /6/$$

$$U_1(\infty) = 0, \quad /7/$$

а U_2 - розв'язок задачі:

$$\Delta U_2 = 0, \quad /8/$$

$$U_2|_{S_1} = 0, \quad /9/$$

$$U_2|_{S_2} = f_2 - U_1|_{S_2} = f_3, \quad /10/$$

$$U_2(\infty) = 0. \quad /11/$$

Для граничної задачі /5/-/7/ характерний аналітичний розв'язок [5]:

$$U_1(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1} \frac{y_0^3}{R_{MP}^3} f_1(P) dS_P,$$

причому точка M має координати (x_0, y_0, z_0) , а точка $P - (x, y, z)$.

Функція U_2 , яка є розв'язком граничної задачі /8/-/11/, можна зобразити [3] у вигляді потенціалу простого шару:

$$U_2(M) = \iint_{S_2} \varphi(P) \cdot G(M, P) dS_P, \quad M \in S_2, \quad /12/$$

де $\varphi(P)$ - невідома густина розподілу зарядів по поверхні S_2 ; $G(M, P)$ - функція Гріна для півпростору.

Враховуючи граничну умову /10/, для визначення густини запишемо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду:

$$\iint_{S_2} \varphi(P) G(M, P) dS_P = f_3, \quad M \in S_2.$$

Введемо циліндричну систему координат (r, φ, z) :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

У кожній півплощині $\varphi = \text{const}$ поверхня S_2 представляється рівнянням $R = R(\xi)$, $y_1 \leq \xi \leq y_2$, причому $R(\xi)$ - кусково-гладка функція. Враховуючи

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} - \frac{1}{4\pi R_{MP_1}},$$

/точка P_1 симетрична P по відношенню до мембрани/, а також осьову симетрію поля, формула /12/ набуває вигляду:

$$U_2^*(z, y) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \varphi^*(R, \xi) \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta + (y - \xi)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta + (y + \xi)^2}} \right] dS, \quad /13/$$

де (z, y) - координати довільної точки поза поверхнею S_2 ;
 (R, ξ) - координати довільної точки на поверхні S_2 .

Перейдемо у першому інтегралі /13/ до повторного, враховуючи, що $dS = R \cdot dR \cdot d\theta$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \varphi^*(R, \xi) \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta + (y - \xi)^2}} dS = \\ & = \frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} \varphi^*(R, \xi) \cdot R dR \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta + (y - \xi)^2}}. \end{aligned}$$

У внутрішньому інтегралі виконаємо заміну змінних $\theta = \pi + 2\alpha$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta + (y - \xi)^2}} = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{R^2 + z^2 + 2Rz \cos 2\alpha + (y - \xi)^2}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{R^2+z^2+2Rz-4Rz\sin^2\alpha+(y-\xi)^2}} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{(R+z)^2+(y-\xi)^2-4Rz\sin^2\alpha}} = \\
 &= \frac{4}{\sqrt{(R+z)^2+(y-\xi)^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = \frac{4K(k)}{\sqrt{(R+z)^2+(y-\xi)^2}}.
 \end{aligned}$$

Перетворивши аналогічним чином другий інтеграл у формулі /13/ і позначивши $4R\varphi^*$ через $q(\xi)$, дістаємо

$$U_2^*(z, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} q(\xi) \left[\frac{1}{\sqrt{(R+z)^2+(y-\xi)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(R+z)^2+(y+\xi)^2}} \right] K(k) d\xi. \quad /14/$$

Причому $k^2 = 4Rz[(R+z)^2+(y-\xi)^2]^{-1}$, а $K(k)$ - еліптичний інтеграл першого роду, для якого застосовується апроксимація [1]:

$$K(k) = \sum_{i=0}^4 a_i \eta^i - \ln \eta \sum_{i=0}^4 b_i \eta^i,$$

де

$$\eta = 1 - k^2 = \frac{(R-z)^2+(y-\xi)^2}{(R+z)^2+(y-\xi)^2}, \quad 0 < \eta < 1;$$

a_i, b_i - відомі коефіцієнти.

Для знаходження густини $q(\xi)$ маємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} q(\xi) \left[\frac{1}{\sqrt{(R+z)^2+(y-\xi)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(R+z)^2+(y+\xi)^2}} \right] K(k) d\xi = U_2^*(z, y) / S_2. \quad /15/$$

Знайшовши густину $q(\xi)$ із /15/, потенціал шукаємо по формулі /14/.

Список літератури: І. Димарский Я.С., Лозинский Н.Н., Макушкин А.Т. Справочник программиста. - Л.: Судпромгиз, 1963. - 628 с. 2. Кичура С.М., Остудин Б.А. Модифицированные функции Грина в пространственных задачах электростатики. - Львов, 1984. - 18 с. - Рукопись деп. в УкрНИИТИ,

№ 2097Ук-84Деп. 3. Л ю д к е в и ч И.В., Г о р д и й ч у к В.И., Б а к а л е ц В.А. и др. Численное решение пространственных задач теории потенциала. - Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1979. - 116 с. 4. О с т у д и н Б.А., К и ч у р а С.М. Использование модифицированных функций Грина при решении внешних задач для частично неограниченных областей. - Львов, 1984. - 14 с. - Рукопись деп. в УкрНИИТИ, № 919Ук-84Деп. 5. Т и х о н о в А.Н., С а м а р с к и й А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 736 с.

Стаття надійшла до редколегії 23.05.85

УДК 518.517

О.В.Жук, Б.А.Остудін, Р.М.Пасічник

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОРОЗВІДКИ МЕТОДОМ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

Один з ефективних методів пошуку рудних родовищ - це індуктивна електророзвідка, зокрема метод перехідних процесів, де засобом дослідження геоелектричного розрізу є перехідна характеристика вторинного електромагнітного поля.

Відомо, що криві перехідного процесу від тіл ізомірної форми досить добре апроксимуються нескінченною сумою затухаючих експонент. Це дає змогу характерним параметром процесу вибрати коефіцієнт затухання експонент α , за яким з допомогою відомих методів [3] визначають параметри рудного тіла.

Запишемо сигнал перехідного процесу від провідників ізомірної форми в непровідному середовищі:

$$u(t) = x(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\alpha t (K\pi)^2] \equiv x(\alpha) K(t, \alpha), \quad /1/$$

де t - час; α - параметр форми кривої, що характеризує швидкість затухання перехідної характеристики.

У випадку, коли в досліджуваному районі знаходиться декілька зон, аномальних за провідністю, або, наприклад, декілька ізомірних провідних тіл, то при відсутності їх взаємного впливу сумарний сигнал визначається суперпозицією компонент виду /1/:

$$E(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) = \sum_{i=1}^m x(\alpha_i) K(t, \alpha_i)$$

або

$$E(t) = \sum_{\alpha} x(\alpha) K(t, \alpha).$$

Якщо перейти від дискретної суми до неперервної, то дістанемо [1, 2]

$$\int_a^b K(t, \alpha) x(\alpha) d\alpha = E(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad /2/$$

Таким чином, побудовано математичну модель, яка записується у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Її можна використати для розв'язування задачі розкладу сумарного перехідного процесу на складові.

Задача /2/ належить до некоректно поставлених [5]. Для розв'язання застосуємо метод регуляризації А.М.Тихонова [5]. Цей метод полягає в тому, що /2/ замінюється близькою до неї варіаційною задачею:

$$\int_0^T \left\{ \int_a^b K(t, \alpha) x(\alpha) d\alpha - E(t) \right\}^2 dt + \\ + \gamma \int_a^b \left[p(\alpha) x^2(\alpha) + q(\alpha) \left(\frac{dx}{d\alpha} \right)^2 \right] d\alpha = \min, \quad /3/$$

де $q(\alpha)$, $p(\alpha) \geq 0$ - неперервні функції; γ - параметр регуляризації. Задача /3/ коректно поставлена, причому алгоритм /3/ дає змогу отримати розв'язок $x_\gamma(\alpha)$, що при $\gamma \rightarrow 0$ рівномірно збігається /якщо він існує/ до розв'язку задачі /2/.

Для мінімізації функціоналу з /3/ використаємо ідеї методу скінченних елементів [4], причому обмежимося квадратичною апроксимацією шуканої функції $x(\alpha)$.

Відрізок $\Omega = [a, b]$ розіб'ємо на N рівних частин /елементів/ Ω^l ($l = 1, 2, \dots, N$). Зафіксуємо середину кожного з підінтервалів Ω^l . Отриману множину точок разом із точками розбиття відрізка Ω позначимо через $\{\alpha_i\}_{i=1}^{2N+1}$, причому $\alpha_i = a + (i-1) h_\alpha$, а $h_\alpha = (b-a) / 2N$.

Враховуючи розбиття відрізка Ω на елементи, інтеграли в /3/ запишемо таким чином:

$$\int_a^b K(t, \alpha) x(\alpha) d\alpha = \sum_{k=1}^N \int_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k+1}} K(t, \alpha) x(\alpha) d\alpha, \quad /4/$$

$$\int_{\Omega} \rho(\alpha) x^2(\alpha) d\alpha = \sum_k \int_{\Omega^k} \rho(\alpha) x^2(\alpha) d\alpha, \quad /5/$$

$$\int_{\Omega} q(\alpha) [x'(\alpha)]^2 d\alpha = \sum_k \int_{\Omega^k} q(\alpha) [x'(\alpha)]^2 d\alpha. \quad /6/$$

У кожному інтегралі, що входять у праві частини співвідношень /4/-/6/, зробимо заміну змінних:

$$\alpha(\beta) = \varphi_1(\beta)\alpha_{2k-1} + \varphi_2(\beta)\alpha_{2k} + \varphi_3(\beta)\alpha_{2k+1} \quad (\beta \in [-1, 1]), \quad /7/$$

де $\varphi_1(\beta) \equiv -\frac{1}{2}\beta(1-\beta)$, $\varphi_2(\beta) \equiv 1-\beta^2$, $\varphi_3(\beta) \equiv \frac{1}{2}\beta(1+\beta)$.

При цьому очевидно, що

$$d\alpha(\beta) = [\varphi_1'(\beta)\alpha_{2k-1} + \varphi_2'(\beta)\alpha_{2k} + \varphi_3'(\beta)\alpha_{2k+1}] d\beta = \sigma_{2k}(\beta) d\beta, \quad /8/$$

де $\varphi_1'(\beta) = \beta - \frac{1}{2}$; $\varphi_2'(\beta) = -2\beta$; $\varphi_3'(\beta) = \beta + \frac{1}{2}$.

Враховуючи заміни /7/, /8/, дістаємо

$$\int_{\Omega^k} K(t, \alpha) x(\alpha) d\alpha = \int_{-1}^1 \sigma_{2k}(\beta) K_{2k}(t, \beta) x_{2k}(\beta) d\beta, \quad /9/$$

$$\int_{\Omega^k} \rho(\alpha) x^2(\alpha) d\alpha = \int_{-1}^1 \rho_{2k}(\beta) \sigma_{2k}(\beta) x_{2k}^2(\beta) d\beta, \quad /10/$$

$$\int_{\Omega^k} q(\alpha) [x'(\alpha)]^2 d\alpha = \int_{-1}^1 q_{2k}(\beta) \sigma_{2k}(\beta) [x'_{2k}(\beta)]^2 d\beta, \quad /11/$$

де $\rho_{2k}(\beta) = \rho[\alpha(\beta)]$; $q_{2k}(\beta) = q[\alpha(\beta)]$;

$$K_{2k}(t, \beta) = K[t, \alpha(\beta)]; \quad x_{2k}(\beta) = x[\alpha(\beta)].$$

Згідно з основною ідеєю методу скінченних елементів шуканий розв'язок запишемо як

$$x_{2k}(\beta) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\beta) x_{2(k-1)+i}, \quad /12/$$

де $x_{2(k-1)+i} \approx x(\alpha_{2(k-1)+i})$ - параметри, які потрібно визначити. Далі, враховуючи позначення

$$A_{2k,i}(t) = \int_{-1}^1 \sigma_{2k}(\beta) K_{2k}(t, \beta) \varphi_i(\beta) d\beta \quad (i=1,2,3),$$

на підставі /9/-/12/ одержуємо дискретний аналог функціоналу із /3/:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 A_{2k,i}(t) x_{2(k-1)+i} - E(t) \right\}^2 dt + \\ & + \gamma \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 p_{2k}(\beta) \sigma_{2k}(\beta) \left[\sum_{i=1}^3 \varphi_i(\beta) x_{2(k-1)+i} \right]^2 d\beta + \\ & + \gamma \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 q_{2k}(\beta) \sigma_{2k}(\beta) \left[\sum_{i=1}^3 \varphi'_i(\beta) x_{2(k-1)+i} \right]^2 d\beta = U. \quad /13/ \end{aligned}$$

Очевидно, що U є функцією $2N+1$ змінної $x_1, x_2, \dots, x_{2N+1}$. Необхідна умова екстремуму функції багатьох змінних має вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial x_{2(\ell-1)+j}} = 0 \quad (\ell=1,2,\dots,N; j=1,2,3). \quad /14/$$

Співвідношення /14/ дає систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $x_1, x_2, \dots, x_{2N+1}$:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 B_{2k,2\ell}^{i,j} x_{2(k-1)+i} = E_{2\ell}^j, \quad /15/$$

де

$$B_{2k,2\ell}^{i,j} = \begin{cases} A_{2k,2\ell}^{i,j}, & k \neq \ell; \\ A_{2\ell,2\ell}^{i,j} + \gamma(\bar{A}_{2\ell}^{i,j} + \bar{A}_{2\ell}^{j,i}), & k = \ell, \end{cases}$$

причому

$$A_{2k,2\ell}^{i,j} = \int_0^T A_{2k,i}(t) \cdot A_{2\ell,j}(t) dt,$$

$$\bar{A}_{2\ell}^{i,j} = \int_{-1}^1 p_{2\ell}(\beta) \sigma_{2\ell}(\beta) \varphi_i(\beta) \varphi_j(\beta) d\beta,$$

$$\bar{A}_{2\ell}^{j,i} = \int_{-1}^1 q_{2\ell}(\beta) \sigma_{2\ell}(\beta) \varphi'_i(\beta) \varphi'_j(\beta) d\beta,$$

$$E_{2\ell}^j = \int_0^T E(t) A_{2\ell,j}(t) dt.$$

Описана методика реалізована у вигляді комплексу прикладних програм, написаних на алгоритмічній мові Фортран-IV, і апробована при розв'язуванні ряду задач методичного характеру. Наведемо результати розв'язування конкретної задачі.

Нехай потрібно визначити спектр $X(\alpha)$, якщо сигнал сумарного перехідного процесу моделюється функцією

$$E(t) = \exp(-0,25\pi^2 t) + \exp(-0,75\pi^2 t),$$

а сам перехідний процес - експонентою вигляду

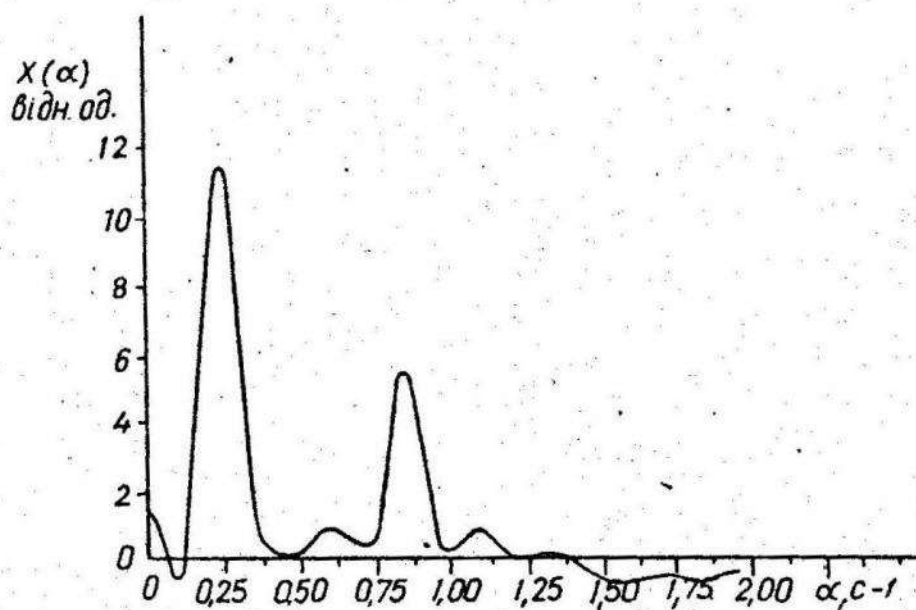
$$K(t, \alpha) = \exp(-\alpha t \pi^2).$$

Для задачі характерно те, що сигнал $E(t)$ у кожній точці спостереження t_i ускладнюється завадою

$$\tilde{E}(t_i) = E(t_i) + 0,01\rho\theta_i \max |E(t)|, \quad t \in [0, T],$$

де θ_i - випадкове число нормально розподілене на відрізку $[-1, 1]$ і отримане за допомогою генератора випадкових чисел; ρ - рівень завади /в процентах/. Для мінімізації функціоналу використано вісім елементів, при цьому порядок лінійної системи /15/ дорівнює $2N+1 = 17$. Спектр досліджували в межах від 0 до 2, рівень завади 2,5 %, вагові функції $p(\alpha) \equiv 1$, $q(\alpha) \equiv 5$. Оптимальне

значення параметра регуляризації [4] одержували шляхом обчислювального експерименту ($\gamma_{\text{опт.}} \sim 0,01$).



На графіку показано обчислений при згаданих умовах спектр $X(\alpha)$. Характер кривої ілюструє добре розділення сигналів навіть при наявності порівняно високого рівня завади.

Список літератури: 1. Жу к А.В. К вопросу о построении математической модели задачи разложения сигнала на составляющие в электроразведке МПП. - В кн.: Мат. IX конф. молодых ученых ФМИ АН УССР: Сборник. Львов, 1979, с. 30-32. Рукопись деп. в ВИНТИ № 3160-80. 2. Жу к А.В., О с т у д и н Б.А. О корректности решения одной задачи электроразведки. - В кн.: Мат. IX конф. молодых ученых ФМИ АН УССР: Сборник. Львов, 1979, с. 33-35. Рук. деп. в ВИНТИ. 3. Руководство по применению метода переходных процессов в рудной геофизике /Под ред. Ф.М.Каменецкого. - Л.: Недра, 1976. - 126 с. 4. С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е н к о Г.А., В о в к В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. - Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1981. - 87 с. 5. Т и х о н о в А.Н., А р с е н и н В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1974. - 223 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.02.83

В.С.Височанський, М.Ф.Головко, П.М.Попіль
ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ФОРМИ КОРОТКОДІЮЧИХ ПОТЕНЦІАЛІВ
НА ПОВЕДІНКУ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ЗМІШАНИХ
ІОННО-МОЛЕКУЛЯРНИХ СИСТЕМ З ДОПОМОГОЮ ЕОМ

Основна задача теорії розчинів електrolітів – знаходження бінарних функцій розподілу, з допомогою яких можна описати структурні та термодинамічні властивості системи.

Розроблений І.Р.Юхновським метод колективних змінних дає змогу рівноправно описувати іони розчиненої речовини та полярні молекули розчинника, а також враховувати як коротко-, так і далекодіючі взаємодії. Одержані в методі колективних змінних бінарні функції розподілу містять екрановані далекодіючі потенціали.

У попередніх працях [2, 3] досліджено поведінку бінарних функцій розподілу F_{++} , F_{+-} , F_{+d} , F_{dd} при різних значеннях параметрів системи.

Наша мета – дослідження поведінки бінарної функції розподілу F_{-d} у наближенні третього віріального коефіцієнта при використанні двох різних форм короткодійчих потенціалів, а саме потенціалів Леннарда-Джонса і Букінгема-Корнера [1].

Бінарна функція розподілу взаємного розміщення "аніон-диполь" у наближенні третього віріального коефіцієнта має вигляд

$$\begin{aligned}
 F_{-d}(z, v) = \exp \left\{ -\frac{\varphi_{-d}(z)}{\theta} - g_{+d}(z, v) + \right. \\
 + \frac{2\pi n_+^*}{z} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{\varphi_{+-}(\lambda)}{\theta} + g_{++}(\lambda)} - 1 \right) \lambda d\lambda \int_{|z-\lambda|}^{z+\lambda} \left(e^{-\frac{\varphi_{+d}(t)}{\theta} + g_{+d}(t, v)} - 1 \right) t dt + \\
 + \frac{2\pi n_-^*}{z} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{\varphi_{--}(\lambda)}{\theta} - g_{++}(\lambda)} - 1 \right) \lambda d\lambda \int_{|z-\lambda|}^{z+\lambda} \left(e^{-\frac{\varphi_{-d}(t)}{\theta} - g_{+d}(t, v)} - 1 \right) t dt + \\
 + \frac{2\pi n_d^*}{z} \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_{|z-\lambda|}^{z+\lambda} t dt \left[e^{-\frac{\varphi_{-d}(\lambda)}{\theta}} e^{-\frac{\varphi_{dd}(t)}{\theta}} \frac{\text{sh} \bar{G}_{-d}^d(\lambda, t, v)}{\bar{G}_{-d}^d(\lambda, t, v)} - \right. \\
 \left. - e^{-\frac{\varphi_{-d}(\lambda)}{\theta}} \frac{\text{sh} g'_{+d}(\lambda)}{g'_{+d}(\lambda)} - e^{-\frac{\varphi_{dd}(t)}{\theta}} \frac{\text{sh} \bar{G}_d^d(t, v)}{\bar{G}_d^d(t, v)} + 1 \right] +
 \end{aligned}
 \quad //1/$$

$$+ \frac{4\pi n_+^* dq}{z} \int_0^\infty d\lambda \int_{|\lambda-\lambda|}^{z+\lambda} \left(\kappa + \frac{1}{t}\right) e^{-\kappa(\lambda+t)} \cos(v) f_1(t) dt -$$

$$- \frac{2\pi n_+^* d}{3z} q \omega \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_{|\lambda-\lambda|}^{z+\lambda} t \left(\kappa^2 + \frac{2\kappa}{t} + \frac{2}{t^2}\right) \left(\kappa + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\kappa(\lambda+t)} \frac{1}{\lambda t} \times$$

$$\times \cos(v) f_1(\lambda) f(t) dt.$$

Тут введені такі позначення:

$$G_d^d(\lambda, t, v) = \left\{ \frac{q^2}{\lambda^2} \left(\kappa + \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-2\kappa\lambda} + \omega^2 \left[\cos^2(v) \frac{1}{t^2} \left(\kappa^2 + \frac{2\kappa}{t} + \frac{2}{t^2}\right)^2 + \sin^2(v) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left(\kappa + \frac{1}{t}\right)^2 \frac{1}{t^4} \right] e^{-2\kappa t} - \frac{2q\omega}{\lambda t} \left(\kappa^2 + \frac{2\kappa}{t} + \frac{2}{t^2}\right)^2 \left(\kappa + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\kappa(\lambda+t)} \cos(v) \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$G_d^d(t, v) = \omega e^{-\kappa t} \left[\cos^2 v \frac{1}{t^2} \left(\kappa^2 + \frac{2\kappa}{t} + \frac{2}{t^2}\right)^2 + \sin^2 v \left(\kappa + \frac{1}{t}\right)^2 \frac{1}{t^4} \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$g_{++}(z) = \frac{d}{z} e^{-\kappa z};$$

$$g'_{+d}(z) = \frac{q}{z} e^{-\kappa z} \left(\kappa + \frac{1}{z}\right);$$

$$g_{+d}(z, v) = g'_{+d}(z) \cos v;$$

$$f_1(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < \sigma_{-d} \\ 1, & \lambda \geq \sigma_{-d} \end{cases}; \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \sigma_{dd} \\ 1, & t > \sigma_{dd} \end{cases}.$$

Дослідження функції розподілу /I/ проводили з використанням короткодіючих потенціалів Леннарда-Джонса

$$-\frac{\varphi_{xy}(z)}{Q} = -\frac{4\delta_{xy}^*}{T^*} \left[\left(\frac{\sigma_{xy}^*}{z} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma_{xy}^*}{z} \right)^6 \right] \quad /2/$$

і Букінгема-Корнера

$$-\frac{\varphi_{xy}(z)}{Q} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon_{xy}^*}{T^*} \left[1 + \beta - \frac{6+8\beta}{\alpha} \right]^{-1} \left[\frac{6+8\beta}{\alpha} e^{\alpha(1-\frac{z}{\sigma_{xy}^*})} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\sigma_{xy}^*}{z} \right)^6 - \beta \left(\frac{\sigma_{xy}^*}{z} \right)^8 \right], & z \geq \sigma_{xy}^* \\ -\frac{\varepsilon_{xy}^*}{T^*} \left[1 + \beta - \frac{6+8\beta}{\alpha} \right]^{-1} \left[\frac{6+8\beta}{\alpha} e^{\alpha(1-\frac{z}{\sigma_{xy}^*})} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\sigma_{xy}^*}{z} \right)^6 + \beta \left(\frac{\sigma_{xy}^*}{z} \right)^8 \right] e^{-4(\frac{\sigma_{xy}^*}{z}-1)^3}, & z < \sigma_{xy}^* \end{cases} \quad /3/$$

при двох різних концентраціях іонів $n_+^* = n_-^*$, широкому наборі

концентрацій молекул розчинника n_d^* і двох орієнтаціях фіксованого диполя, а саме $v=0$ і $v=\frac{\pi}{2}$.

Для розрахунку /1/ параметри короткодійчих потенціалів /2/, /3/ вибирали так, щоб вони відповідали розчину кухонної солі у воді, тобто:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_{-d}^* = 1,112, & \sigma_{-d}^* = 1,378, & T^* = 1,5. \\ \varepsilon_{dd}^* = 1,935, & \sigma_{dd}^* = 1,165, & \\ \varepsilon_{+d}^* = 0,596, & \sigma_{+d}^* = 1,000, & \\ \varepsilon_{+-}^* = 0,340, & \sigma_{+-}^* = 1,213, & \\ \varepsilon_{--}^* = 0,634, & \sigma_{--}^* = 1,591, & \end{array}$$

Для короткодійчого потенціалу /3/ приймали $\alpha = 12,0$, $\beta = 0$.

Решта параметрів вибирали наступним чином:

I. $n_+^* = n_-^* = 0,035449$:

$$\begin{array}{llll} 1. n_d^* = 1,180, & 2. n_d^* = 0,820, & 3. n_d^* = 0,393, & 4. n_d^* = 0,180, \\ \alpha = 6,723, & \alpha = 9,550, & \alpha = 19,101, & \alpha = 38,202, \\ \mathcal{H} = 2,499, & \mathcal{H} = 2,979, & \mathcal{H} = 4,212, & \mathcal{H} = 5,956, \\ q = 1,128, & q = 1,602, & q = 3,204, & q = 6,408, \\ \omega = 0,189. & \omega = 0,268. & \omega = 0,536. & \omega = 1,073. \end{array}$$

II. $n_+^* = n_-^* = 0,00709$:

$$\begin{array}{llll} 1. n_d^* = 1,180, & 2. n_d^* = 0,393, & 3. n_d^* = 0,180, & 4. n_d^* = 0,0177, \\ \alpha = 6,723, & \alpha = 19,101, & \alpha = 38,202, & \alpha = 156,86, \\ \mathcal{H} = 1,118, & \mathcal{H} = 1,884, & \mathcal{H} = 2,664, & \mathcal{H} = 5,399, \\ q = 1,128, & q = 3,204, & q = 6,408, & q = 26,48, \\ \omega = 0,189. & \omega = 0,536. & \omega = 1,073. & \omega = 4,435. \end{array}$$

Для обчислень виразу /1/ складена програма мовою Фортран-IV. Інтеграли розраховували, використовуючи метод Сімпсона. В інтегралах, які у верхній межі інтегрування містять безмежність, при чисельних розрахунках приймали значення, за яких підінтегральна функція дорівнювала нулю з потрібною точністю. Підінтегральні функції в /1/ містять вирази $e^{-\frac{F_{\pm d}(z)}{\theta}}$, що при певних значеннях параметрів дорівнюють нулю. Тому проводили окремі дослідження цих виразів при відповідних значеннях параметрів і підінтегральні функції відповідним чином до визначали. Отже, складені програми є оптимальними в сенсі використання машинного часу. Під час розрахунків використовували машини ЕС-1022 і ЕС-1060.

Як видно із табл. 1, 2, при великих концентраціях іонів поведінка бінарної функції розподілу $F_{-d}(z, v)$ не залежить від орієнтації фіксованого диполя. За меншої концентрації іонів як в області першого, так і в області другого максимуму криві функції

Продовження табл. I

Короткодіючий потенціал																
Ленарда-Джонса																
Букінгема-Корнера																
n	$n^*d=1,180$	$n^*d=0,393$	$n^*d=0,180$	$n^*d=0,018$	$n^*d=1,180$	$n^*d=0,393$	$n^*d=0,180$	$n^*d=0,018$	$n^*d=1,180$	$n^*d=0,393$	$n^*d=0,180$	$n^*d=0,018$	$n^*d=1,180$	$n^*d=0,393$	$n^*d=0,180$	$n^*d=0,018$
$v=0$	$v=\frac{\pi}{2}$	$v=0$	$v=\frac{\pi}{2}$	$v=0$	$v=\frac{\pi}{2}$	$v=0$	$v=\frac{\pi}{2}$	$v=0$	$v=\frac{\pi}{2}$	$v=0$	$v=\frac{\pi}{2}$	$v=0$	$v=\frac{\pi}{2}$	$v=0$	$v=\frac{\pi}{2}$	$v=0$
2.3	2.39	2.82	1.49	1.55	1.31	1.30	1.14	1.14	6.17	7.68	1.99	2.12	1.47	1.44	1.10	1.10
2.4	3.69	4.31	1.68	1.75	1.36	1.35	1.12	1.12	7.83	9.57	2.11	2.25	1.48	1.48	1.08	1.08
2.5	6.00	6.95	1.94	2.02	1.43	1.43	1.10	1.10	8.39	10.05	2.13	2.26	1.48	1.47	1.07	1.07
2.6	10.23	11.76	2.29	2.38	1.53	1.53	1.10	1.10	7.18	8.42	2.00	2.10	1.42	1.42	1.06	1.06
2.7	15.10	17.17	2.58	2.68	1.60	1.60	1.10	1.10	5.71	6.57	1.84	1.92	1.36	1.36	1.05	1.05
2.8	16.85	18.95	2.65	2.75	1.61	1.61	1.10	1.10	4.34	4.90	1.67	1.73	1.30	1.30	1.05	1.05
2.9	15.19	16.85	2.55	2.63	1.57	1.57	1.10	1.10	3.40	3.78	1.54	1.58	1.24	1.24	1.04	1.04
3.0	11.82	12.95	2.34	2.40	1.50	1.50	1.10	1.10	2.71	2.97	1.42	1.46	1.19	1.19	1.03	1.03

Таблиця 2

Поведінка бінарної функції розподілу $F_d(z, v)$ при концентрації іонів $n_d^* = 0.0354$ в залежності від типів короткодійних потенціалів, концентрації молекул розчинника n_d^* , кута U і віддалі z між взаємодіючими частинками

Короткодійний потенціал										
Ленарда-Джонса					Букінгема-Корнера					
z	$n_d^* = 1,180$	$n_d^* = 0,820$	$n_d^* = 0,393$	$n_d^* = 0,180$	$n_d^* = 1,180$	$n_d^* = 0,820$	$n_d^* = 0,393$	$n_d^* = 0,180$	$U = 0$	$U = \frac{\pi}{2}$
v	$U = 0$	$U = \frac{\pi}{2}$	$U = 0$	$U = \frac{\pi}{2}$	$U = 0$	$U = \frac{\pi}{2}$	$U = 0$	$U = \frac{\pi}{2}$	$U = 0$	$U = \frac{\pi}{2}$
1.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0.11	0.05
1.2	0	0	0	0	0	0	0	0	1.70	1.07
1.3	0.70	0.78	0.46	0.50	0.28	0.29	0.22	0.22	2.98	2.23
1.4	3.01	3.23	2.32	2.45	1.72	1.77	1.49	1.49	2.66	2.27
1.5	3.14	3.29	2.75	2.84	2.36	2.39	2.18	2.18	2.13	1.94
1.6	2.34	2.41	2.23	2.28	2.12	2.13	2.06	2.06	1.73	1.64
1.7	1.71	1.75	1.73	1.75	1.75	1.76	1.76	1.76	1.56	1.47
1.8	1.39	1.41	1.44	1.45	1.49	1.49	1.52	1.52	1.50	1.37
1.9	1.26	1.27	1.29	1.30	1.33	1.33	1.35	1.35	1.62	1.37
2.0	1.29	1.30	1.28	1.28	1.27	1.27	1.26	1.26	1.81	1.41

Продовження табл. 2

Короткодівний потенціал															
Деннарда-Джонса															
Букінгема-Корнера															
n	$n^*_d = 1,180$	$n^*_d = 0,820$	$n^*_d = 0,393$	$n^*_d = 0,180$	$n^*_d = 1,180$	$n^*_d = 0,820$	$n^*_d = 0,393$	$n^*_d = 0,180$	$n^*_d = 0,820$	$n^*_d = 0,393$	$n^*_d = 0,180$	$v = 0$	$v = \frac{\pi}{2}$	$v = 0$	$v = \frac{\pi}{2}$
2.1	1.46	1.47	1.37	1.26	1.26	1.21	1.21	3.13	3.15	2.27	2.27	1.54	1.54	1.27	1.27
2.2	1.86	1.87	1.60	1.59	1.32	1.32	1.20	4.37	4.40	2.85	2.85	1.70	1.70	1.31	1.31
2.3	2.56	2.56	1.97	1.99	1.44	1.44	1.23	6.88	6.92	3.88	3.88	1.96	1.96	1.39	1.39
2.4	3.92	3.92	2.63	2.62	1.63	1.63	1.28	8.66	8.72	4.54	4.54	2.10	2.10	1.43	1.43
2.5	6.34	6.35	3.65	3.65	1.89	1.89	1.36	9.26	9.32	4.75	4.75	2.14	2.14	1.44	1.44
2.6	10.78	10.80	5.27	5.26	2.24	2.24	1.46	7.92	7.96	4.26	4.26	2.03	2.03	1.40	1.40
2.7	15.88	15.91	6.88	6.88	2.54	2.54	1.54	6.30	6.33	3.63	3.63	1.89	1.89	1.36	1.36
2.8	17.77	17.81	7.44	7.44	2.64	2.64	1.57	4.77	4.80	2.99	2.99	1.72	1.72	1.30	1.30
2.9	16.06	16.10	6.94	6.95	2.56	2.56	1.55	3.72	3.73	2.52	2.52	1.58	1.58	1.26	1.26
3.0	12.55	12.58	5.86	5.86	2.37	2.37	1.50	2.95	2.96	2.14	2.14	1.46	1.46	1.21	1.21

при $v = \frac{\pi}{2}$ розміщені вище порівняно з відповідними кривими для $v = 0$. Зі зменшенням концентрації розчинника n^* максимуми функції розподілу падають.

При великих концентраціях розчинника висота другого максимуму значно більша у випадку короткодійного потенціалу /2/, а в області малих концентрацій диполів висоти максимумів змінюються незначно залежно від вибору короткодійних потенціалів. Під час використання потенціалу /2/ значення максимумів досягається при $z = 1,5$ і $z = 2,8$, а для /3/ - при $z = 1,3$ і $z = 2,5$.

Список літератури: І. Мейсон Э., Сперлинг Г. Вириальное уравнение состояния. - М.: Мир, 1972. - 280 с.
2. Юхновский И.Р., Головкин М.Ф., Высочанский В.С. Приближение третьего вириального коэффициента для бинарных функций распределения смешанных ионно-дипольных систем. - К., 1980. 20 с. - /Препринт /АН УССР, Ин-т теорет. физики; 80-70 Р/.
3. Юхновский И.Р., Головкин М.Ф., Высочанский В.С. Исследование бинарных функций распределения смешанных ионно-дипольных систем, записанных в виде экспоненты от потенциала средней силы. - Укр. физ. журн., 1977, т.22, № 8, с. 1330-1335.

Стаття надійшла до редколегії 20.04.85

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОМЕХАНІКИ

Розглянемо задачу про визначення обмеженого розв'язку системи рівнянь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta^2 \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad /1/$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\alpha^2 \frac{\partial v}{\partial t} = \beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) \quad /2/$$

в області $\Pi = \{(x, t): 0 \leq x \leq \ell, -\infty < t \leq T\}$,
яке задовольняє такі граничні умови:

$$u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = v|_{x=0} = v|_{x=\ell} = 0,$$

де a, b, c, α - сталі; $f(x, t)$ - гладка обмежена в Π функція. /3/

Зазначимо, що умову обмеженості f по t можна замінити експоненціальним ростом з відповідним показником.

Система рівнянь /1/-/2/ при $\beta = 0$ описує динамічні температурні напруги у безмежній плиті товщини ℓ із врахуванням скінченної швидкості поширення тепла [2].

Задачу розв'язуємо методом академіка А.Н.Тихонова [3, 4]. Позначимо $\Pi[t_0, \tau] = \{(x, t) : 0 \leq x \leq \ell, t_0 \leq t \leq \tau\}$ і приєднаємо до /1/-/2/-/3/ початкові умови

$$u|_{t=t_0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0} = \psi(x),$$

$$v|_{t=t_0} = \Phi(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=t_0} = \Psi(x). \quad /4/$$

Розв'язок задачі /1/-/4/ в $\Pi[t_0, \tau]$ можна побудувати з допомогою методу Фур'є. Виконуючи потім граничний перехід при $t \rightarrow -\infty$, одержуємо розв'язок задачі /1/-/3/

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad /5/$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad /6/$$

де

$$B_n(t) = \int_{-\infty}^t f_n(\tau) \frac{\sin \sqrt{\left(\frac{bn\pi}{\ell}\right)^2 - \alpha^4} (t-\tau)}{\sqrt{\left(\frac{bn\pi}{\ell}\right)^2 - \alpha^4}} e^{-\alpha^2(t-\tau)} d\tau;$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x, t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx;$$

$$A_n(t) = -a^2 \int_{-\infty}^t B_n''(\tau) \frac{\sin \sqrt{\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 - \beta^4} (t-\tau)}{\sqrt{\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 - \beta^4}} e^{-\beta^2(t-\tau)} d\tau. \quad /7/$$

Для виділення єдиного розв'язку системи /1/-/2/ наявність в одному тільки рівнянні /2/ коефіцієнта $\alpha \neq 0$ недостатня. Необхідно ввести аналогічний член і в /1/.

Для того щоб в рамках статті [1] побудувати динамічні термопружні поля в плиті, зумовлені скінченною швидкістю поширення тепла, у момент часу достатньо віддалений від початкового, потрібно [4] виконати у розв'язках /5/-/7/ граничний перехід при $\beta \rightarrow 0$. Ця границя існує, оскільки $B_n(t)$ експоненціально спадає при $t \rightarrow -\infty$ і визначальний $A_n(t)$ інтеграл рівномірно збігається.

Список літератури: 1. Н а в а л І.К. Термоупругие волны в слое при конечной скорости распространения тепла. - Изв. АН МССР. Сер. физ.тех. и мат. наук, 1972, № 2, с.78-80. 2. П о д с т р і г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Обобщенная термомеханика. - К.: Наук. думка, 1976, - 312 с. 3. Т и х о н о в А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. - Мат.сб., 1935, т.42, № 2, с.198-216. 4. Т и х о н о в А.Н., С а м а р с к и й А.А. Уравнения мат. физики. - М.: Наука, 1966. - 724 с.

Стаття надійшла до редколегії 30.05.83

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В області $\Pi = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l; -\infty < t \leq T\}$
/ l, T - сталі / розглянемо задачу про визначення обмеженого класичного розв'язку рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(t)u + f(x, t), \quad /1/$$

що задовольняє умови

$$|u(x, t)| < +\infty \quad (x, t) \in \Pi \quad /2/$$

$$u|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad u|_{x=l} = \varphi_2(t), \quad -\infty < t \leq T. \quad /3/$$

Мають місце такі теореми.

Теорема I. Нехай неперервні функції $a(t), b(t), \varphi_i(t) (i=1,2), f(x, t)$ задовольняють наступні умови:

- 1/ функції $\varphi_i(t)$ неперервно-диференційовані та обмежені при $t \in]-\infty, T]$, $T = \text{const} > 0$;
- 2/ $a(t), b(t)$ неперервні та обмежені при $t \in]-\infty, T]$, причому $a(t) > 0, b(t) \geq 0$;

3/ $f(x, t)$ неперервна та обмежена в області
 $\Pi = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, -\infty < t \leq T\},$

причому ряди Фур'є

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

де

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ f(x, t) - \left[\varphi_1'(t) + \frac{x}{l} (\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)) \right] \right\} \sin \frac{k\pi}{l} x dx$$

рівномірно збігаються у області Π . Тоді в області

$\Pi = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l; -\infty < t \leq T\}$ існує обмежений класичний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(t)u + f(x, t), \quad /1/$$

який задовольняє граничну умову

$$u|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad u|_{x=l} = \varphi_2(t). \quad /2/$$

Тут термін "класичний розв'язок рівняння /1/" означає, що цей розв'язок є неперервною функцією своїх аргументів, яка має дві похідні по x і одну похідну по t , що неперервні в області, де розглядається рівняння /1/.

З теореми I випливає наступна теорема.

Теорема 2. Нехай:

1/ функції $\varphi_i(t)$ ($i=1;2$) обмежені та неперервно-диференційовані при $t \in]-\infty, T]$;

2/ $a(t), b(t)$ - неперервні та обмежені при $t \in]-\infty, T]$, причому $a(t) > 0$, $b(t) \geq 0$;

3/ $f(x, t)$ двічі неперервно-диференційована по x та неперервна по t у області Π , причому $f_1(0, t) = f_1(l, t) = 0$,
де

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \left\{ \varphi_1(t) + \frac{x}{l} [\varphi_2(t) - \varphi_1(t)] \right\}.$$

Тоді в області $\Pi = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l; -\infty < t \leq T\}$

існує класичний обмежений розв'язок рівняння /1/, який задовольняє умову /2/.

Зазначення. Умови обмеженості на функції $f(x, t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $a(t)$, $b(t)$ можна замінити умовами обмеженого росту при $t \rightarrow -\infty$.

Стаття надійшла до редколегії 04.01.84

УДК 519.24 + 681.3.06

А.І.Кардаш, О.П.Коркуна

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ В РЕГРЕСІЙНОМУ АНАЛІЗІ

Під час створення складних технічних систем у сучасних умовах виникає проблема ідентифікації й оптимізації зразків нової техніки [4]. Для її розв'язання необхідна велика кількість дослідів, які треба обробляти в реальному масштабі часу [5].

Задача дослідження складних систем полягає у виявленні залежності між вхідними параметрами /факторами/ та вихідними параметрами /показниками якості функціонування системи/, а також визначенні рівнів факторів, які оптимізують вихідні параметри системи. Вона має статистичний характер, тому як модель об'єкта вибираємо рівняння регресії

$$y = b_0 x_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i, \quad /1/$$

де $x_0 = 1$ - фіксована змінна; $x_i (i=1, 2, \dots, k)$ - фактори; y - відгук. Рівняння /1/ лінійне. Це не зменшує загальності, оскільки добуток двох і більшого числа змінних можна замінити новими змінними.

Задача регресійного аналізу полягає в експериментальному визначенні коефіцієнтів регресії шляхом спостереження за характером зміни вхідних змінних $x_1, x_2, \dots, x_k$ і вихідної змінної y .

Проведенню експериментів передувє вибір плану випробувань, який базується на схемі повного факторного експерименту та його дробових репліках [2]. Оцінки коефіцієнтів регресії дістаємо з допомогою метода найменших квадратів. Стосовно нашого випадку отримуємо систему нормальних рівнянь

$$\sum_{i=0}^k b_i \sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} = \sum_{u=1}^N x_{ju} y_u, \quad j=0, 1, \dots, k, \quad /2/$$

де N - число дослідів / $N \geq k+1$ /. Система містить $k+1$ рівняння, з яких можна визначити $k+1$ невідомий коефіцієнт регресії.

Після реалізації експерименту переходимо до аналізу й обробки результатів випробувань. Здійснимо програмну реалізацію обчислювальних процедур статистичного аналізу результатів експериментування.

Однорідність отриманого статистичного матеріалу та виключення грубих помилок /викидів/ перевіряємо, використовуючи статистичні критерії прийняття гіпотез /критерій Стюдента, Фішера, Кокрена/ [3]. Розв'язок рівняння /2/ дає змогу отримати коефіцієнти математичної моделі досліджуваного об'єкта чи системи. Далі проводимо перевірку математичної моделі на адекватність з використанням критерію Фішера [1]. Щоб здійснити перевірку значущості коефіцієнтів регресії, розраховуємо інтервали довір'я при певному рівні значущості α . Статистичний аналіз завершує інтерпретація моделі в термінах об'єкта досліджень.

Запропонована система обробки експериментальних даних дає змогу:

1/ виділити суттєві фактори і відкинути з розгляду менш важливі, віднісши їх до "фону";

2/ отримати лінійну математичну модель, яку застосовують в методі крутого сходження під час руху в напрямку майже стаціонарної області /області, що містить екстремум/. Після досягнення майже стаціонарної області використовують плани з великою кількістю дослідних точок, які дозволяють отримати поліноміальні моделі більш високого порядку /другого і вище/;

3/ з допомогою математичних моделей, які включають головні ефекти факторів, а також ефекти взаємодій, у випадку адекватності з певним ступенем точності визначати оптимальні поєднання рівнів факторів.

Розглянемо приклад аналізу матеріалів випробувань півнатурного рухомого об'єкта. До уваги взято 13 факторів. Реалізовано 128 дослідів за схемою дробового факторного експерименту 2^{13-6} . Внаслідок аналізу п'ять дослідів відкинуто. Крім цього, виявилось, що розбігу та гальмуванню відповідають різні області факторного простору. Тому аналіз цих режимів надалі проводили окремо. Складено таблиці для двох режимів. Статистичну обробку проводили послідовно. Спочатку брали до уваги головні ефекти, потім - парні взаємодії

і т.д. Одержано такі адекватні рівняння регресії:

1/ для розбігу

$$\hat{y} = 0,2753 - 0,0195 x_5 - 0,1009 x_{10} + 0,0252 x_1 x_2 ;$$

2/ для гальмування

$$\hat{y} = 0,3740 - 0,0249 x_6 + 0,0073 x_9 + 0,0409 x_{13} .$$

Аналіз проводили з 5%-ним рівнем значущості.

Експериментальні дані обробляли з допомогою спеціалізованих проблемно-орієнтованих міні-ЕОМ, що забезпечують, як правило, головний режим випробувань – режим вибіркового експрес-аналізу експериментальних даних у реальному масштабі часу. Наявність такого режиму дає змогу виявити непередбачені ситуації, внести відповідні корективи в експеримент і здійснити таким чином динамічне управління ходом випробувань, а також планування наступних його стадій.

Запропонована організація обчислювального процесу системи обробки експериментальних даних в натурних умовах добре поєднується з можливостями міні-ЕОМ, що використовують як базові при побудові таких систем.

Список літератури: 1. А ф и ф и А., Э й з е н С. Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ. – М.: Мир, 1982. – 488 с. 2. Д ж о н с о н Н., Д и о н Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. – М.: Мир, 1981. – 520 с. 3. З е д - г и н и д з е И.Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. – М.: Наука, 1976. – 390 с. 4. К а р - д а ш А.И., К о р к у н а О.П., М а к с и м о в и ч Ю.М. Статистика и планирование эксперимента при проведении натурных испытаний объектов новой техники. – В кн.: Численные методы решения задач математической физики. М., 1983, с.41-42. 5. К о р н и е н - к о Г.И. Цифровой вычислительный комплекс многоканальной обработки экспериментальных данных в реальном времени /ДВК "Пирс"/. – Управляющие системы и машины, 1979, № 6, с.130-136.

Стаття надійшла до редколегії 06.10.83

Р.І.Мокрик, О.М.Уханська
 НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ
 ДЛЯ ТІЛА ЗМІННОЇ МАСИ

Кількісне вивчення явищ і процесів, що наявні в реальних деформівних системах, можливе на основі конкретних теоретичних моделей механіки суцільного середовища, які досить точно описують явища та процеси в взаємозв'язку з максимальним врахуванням відомих теоретичних й експериментальних даних. Як правило, при вивченні деформівно-напруженого стану в термопружному тілі вважається, що маса його незмінна [3, 4].

Розглянемо пружне тіло, маса якого не постійна, а змінюється з часом, що приводить до інших законів розподілу полів деформації і температури порівняно з тілами незмінної маси.

Нехай зміна в часі маси m тіла характеризується деякою функцією $f(t)$ з густиною $f^*(t)$, тобто

$$\frac{dm}{dt} = f(t) = \int f^*(t) d\tau_0, \quad /1/$$

τ_0 - об'єм тіла; $m = \int_{\tau_0} \rho d\tau_0$; ρ - густина середовища.

Введемо позначення: $\vec{u}$ - вектор переміщення; Θ - температура; λ, μ - коефіцієнти Ламе; α_T - коефіцієнт лінійного розширення; l_1 - коефіцієнт, що характеризує зміну маси; σ_{ij} - компоненти тензора напружень; ϵ_{ij} - компоненти тензора деформацій; N - кількість молекул у тілі; N_0 - число Авогадро; λ_0 - коефіцієнт теплопровідності; $\bar{\mu}$ - хімічний потенціал; ξ_i - просторові координати; $\vec{F}$ - вектор масових сил; C_ϵ - питома теплоємність; W_1 - кількість теплоти, що виробляється; W_2 - кількість теплоти, яка витрачається в одиниці об'єму за одиницю часу; a - коефіцієнт температуропровідності.

Тоді з врахуванням /1/ на основі законів зміни кількості руху та енергії [2, 3] отримуємо такі основні співвідношення для середовища зі змінною масою:

рівняння нерозривності руху

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = f^*(t); \quad /2/$$

рівняння кількості руху

$$\rho \ddot{\vec{u}} + f^*(t) \vec{u} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} - \gamma \operatorname{grad} \Theta + l_1 \operatorname{grad} N + \rho \vec{F}; \quad /3/$$

співвідношення Дюгамеля-Неймана для ізотропного середовища

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda e - \gamma \bar{\theta} + l_1 N) \delta_{ij} ; \quad /4/$$

рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \xi_i^2} - \frac{1}{\kappa} \dot{\bar{\theta}} - \eta \dot{e} + \frac{1}{N_0 \lambda_0} \bar{\mu} \dot{N} = -Q . \quad /5/$$

Зв'язок між густиною зміни маси $f^*(t)$ і зміною кількості молекул $N(t)$

$$f^*(t) = \varrho \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} , \quad /6/$$

де

$$\kappa = \frac{\lambda_0}{c_\xi + \frac{\bar{\mu} N(t)}{N_0 T_0}} ; \quad \eta = \frac{\gamma T_0}{\lambda_0} ; \quad Q = \frac{W}{\lambda_0} ;$$

$$a = \frac{\lambda_0}{c_\xi} ; \quad \gamma = \alpha_T (3\lambda + 2\mu) ; \quad W = W_1 - W_2 . \quad /7/$$

Вважаючи відсутніми масові сили та джерела тепла $\vec{F} = 0, Q = 0$ і нехтуючи зв'язністю у рівнянні енергії $\eta = 0$, розглянемо одновимірну задачу термопружності для шару з фіксованою нижньою границею $\xi = 0$ і змінною верхньою $\xi = h(t)$. У початковий момент часу температура тіла стала, переміщення та швидкості відсутні. На нижній основі шару, яка жорстко защемлена, підтримується постійна температура. На вільній від напружень верхній основі задано змінну в часі температуру. Зміщення верхньої границі задається

$$h(t) = h_0 (R - e^{-vt}) \quad /8/$$

і відповідно зміна коефіцієнта κ

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{a} [1 + m_0 (1 - e^{-\lambda' t})] , \quad /9/$$

де R , m_0 - постійні величини; h_0 - початкова товщина шару; v - параметр, що характеризує швидкість зміщення верхньої границі; λ' - характеризує швидкість зміни коефіцієнта κ , що є аналогом коефіцієнта температуропровідності a для випадку тіла змінної маси.

Використавши заміну змінних

$$z_0 = \frac{h_0 \xi}{h(t)} ; \quad /10/$$

$$y = \frac{z_0}{h_0} , \quad \tau = \frac{at}{h_0^2} ; \quad /11/$$

$$\bar{\theta} = T_0 \theta , \quad \bar{\theta}_0 = T_0 \theta_0 , \quad u = U h_0 , \quad /12/$$

задачу зводимо до розв'язування системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - [1 + m_0(1 - e^{-\alpha_0 \tau})] (R - e^{-v_0 \tau})^2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \\ + v_0 [1 + m_0(1 - e^{-\alpha_0 \tau})] (R - e^{-v_0 \tau}) e^{-v_0 \tau} y \frac{\partial \theta}{\partial y} + \\ + m_0 \alpha_0 e^{-\alpha_0 \tau} (R - e^{-v_0 \tau})^2 = 0 , \end{aligned} \quad /13/$$

$$\begin{aligned} [1 - B_1 y^2 v_0^2 e^{-2v_0 \tau}] \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - B_3 (R - e^{-v_0 \tau}) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \\ = B_1 \frac{\alpha_0 e^{-\alpha_0 \tau}}{R - e^{-\alpha_0 \tau}} (R - e^{-v_0 \tau})^2 \frac{\partial U}{\partial \tau} + B_1 (R - e^{-v_0 \tau})^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \\ + y v_0 e^{-v_0 \tau} B_1 [y v_0 (R + e^{-v_0 \tau}) - \\ - \frac{\alpha_0 e^{-\alpha_0 \tau}}{R - e^{-\alpha_0 \tau}} (R - e^{-v_0 \tau})] \frac{\partial U}{\partial y} - \\ - 2 B_1 y v_0 e^{-v_0 \tau} (R - e^{-v_0 \tau}) \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \tau} \end{aligned} \quad /14/$$

при граничних і початкових умовах

$$\theta|_{y=0} = \theta_0 , \quad U|_{y=0} = 0 ; \quad /15/$$

$$\theta|_{y=1} = \theta_0 (R - e^{-A_0 \tau}) , \quad \sigma_{yy}|_{y=1} = 0 ,$$

$$\theta|_{\tau=0} = \theta_0 , \quad U|_{\tau=0} = \frac{\partial U}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 . \quad /16/$$

Задача /13/-/16/ розв'язується за допомогою сіткового методу з використанням явної різницевої схеми [1]. Ввівши дискретну сітку

$$y_i = iS , \quad i = \overline{0, L} ,$$

$$\tau_k = k\ell , \quad k = \overline{0, M} , \quad /17/$$

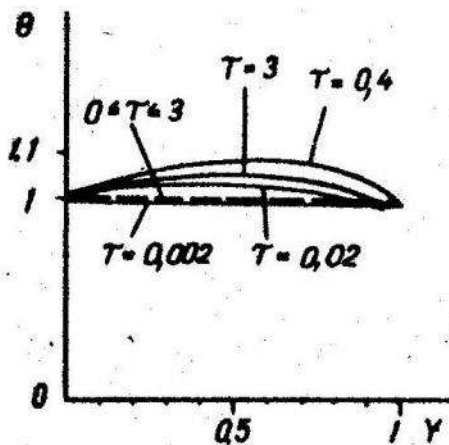


Рис. 1.

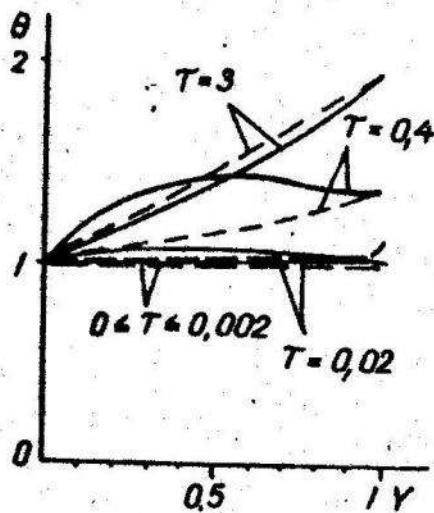


Рис. 3.

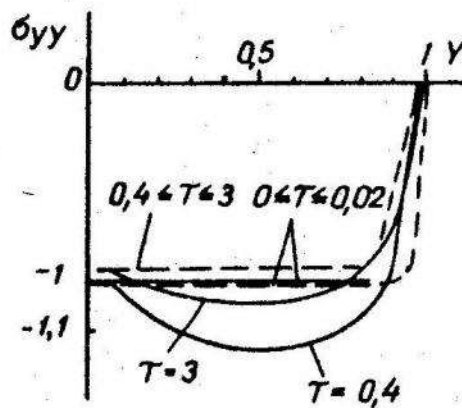


Рис. 2.

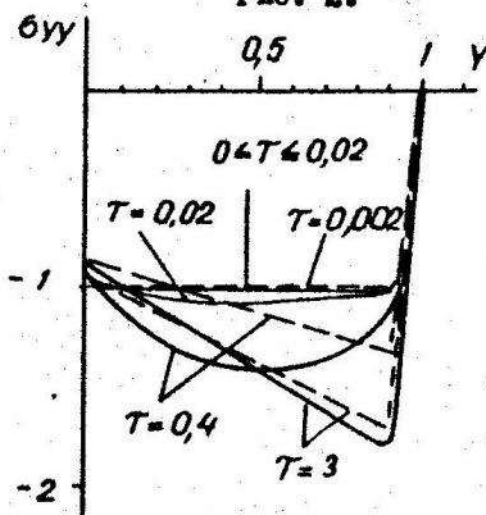


Рис. 4.

замінімо задачу /13/-/16/ наступною різницевою:

$$\theta_{i,k+1} = a_{i,k} \theta_{i,k} + b_{i,k} \theta_{i+1,k} + c_{i,k} \theta_{i-1,k} + d_{i,k}, \quad /18/$$

$$U_{i,k+1} = -\frac{1}{c_{i,k}^6} [c_{i,k}^1 U_{i+1,k} - c_{i,k}^2 U_{i,k} + c_{i,k}^3 U_{i-1,k} - c_{i,k}^5 U_{i,k-1} + c_{i,k}^4 U_{i+1,k+1} - c_{i,k}^7 (\theta_{i+1,k} - \theta_{i,k})] \quad /19/$$

при граничних і початкових умовах

$$\theta_{0,k} = \theta_0, \quad U_{0,k} = 0, \quad k = \overline{0, M}; \quad /20/$$

$$\theta_{L,k} = \theta_0 (R - e^{-A_0 \tau_k}), \quad k = \overline{0, M}; \quad /21/$$

$$U_{L,k} = U_{L-1,k} + W_k, \quad k = \overline{2, M};$$

$$\theta_{i,0} = \theta_0, \quad U_{i,0} = 0, \quad U_{i,1} = 0, \quad i = \overline{0, L}. \quad /22/$$

З /4/ і /17/ випливає співвідношення для знаходження напружень

$$\sigma_{i,k} = \frac{A_1}{S(R - e^{-A_0 \tau_k})} (U_{i+1,k} - U_{i,k}) - A_2 \theta_{i,k}, \quad /23/$$

де A_1 і A_2 - постійні величини.

Числові розрахунки проводили для параметрів $0 \leq \tau \leq 3$, $S = 0,1$; $\ell = 0,001$; $B_1 = B_2 = 1$; $A_1 = 10$; $A_2 = 1$. На рис. 1 показано розподіл температури θ , а на рис. 2 напруження σ_{yy} по безрозмірній товщині шару y для різних значень безрозмірного часу τ при значеннях параметрів $\alpha_0 = 1$, $\nu_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ тобто врахований лише ефект зміни маси. На рис. 3, 4 зображено відповідно розподіл температури θ і напруження σ_{yy} при $\alpha_0 = 5$, $\nu_0 = 5$, $\beta_0 = 1$, тобто враховано ще зміну температури за рахунок зміщення верхньої границі. Пунктирною лінією позначені аналогічні розподіли для тіла сталої маси / $\kappa = a$,

$$N(t) = f^*(t) = 0, \quad h(t) = h_0 \quad /.$$

Список літератури: 1. Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука, 1973. Т.1. - 634 с. 2. Де Гроот С.Р., Ма- зур П. Неравновесная термодинамика. - М.: Мир, 1964. - 456 с. 3. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. - М.: Мир, 1964. - 256 с. 4. Подстригач Я.С., Колья- но В.М. Обобщенная термомеханика. - К.: Наук. думка, 1976. - 310 с.

Стаття надійшла до редколегії 23.01.84

В.Ф.Кочубей, І.В.Олійник, О.О.Вошик
ТЕПЛООБМІН І ДИФУЗІЯ В ТРУБІ КІЛЬЦЕВОГО
ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Вивченню процесів теплообміну в циліндричних трубах присвячено ряд праць [2, 4].

Розглянемо процеси теплообміну та дифузії під час руху бінарної суміші в'язких рідин або газів між двома напівобмеженими співосними циліндрами радіусів z_1 і z_2 / $z_2 > z_1$ / при осьовій симетрії. Такі процеси описує система диференціальних рівнянь у частинних похідних на температуру T і парціальний тиск дифундуючої компоненти p [1]:

$$\frac{dT}{dt} = a \Delta T + \gamma \frac{Dk_T P}{c\rho} \Delta \ln p,$$

$$\frac{dp}{dt} = D \Delta p + \frac{Dk_T P}{T} \Delta T, \quad /1/$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$; D - коефіцієнт дифузії; k_T - термодифузійне співвідношення; a - коефіцієнт теплопровідності; P - загальний тиск суміші / $P = \text{const}$ /; ρ - густина суміші; c - питома теплоємність; γ - механічний еквівалент теплоти.

Припускаємо, що рух суміші, процеси теплообміну та дифузії стаціонарні; рух суміші стабілізований, тобто профіль швидкості не змінюється по довжині труби; рух у поперечному напрямку відсутній; зміни теплового потоку та парціального тиску вздовж осі труби незначні порівняно зі зміною вздовж радіуса; впливом дифузії на зміну температурного поля можна знехтувати.

Виходячи з цих припущень, систему /1/ записують у такому вигляді:

$$\frac{1}{a} W_z \frac{\partial T}{\partial z_1} = \Delta T,$$

$$W_z \frac{\partial p}{\partial z_1} = D \Delta p + \frac{Dk_T P}{T} \Delta T, \quad /2/$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}$; W_z - швидкість суміші у кільцевій трубі в напрямку осі z , яка задається як [2]

$$W_z = W_0 \frac{(z_2^2 - z^2) \ln z_1/z_2 - (z_2^2 - z_1^2) \ln z/z_2}{z_2^2 - z_1^2 + (z_2^2 + z_1^2) \ln z_1/z_2}, \quad /3/$$

де

$$W_0 = \frac{\Delta P}{4\mu l} \left(z_2^2 + z_1^2 - \frac{z_2^2 - z_1^2}{\ln z_2^2 - \ln z_1^2} \right);$$

ΔP – перепад тиску на відстані l від вхідного перерізу труби;
 μ – коефіцієнт динамічної в'язкості.

Припустимо, що на вході труби при $z_1 = 0$ задано постійні значення температури T_0 і парціального тиску p_0 ; зовнішня стінка підтримується при температурі T_2 і парціальному тиску p_2 ; внутрішня стінка – при температурі T_1 і парціальному тиску p_1 .

З допомогою безрозмірних співвідношень

$$R = \frac{z}{z_2}, R_1 = \frac{z_1}{z_2}, R_2 = \frac{z_2}{z_2} = 1; z = \frac{z_1}{Pe^c z_2}; D_0 = \frac{D}{T};$$

$$Pe^T = \frac{W_0 z_2}{a}, Pe^c = \frac{W_0 z_2}{D} \quad \text{– критерії Пекле,}$$

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, p^* = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1}, \eta = \frac{D_0 k_T p (T_2 - T_1)}{D (p_2 - p_1)}, \chi = \frac{Pe^T}{Pe^c} \quad /4/$$

система /2/ і граничні умови у безрозмірних величинах наберуть вигляду:

$$\chi W \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R},$$

$$W \frac{\partial p^*}{\partial z} = \frac{\partial^2 p^*}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial p^*}{\partial R} + \eta \chi W \frac{\partial \theta}{\partial z}; \quad /5/$$

$$\theta|_{z=0} = \theta_0,$$

$$p^*|_{z=0} = p_0^*,$$

$$\theta|_{R_1} = 0, \quad /6/$$

$$p^*|_{R_1} = 0, \quad /7/$$

$$\theta|_{R_2} = 1;$$

$$p^*|_{R_2} = 1,$$

де

$$W = \frac{(1 - R^2) \ln R_1 - (1 - R_1^2) \ln R}{1 - R_1^2 + (1 + R_1^2) \ln R_1}.$$

Згідно з методом розділення змінних [1] функцію $\theta(R, z)$ можна записати як

$$\theta(R, z) = \ln \frac{R}{R_1} / \ln \frac{R_2}{R_1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \psi_k(R) e^{-\lambda_k^2 z}, \quad /8/$$

де λ_k і $\psi_k(R)$ – відповідно власні значення та функції задачі Штурма – Ліувіля:

$$\begin{aligned} \psi''(R) + \frac{1}{R} \psi'(R) + \lambda^2 \chi W \psi(R) &= 0, \\ \psi(R_1) &= 0, \quad \psi(R_2) = 0. \end{aligned} \quad /9/$$

Постійні коефіцієнти A_k знаходимо з умови ортогональності власних функцій і значення $\theta(R, z)$ на вході при $z=0$

$$A_k = \int_{R_1}^{R_2} \left[\theta_0 - \frac{\ln \frac{R}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right] R W(R) dR / \int_{R_1}^{R_2} \psi_k^2(R) R W(R) dR. \quad /10/$$

Розв'язок задачі /5/, /7/ шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$\rho^*(R, z) = \rho_1^*(R, z) + \rho_2^*(R, z),$$

де $\rho_1^*(R, z)$ – частковий розв'язок неоднорідного рівняння

$$\rho_1^*(R, z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \psi_k(R) e^{-\lambda_k^2 z}. \quad /11/$$

Після підстановки /11/ в друге рівняння /5/ з врахуванням /9/ дістаємо вирази постійних C_k :

$$C_k = \frac{\eta \chi}{1 - \chi} A_k \quad k = 1, 2, \dots \quad /12/$$

Тоді функція $\rho_2^*(R, z)$ є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} W \frac{\partial \rho_2^*}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \rho_2^*}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \rho_2^*}{\partial R}, \\ \rho_2^*|_{z=0} &= \rho_0^* - \rho_1^*(R, 0), \\ \rho_2^*|_{R_1} &= 0, \quad \rho_2^*|_{R_2} = 1. \end{aligned} \quad /13/$$

Функцію $\rho_2^*(R, z)$ шукаємо у вигляді

$$\rho_2^*(R, z) = \ln \frac{R}{R_1} / \ln \frac{R_2}{R_1} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \psi_k(R) e^{-\lambda_k^2 z}, \quad /14/$$

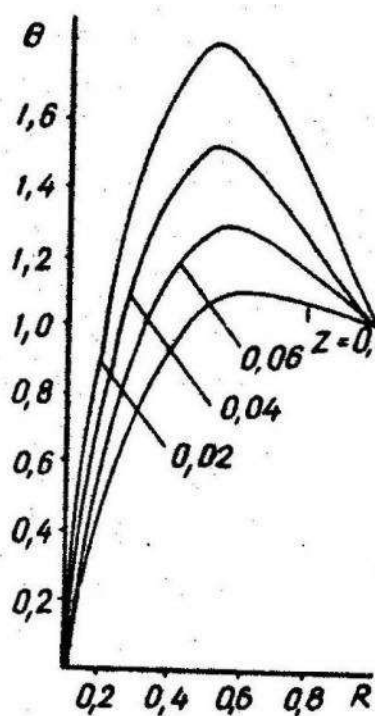


Рис. 1.

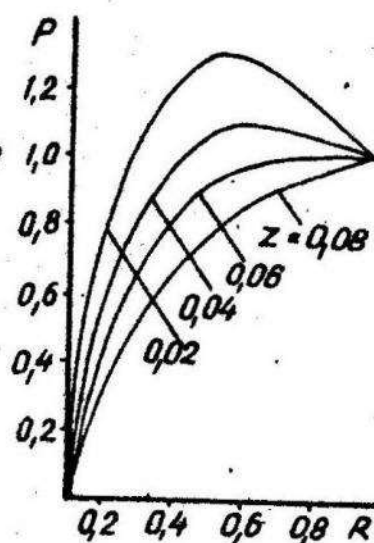


Рис. 2.

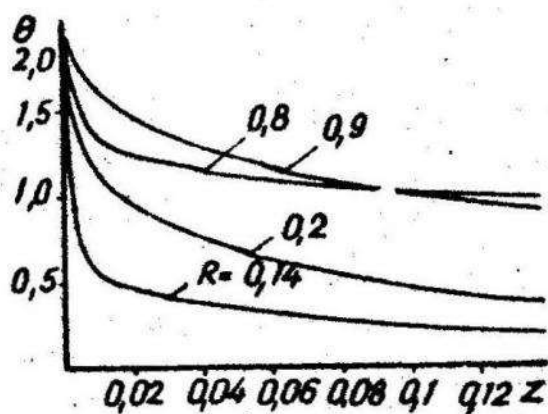


Рис. 3.

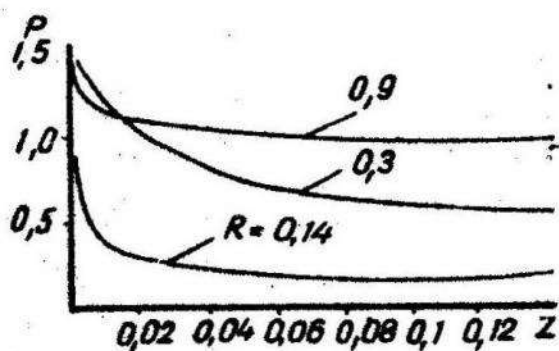


Рис. 4.

де ε_k і $\varphi_k(R)$ – відповідно власні значення та функції задачі Штурма – Ліувіля:

$$\varphi_k''(R) + \frac{1}{R} \varphi_k'(R) + \varepsilon_k^2 W \varphi_k(R) = 0,$$

$$\varphi_k(R_1) = 0,$$

$$\varphi_k(R_2) = 0.$$

/15/

Постійні коефіцієнти D_k знаходимо з умов ортогональності власних функцій φ_k :

$$D_k = \int_{R_1}^{R_2} \left(p_0^* - p_1^*(R, 0) - \frac{\ln \frac{R}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right) RW(R) dR / \int_{R_1}^{R_2} \varphi_k^2(R) RW(R) dR. \quad /16/$$

Кінцевий вираз парціального тиску

$$p^*(R, z) = \ln \frac{R}{R_1} / \ln \frac{R_2}{R_1} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \varphi_k(R) e^{-\epsilon_k^2 z} + \frac{\eta x}{1-x} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \psi_k(R) e^{-\lambda_k^2 z}. \quad /17/$$

Аналогічним методом одержуємо розв'язок задачі у випадку теплоізоляції однієї стінки при постійній температурі іншої.

Проведемо числовий аналіз отриманих результатів. Власні значення задач Штурма - Ліувіля /9/, /15/ знаходимо як корені алгебраїчного рівняння нескінченного порядку. На рис. 1, 2 показано розподіл відповідно температури і парціального тиску по перерізу кільцевої труби для деяких значень z . На рис. 3, 4 зображено зміну температури та парціального тиску по довжині труби для деяких значень R . Для числового аналізу приймали $x = 0,1$; $\eta = 0,8$; $\theta_0 = 2,0$; $p_0 = 1,5$; $R_1 = 1,0$.

Список літератури: 1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высш. шк., 1970. - 710 с. 2. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. - М.: Энергия, 1967. - 411 с. 3. Франк - Каменецкий Д.А. Теплообмен и диффузия в химической кинетике. - М.: Гостехиздат, 1947. - 368 с. 4. Hatton A.P., Quarmby A. Heat transfer in the thermal entry leught with laminar flow in an annulus. - Int. J. Heat and Mass Transfer, 1962, № 5, p. 973-980.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.84

О.М.Горечко

РОЗСІЯННЯ ВУЗЬКОНАПРЯМЛЕНОГО ЗВУКОВОГО ПУЧКА НА ПЛАСТИНІ

Розглянемо двовимірну задачу розсіювання плоскої вузьконапрямленої гармонічної акустичної хвилі на тонкій пружній пластині, яка контактує з півпростором ідеальної стисливої рідини. Ця задача зводиться до розв'язування рівнянь

$$\begin{aligned} D d_x^4 w - \rho_0 h \omega^2 w &= -(\rho_i + \rho_s)_{z=0}, \\ \partial_x^2 \rho_s + \partial_z^2 \rho_s + k^2 \rho_s &= 0 \end{aligned} \quad /1/$$

за умови безвідривного контакту рідини з пластинкою

$$\partial_z(\rho_i + \rho_s)_{z=0} = \rho \omega^2 w \quad /2/$$

та випромінювання на безмежності. В /1/, /2/ прийняті такі позначення: $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ - циліндрична жорсткість пластини; ρ_0 - густина матеріалу пластини; ρ, c - густина та швидкість звуку в рідині; $\rho_i = \rho_0 S[a^2 - (z \sin \varphi_0 - x \cos \varphi_0)^2] \times \exp(ik_x x + ik_z z)$ - тиск в зондуючому пучку шириною $2a$ з ідеальною діаграмою направленості [2]; φ_0 - кут падіння; $S(x)$ - функція Хевісайда. Гармонічний множник $\exp(i\omega t)$ тут і далі опущено.

Застосовуючи перетворення Фур'є за змінною x , приходимо до розв'язку задачі /1/, /2/

$$\begin{aligned} \rho_s = \frac{\rho_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x_z + \alpha} \sin\left(\frac{x_x + \alpha}{\cos \varphi_0}\right) \left\{ \frac{\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} + H(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} G(\alpha)} [G(\alpha) + \Lambda] - \right. \\ \left. - 1 \right\} \exp(-\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} \zeta - i\alpha \xi) d\alpha, \end{aligned} \quad /3/$$

де

$$\xi = x/a; \quad \zeta = z/a; \quad \Lambda = \rho c^2 x^2 a^3 / D; \quad \kappa = ka;$$

$$G(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} (\alpha^4 - \Omega^4) - \Lambda; \quad H(\alpha) = i[\kappa_z + (\kappa_x + \alpha) \tan \varphi_0];$$

$\Omega^4 = \rho_0 h c^2 a^2 \kappa^2 / D$. Аналітичне обчислення інтегралу /3/ неможливе.

Тому обмежимося обчисленням асимптотичного значення цього інтегралу на великих відстанях від пластинки з допомогою методу перевалу [1]. Записуючи синус в підінтегральному виразі /3/ у вигляді різниці двох експонент і обчислюючи асимптотичні значення кожного

з отриманих інтегралів, приходимо до

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p_0} &\approx \eta_+ \exp\left(\frac{i\kappa x}{\cos\varphi_0} - i\kappa R_+\right) - \eta_- \exp\left(-\frac{i\kappa x}{\cos\varphi_0} - i\kappa R_-\right) \\ &\quad \text{при } |v + \varphi_0| > 1/R + \delta/\sqrt{\kappa R}; \\ &\approx \left\{ \lambda [\text{sign}(\varphi_0 + \psi_+) F(\beta_+) - \gamma_+] + \eta_+ \right\} \exp\left(\frac{i\kappa x}{\cos\varphi_0} - i\kappa R_+\right) - \\ &\quad - \left\{ \lambda [\text{sign}(\varphi_0 + \psi_-) F(\beta_-) - \gamma_-] + \eta_- \right\} \exp\left(-\frac{i\kappa x}{\cos\varphi_0} - i\kappa R_-\right) \\ &\quad \text{при } 1/R < |v + \varphi_0| \leq 1/R + \delta/\sqrt{\kappa R}; \\ &\approx \lambda \exp[-i\kappa R \cos(\varphi_0 + v)] - \left\{ \lambda [F(\beta_+) + \gamma_+] - \eta_+ \right\} \exp\left(\frac{i\kappa x}{\cos\varphi_0} - i\kappa R_+\right) - \\ &\quad - \left\{ \lambda [F(\beta_-) - \gamma_-] + \eta_- \right\} \exp\left(-\frac{i\kappa x}{\cos\varphi_0} - i\kappa R_-\right) \\ &\quad \text{при } |v + \varphi_0| \leq 1/R, \end{aligned} \quad /4/$$

$$\text{де } \lambda = \frac{\bar{G}(\kappa x)}{G(\kappa x)}, \quad \eta_{\pm} = \frac{(1-i)\cos\psi_{\pm} [\Lambda + (\kappa^4 \sin^4\psi_{\pm} - \Omega^4) H(\kappa \sin\psi_{\pm})]}{2\sqrt{\kappa R_{\pm}} \kappa (\sin\varphi_0 + \sin\psi_{\pm}) \bar{G}(\kappa \sin\psi_{\pm})},$$

$$\gamma_{\pm} = \frac{0,25(1-i)}{\sqrt{\kappa R_{\pm}} \kappa \sin[\frac{1}{2}(\varphi_0 + \psi_{\pm})]}; \quad F(\beta) = \pi^{-1/2} e^{2i\beta^2} \int_{(1+i)\beta}^{\infty} e^{-x^2} dx;$$

$$\beta_{\pm} = \sqrt{\kappa R_{\pm}} \left| \sin\left[\frac{1}{2}(\varphi_0 + \psi_{\pm})\right] \right|; \quad (R, v), (R_+, \psi_+), (R_-, \psi_-) -$$

полярні координати з початком в точках $(\xi = 0, \zeta = 0)$, $(\xi = 1/\cos\varphi_0, \zeta = 0)$ і $(\xi = -1/\cos\varphi_0, \zeta = 0)$ відповідно.

З аналізу асимптотики розсіяного тиску /4/, справедливої при $R \gg 1$ і $|v| < \pi/2$, випливає, що поле тисків в акустичному півпросторі є суперпозицією циліндричних хвиль, які випромінюють краї звукової плями на пластині. Максимальних значень розсіяний тиск набуває в дзеркально відбитому пучку $v = -\varphi_0$. У цьому напрямку поширюється плоска вузьконаправлена хвиля, амплітуда якої дорівнює коефіцієнтові відбиття від пластинки λ .

Список літератури: І. Б р е х о в с к и х Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. - 344 с. 2. П о д д у б - н я к А.П. Рассеяние ограниченного звукового пучка на акустически мягком круговом цилиндре. - Акустический журн., 1979, т.25, вып.1, с.108-112.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.84

УДК 518.12:517.544

Г.А.Шинкаренко, О.М.Левченко

АПРОКСИМАЦІЯ ГРАДІЄНТА РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА МЕТОДОМ ШТРАФУ

1. Постановка задачі. Позначимо через Ω обмежену зв'язну область точок $X=(x_1, \dots, x_n)$. n - вимірного евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем границею Γ , причому $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$. Розглянемо наступну крайову задачу: знайти функцію $u(x)$ таку, що

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = f \text{ в } \Omega, \quad /1.1/$$

$$u=0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \partial u / \partial \nu = 0 \text{ на } \Gamma_2,$$

$$-\partial u / \partial \nu = \alpha u - g \text{ на } \Gamma_3,$$

де $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha \in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha > 0$ на Γ_3 - задані функції; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ ; тут і далі по повторних індексах передбачається підсумовування від 1 до n .

У застосуваннях досить часто основний інтерес становить не розв'язок $u(x)$ задачі /1.1/, а його антиградієнт $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma = -\text{grad } u$. Ясно, що коли наближений розв'язок задачі /1.1/ знайдено, то його градієнт визначається просто, але операція диференціювання понижуює точність і достовірність значень. Щоб уникнути цього, доцільно сформулювати задачу безпосередньо у термінах вектора $\sigma(x)$. Скористаємось доповнювальною варіаційною задачею: знайти вектор $\sigma^* \in T(f)$ такий, що

$$K(\sigma^*) \leq K(\sigma) \quad \forall \sigma \in T(f), \quad /1.2/$$

де $K(\sigma) = \int_{\Omega} \sigma_i \sigma_i dx + \int_{\Gamma_3} \alpha^{-1} (\sigma_\nu + g)^2 d\gamma$, $\sigma_\nu = \sigma_i \nu_i$;

$$T(f) = \{ \sigma \mid \sigma_\nu = 0 \text{ на } \Gamma_2; \text{div } \sigma = f \text{ в } \Omega; \sigma \in H(\text{div}; \Omega) \};$$

$$H(\text{div}; \Omega) = \{ \sigma \mid \sigma \in [L^2(\Omega)]^n; \text{div } \sigma \in L^2(\Omega) \}.$$

Основна трудність наближеного розв'язування задачі мінімізації /1.2/ полягає в побудові апроксимацій, які, крім умов гладкості, задовольняють рівняння

$$\operatorname{div} \sigma = f \text{ в } \Omega. \quad /1.3/$$

Побудувати такі функції досить складно. Цим, зокрема, пояснюється широке використання чисельних схем, де за вихідну точку беруть основну варіаційну задачу, та відносно невелика кількість праць в альтернативному напрямі [5].

Зауваження 1.1. Задача /1.2/ коректно поставлена в праці [4].

Зауваження 1.2. Позначення гільбертових просторів і норм в них запозичено зі Сьєрле [2].

2. Регуляризація доповнювальної задачі. Щоб уникнути використання методів нелінійного програмування чи введення як додаткових невідомих множників Лагранжа, скористаємось регуляризациєю задачі /1.2/ методом штрафу. Зафіксуємо параметр /штрафу/ $\varepsilon = \operatorname{const} > 0$ і розглянемо задачу

$$\begin{cases} \text{знайти } \sigma^\varepsilon \in H \text{ такий, що} \\ K_\varepsilon(\sigma^\varepsilon) \leq K_\varepsilon(\sigma) \quad \forall \sigma \in H, \end{cases} \quad /2.1/$$

де $K_\varepsilon(\sigma) = K(\sigma) + \varepsilon^{-1} \|\operatorname{div} \sigma - f\|_{0,\Omega}^2$,
 $H = \{\sigma \mid \sigma_\nu = 0 \text{ на } \Gamma_2; \sigma \in H(\operatorname{div}; \Omega)\}$,

або еквівалентну їй /поки що формально/ варіаційну задачу

$$\begin{cases} \text{знайти } \sigma^\varepsilon \in H \text{ такий, що} \\ A_\varepsilon(\sigma^\varepsilon, \tau) = L_\varepsilon(\tau) \quad \forall \tau \in H, \end{cases} \quad /2.2/$$

де $A_\varepsilon(\sigma, \tau) = \int_\Omega (\sigma_i \tau_i + \varepsilon^{-1} \operatorname{div} \sigma \cdot \operatorname{div} \tau) dx + \int_{\Gamma_3} \alpha' \alpha_\nu \tau_\nu dy$;
 $L_\varepsilon(\tau) = \varepsilon^{-1} \int_\Omega f \operatorname{div} \tau dx - \int_{\Gamma_3} \alpha' g \tau_\nu dy$.

З огляду на нерівності

$$\begin{aligned} |A_\varepsilon(\sigma, \tau)| &\leq \max\{c, \varepsilon^{-1}\} \|\sigma\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} \|\tau\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}, \\ A_\varepsilon(\sigma, \sigma) &\geq \min\{1, \varepsilon^{-1}\} \|\sigma\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}^2 \quad \forall \sigma, \tau \in H, \\ |L_\varepsilon(\tau)| &\leq \max\{c, \varepsilon^{-1}\} \{\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Gamma_3}\} \|\sigma\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} \end{aligned} \quad /2.3/$$

і теорему Лакса-Мільграма регуляризована задача /2.2/, чи, що еквівалентно, /2.1/ має єдиний розв'язок.

Зауваження 2.1. Тут і далі символом C позначаємо додатні константи. Як правило, у різних місцях вони набувають неоднакових значень, але не залежать від $\varepsilon, \sigma^*, u^*, \sigma^\varepsilon, u^\varepsilon$ і т.д.

Теорема 2.1. Нехай u^*, σ^* та σ^ε узагальнений розв'язок крайової задачі /1.1/, задачі мінімізації /1.2/ та регуляризованої задачі /2.2/. Тоді регуляризуюча послідовність $\sigma^\varepsilon \in H$ збігається в $H(\operatorname{div}; \Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ до розв'язку $\sigma^* \in T(f)$, причому

$$\begin{aligned} \|\sigma^\varepsilon - \sigma^*\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2 \min\{1, 1/2\varepsilon\}}} \|u^*\|_{0, \Omega}, \\ \|\operatorname{div} \sigma^\varepsilon - f\|_{0, \Omega} &\leq \varepsilon \|u^*\|_{0, \Omega}. \end{aligned} \quad /2.4/$$

Доведення. Неважко бачити, що вектор $e^\varepsilon = \sigma^\varepsilon - \sigma^*$ задовольняє рівняння

$$A_\varepsilon(e^\varepsilon, \sigma) = -(u^*, \operatorname{div} \sigma)_{0, \Omega} \quad \forall \sigma \in H, \quad /2.5/$$

звідки з огляду на нерівність Буняковського-Шварца і нерівність $2ab \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$ маємо

$$|(u^*, \operatorname{div} \sigma)_{0, \Omega}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u^*\|_{0, \Omega}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\operatorname{div} \sigma\|_{0, \Omega}^2. \quad /2.6/$$

Прийнявши тепер $\sigma = e^\varepsilon$, з /2.5/ та /2.6/ дістаємо оцінку

$$\|e^\varepsilon\|_{0, \Omega}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\operatorname{div} e^\varepsilon\|_{0, \Omega}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u^*\|_{0, \Omega}^2,$$

яка безпосередньо приводить до /2.4/.

Отже, розв'язок регуляризованої задачі /2.2/ можна розглядати як наближення до розв'язку σ^* . Важливо відзначити також, що чисельне розв'язування задачі /2.2/ можна здійснити стандартною процедурою методу скінченних елементів [1, 2].

3. Інтерпретація регуляризованої задачі. Інтегруючи рівняння /2.2/ по частинах і позначаючи через

$$u^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div} \sigma^\varepsilon - f), \quad /3.1/$$

приходимо до висновку, що вектор σ^ε є /в крайньому разі формальним/ розв'язком задачі

$$\begin{aligned} \sigma^\varepsilon + \operatorname{grad} u^\varepsilon &= 0 \\ \operatorname{div} \sigma^\varepsilon + \varepsilon u^\varepsilon &= f \quad \text{в } \Omega, \\ u^\varepsilon &= 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \sigma_\nu^\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma_2, \\ \sigma_\nu^\varepsilon - \alpha u^\varepsilon + g &= 0 \text{ на } \Gamma_3. \end{aligned} \quad /3.2/$$

Порівнюючи цю крайову задачу з /І.І/, бачимо, що в термінах функції u^ε використана нами регуляризація фактично заміняє рівняння Пуассона задачі /І.І/ рівнянням Гельмгольца з коефіцієнтом $\varepsilon > 0$ при абсолютному члені. Одночасно наведена інтерпретація дає більше, ніж результати теореми 2.І; вона дає змогу охарактеризувати збіжність u^ε до u^* при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Справді, з врахуванням /3.І/ рівняння /2.5/ записуємо у вигляді

$$(e^\varepsilon, \sigma)_{0,\Omega} = -(u^\varepsilon - u^*, \operatorname{div} \sigma)_{0,\Omega} \quad \forall \sigma \in H. \quad /3.3/$$

Розглянемо варіаційну задачу: знайти $w \in V$,
 $V = \{v | v = 0 \text{ на } \Gamma; \quad v \in H^1(\Omega)\}$ таку, що

$$(grad w, grad v)_{0,\Omega} = -(u^\varepsilon - u^*, v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in V.$$

Вона має єдиний розв'язок $w \in V$, причому
 $\|w\|_{1,\Omega} \leq c \|u^\varepsilon - u^*\|_{0,\Omega}$, $c = \text{const} > 0$. Прийmemo тепер $\sigma_0 = -grad w$,
 тоді $\operatorname{div} \sigma_0 = -(u^\varepsilon - u^*)$, $\sigma_0 \in H$. Крім цього,

$$\|\sigma_0\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}^2 = \|grad w\|_{0,\Omega}^2 + \|u^\varepsilon - u^*\|_{0,\Omega}^2 \leq c \|u^\varepsilon - u^*\|_{0,\Omega}^2.$$

Підставляючи σ_0 в /3.3/, дістаємо

$$\|u^\varepsilon - u^*\|_{0,\Omega}^2 = (e^\varepsilon, \sigma_0)_{0,\Omega} \leq c \|e^\varepsilon\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} \|u^\varepsilon - u^*\|_{0,\Omega}.$$

Повертаючись до теореми 2.І, приходимо до висновку, що існує така теорема.

Теорема 3.І. Нехай на додаток до умов теореми 2.І функція $u^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ визначається виразом /3.І/. Тоді при $\varepsilon \rightarrow 0$ послідовність пар $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ збігається до (σ^*, u^*) в нормі $H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ і для достатньо малих $\varepsilon > 0$ наявна оцінка

$$\|\sigma^\varepsilon - \sigma^*\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} + \|u^\varepsilon - u^*\|_{0,\Omega} \leq c \sqrt{\varepsilon} \|u^*\|_{0,\Omega}, \quad /3.4/$$

де $c = \text{const} > 0$ не залежить від ε та u^* .

Зуваження 3.І. Якщо σ^ε достатньо гладкий, наприклад, такий, що $\operatorname{div} \sigma^\varepsilon \in H^1(\Omega)$, то оцінка /3.4/ може бути поліпшена до такої:

$$\|\sigma^\varepsilon - \sigma^*\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} + \|u^\varepsilon - u^*\|_{1,\Omega} \leq c \varepsilon \|u^*\|_{0,\Omega}, \quad c = \text{const} > 0. \quad /3.5/$$

4. Дискретизація регуляризуючої послідовності. Наближений розв'язок задачі /2.2/ визначимо як вектор $\sigma^{\varepsilon h}$ зі скінченно-вимірного підпростору $S_h^k \in H$ такий, що

$$A_\varepsilon(\sigma^{\varepsilon h}, \tau^h) = L_\varepsilon(\tau^h) \quad \forall \tau^h \in S_h^k. \quad /4.І/$$

Причому припускаємо, що простір S_h^k має таку властивість апроксимації /звичайну для методу скінченних елементів/: для кожного $\sigma \in [H^{k+1}(\Omega)]^n$, $k \geq 0$, знайдуться $\sigma^h \in S_h^k$ і $c = \text{const} > 0$ такі, що

$$\|\sigma - \sigma^h\|_{m,\Omega} \leq ch^{k+1-m} \|\sigma\|_{k+1,\Omega}, \quad 0 \leq m \leq k. \quad /4.2/$$

Охарактеризуємо похибку $e^{\varepsilon h} = \sigma^{\varepsilon h} - \sigma^*$. Неважко бачити, що вона є розв'язком варіаційного рівняння

$$A_\varepsilon(e^{\varepsilon h}, \tau^h) = -(u^*, \text{div} \tau^h)_{0,\Omega} \quad \forall \tau^h \in S_h^k.$$

Звідси

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(e^{\varepsilon h}, e^{\varepsilon h}) &= A_\varepsilon(e^{\varepsilon h}, \sigma^{\varepsilon h} - \sigma^h + \sigma^h - \sigma^*) \\ &= -(u^*, \text{div}(\sigma^{\varepsilon h} - \sigma^h))_{0,\Omega} + A_\varepsilon(e^{\varepsilon h}, \sigma^h - \sigma^*) \\ &= -(u^*, \text{div} e^{\varepsilon h})_{0,\Omega} + (u^*, \text{div}(\sigma^h - \sigma^*))_{0,\Omega} + A_\varepsilon(e^{\varepsilon h}, \sigma^h - \sigma^*) \quad \forall \sigma^h \in S_h^k. \end{aligned}$$

На основі нерівностей

$$|(u, \text{div} \sigma)_{0,\Omega}| \leq \varepsilon \|u\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\text{div} \sigma\|_{0,\Omega}^2,$$

$$A_\varepsilon(\sigma, \tau) \leq \frac{1}{2} [A_\varepsilon(\sigma, \sigma) + A_\varepsilon(\tau, \tau)] \quad \forall \sigma, \tau \in H$$

та рівняння /4.1/ після нескладних перетворень приходимо до оцінки

$$\|e^{\varepsilon h}\|_{H(\text{div}; \Omega)}^2 + \|e^{\varepsilon h}\|_{0,\Omega}^2 \leq c \left\{ \varepsilon \|u^*\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\sigma^h - \sigma^*\|_{1,\Omega}^2 \right\} \quad \forall \sigma^h \in S_h^k.$$

Вибираючи $\sigma^h \in S_h^k$ належним чином на основі /4.2/, знаходимо

$$\|\sigma^{\varepsilon h} - \sigma^*\|_{H(\text{div}; \Omega)} \leq c \left\{ \sqrt{\varepsilon} \|u^*\|_{0,\Omega} + \frac{h^k}{\sqrt{\varepsilon}} \|\sigma^*\|_{k+1,\Omega} \right\}. \quad /4.3/$$

Таким чином доведена наступна теорема.

Теорема 4.1. Нехай u^* , σ^* - розв'язки крайової задачі /1.1/ та /1.2/, причому для деякого $k \geq 0$ $\sigma^* \in H \cap [H^{k+1}(\Omega)]^n$. Припустимо також, що наближений розв'язок $\sigma^{\varepsilon h}$ регуляризованої задачі /2.2/ визначається у просторі S_h^k , що має властивість апроксимації /4.2/. Тоді послідовність $\sigma^{\varepsilon h}$ збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ і $h \rightarrow 0$ до σ^* , якщо параметри регуляризації ε і дискретизації h узгоджені таким чином, що

$$h^k / \sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, h \rightarrow 0. \quad /4.4/$$

Більше того, оптимальний порядок збіжності досягається при $\varepsilon = ch^k$. у цьому випадку

$$\|\sigma^{\varepsilon h} - \sigma^*\|_{H(\text{div}; \Omega)} \leq ch^{k/2} \left\{ \|u^*\|_{0,\Omega} + \|\sigma^*\|_{k+1,\Omega} \right\}, \quad c = \text{const} > 0. /4.5/$$

Зауваження 4.1. Теорема 4.1 є повним аналогом теореми 2.1; при допущеннях цієї теореми нічого не можна стверджувати відносно збіжності $u^{\varepsilon h} = -\varepsilon^{-1}(\operatorname{div} \sigma^{\varepsilon h} - f)$ до u^* .

5. Обчислювальні аспекти. Використана регуляризація задачі мінімізації /1.2/ приводить до чисельних схем її розв'язування, достатньою умовою стійкості яких є умова /4.4/. Оскільки чисельне розв'язування задачі /4.1/ здійснюється, як правило, з фіксованим простором S_h^k , то вибір значення $\varepsilon > 0$ вимагає належної уваги. Зауважимо, що з нерівностей /2.3/ при достатньо малих $\varepsilon > 0$ випливає, що

$$\|\sigma\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}^2 \leq A_\varepsilon(\sigma, \sigma) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\sigma\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}^2 \quad \forall \sigma \in H. \quad /5.1/$$

Ця обставина приводить до евристичного висновку: зменшення параметра ε погіршує зумовленість матриці системи рівнянь /4.1/; вибір $\varepsilon = ch^k$, $c = \text{const} > 0$ обмежує ріст числа зумовленості цієї матриці. Більше того, при $k=1$ можна надіятись, що під час розв'язування /4.1/ похибки заокруглення будуть найменшими.

6. Аналіз числових результатів. Для ілюстрації розглянемо задачу /1.1/ з $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid |x_1| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \Gamma_1$, $f = 2$, яка моделює кручення призматичного стержня; при цьому компоненти вектора $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, які з точністю до знака збігаються з ненульовими компонентами тензора напружень, апроксимували білінійними поліномами на чотирикутних елементах [1]. Одержані результати зведені в таблицю.

У перший і другий рядок кожної графі внесено результати, одержані на сітці з 6×6 та 10×10 скінченних елементів. Обчислення виконували з подвійною точністю, оскільки ординарна точність розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь приводила до значного зростання похибок заокруглення при згущенні сітки. Оскільки для точного розв'язку $|\sigma_2^*(0,1)| = |\sigma_1^*(1,0)| = \max_{x \in \Omega, i=1,2} |\sigma_i^*(x)|$, то перший та другий стовбчики таблиці ілюструють вплив похибок заокруглень на наближений розв'язок. Видно, що ці похибки стають помітними при значеннях параметра регуляризації значно більших від оптимальних $\varepsilon_{\text{опт}}^{-1} \in [40, 60]$ і $\varepsilon_{\text{опт}}^{-1} \in [100, 200]$ для сіток 6×6 та 10×10 відповідно/. Відзначимо, що навіть при значеннях $\varepsilon = 10^{-3}$ відносні похибки не перевищують половини процента. Це дає змогу змінювати ε у процесі обчислень у досить

**Залежність наближених розв'язків від параметру
регуляризації**

ε^{-1}	$10^4 \times \sigma_1^{\varepsilon h}(1,0)$	$10^4 \times \sigma_2^{\varepsilon h}(0,1)$	$10^4 \times K(\sigma^{\varepsilon h})/4$	$10^4 \times M(\sigma^{\varepsilon h})/4$
10	I3346	I3346	5445	269
	I33I5	I33I5	5424	II4
20	I3452	I3452	5549	26I
	I34I9	I34I9	5528	I06
40	I3506	I3506	5603	259
	I3472	I3474	558I	I05
80	I3533	I3533	5630	259
	I350I	I3500	5608	I04
100	I3536	I3540	5635	259
	I3503	I3508	56I4	I04
200	I3546	I3552	5646	258
	I35I3	I35I9	5624	I04
400	I3554	I3555	5652	258
	I35I3	I3530	5630	I04
800	I3556	I3559	5654	258
	I3498	I3548	5633	I04
1000	I3557	I3559	5655	258
	I35I7	I3529	5633	I04
Точне значення	I3506	I3506	5623	0

Примітка. $K(\sigma) = \|\sigma\|_{q,\Omega}^2$, $M(\sigma) = \|\operatorname{div} \sigma - 2\|_{q,\Omega}^2$.

широких межах. Оскільки значення $M(\sigma^{\varepsilon h})$ монотонно спадають до своїх асимптотичних значень /які залежать від параметра h /, то практично за верхню границю ε_{opt} інтервалу оптимальних значень параметра регуляризації можна прийняти перше з найбільших значень ε , що задовольняють умову $dM(\sigma^{\varepsilon h})/d\varepsilon = 0$. Цікаво, що асимптотичні значення $\max_{x \in \Omega, i=1,2} |\sigma_i^{\varepsilon h}(x)|$ та $K(\sigma^{\varepsilon h})$ є верхніми оцінками відповідних характеристик точного розв'язку.

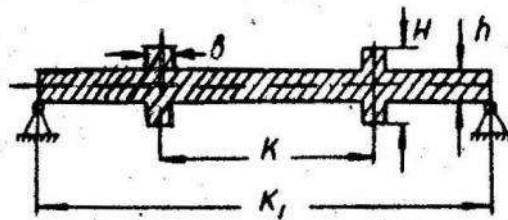
Запропонований метод ефективний, коли градієнт σ^* розв'язку /1.1/ достатньо гладкий, наприклад, наперервний в Ω . Якщо ж σ^* належить лише $H(\text{div}; \Omega)$, то необхідно внести відповідні зміни в побудову простору S_h^k . Інші підходи до цієї проблеми розглянуті в працях [3 - 7].

Список літератури: 1. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. - Львов, 1981. - 88 с. 2. Сьярле Ф. Метод конечных элементов эллиптических задач. - М.: Мир, 1980. - 512 с. 3. Fix G.J., Gunzburger M.D., Nicolaides R.A. On mixed finite element methods for first order elliptic systems. - Numer. Math., 1981, 37, N1, p. 29-48. 4. Haslinger J., Hlaváček I. Convergence of a finite element method based on the dual variational formulation. - Upl. Mat., 1976, 21, N1, p. 43-65. 5. Křížek M. Conforming equilibrium finite element methods for some elliptic plane problems. - RAIRO/Numer. Anal., 1983, 17, N1, p. 35-65. 6. Lesaint P., Zlamal M. Superconvergence of the gradient of finite element solution. - RAIRO/Numer. Anal., 1979, 13, N2, p. 139-166. 7. Neittaanmäki P., Sargnen J. On finite element approximation of the gradient for solution of Poisson equation. - Numer. Math., 1981, 37, N3, p. 333-337.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.84.

ПРО ОПТИМАЛЬНЕ ПІДКРІПЛЕННЯ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ
КОНЦЕНТРИЧНИМ РЕБРОМ ЖОРСТКОСТІ

Розглянемо задачу оптимального проектування круглої пластинки товщини h , радіуса R , підкріпленої концентричним ребром жорсткості радіуса R . Ребро має прямокутний поперечний переріз з розмірами b і H /див. рисунок/.



Задачу розв'язуємо в двох постановках: визначаємо параметри конструкції, оптимальної за вагою та жорсткістю.

Задача оптимального проектування за вагою на прогин полягає в мінімізації ваги /об'єму/ конструкції

$$V = \pi(R_1^2 h_4 + 2h_1 h_2 (h_3 - h_4)) \quad /1/$$

на підпросторі проектування

$$H = \{ \bar{h} \mid w_{\max} \leq [\omega]; \delta_1 \leq [\delta_1] \} \quad /2/$$

Друга задача полягає в знаходженні

$$\min \max w(\bar{h}, z) \quad /3/$$

на підпросторі проектування

$$H = \{ \bar{h} \mid V(\bar{h}) \leq [V], \delta_1 \leq [\delta_1] \}, \quad /4/$$

де $w(\bar{h}, z)$ - прогин пластинки; $\delta_1 = (1 - \nu^2) \frac{bH^3}{Rh^3}$ - відносна жорсткість ребра на згин; $[\omega]$, $[V]$, $[\delta_1]$ - відповідно допустимі прогини, об'єм та відносна жорсткість ребра; $\bar{h}(h_1, h_2, h_3, h_4) = \bar{h}(R, b, H, h)$ - вектор регульованих параметрів.

Задачі /1/ - /2/ і /3/ - /4/ зводимо до задач геометричного програмування. Для цього представляємо об'єм і прогин пластинки

двочленими поліномами, виділяючи поліноміальні члени й апроксимуючи залишкові члени одночленими поліномами згідно з формулами [1]

$$g_i(\bar{h}) = c_i \prod_{j=1}^m h_j^{a_{ij}}, \quad /5/$$

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial g_i(\bar{h})}{\partial h_j} \frac{h_j}{g_i(\bar{h})} \right)_{\bar{h}^*}, \quad j = \overline{1, m}, \quad /6/$$

$$c_i = (g_i(\bar{h}) / \prod_{j=1}^m h_j^{a_{ij}})_{\bar{h}^*},$$

де $\bar{h}^*$ - вихідна точка.

Тоді /1/-/2/, /3/-/4/ зводяться відповідно до задач геометричного програмування з нульовим ступенем важкості. Мінімізувати

$$g_0(\bar{h}) = V(\bar{h})/\pi = \sum_{i=1}^2 c_i \prod_{j=1}^4 h_j^{a_{ij}} \quad /7/$$

при умовах

$$h_j > 0, \quad j = \overline{1, 4},$$

$$g_1(\bar{h}) = \omega_{\max}(\bar{h})/[\omega] = \sum_{i=3}^4 c_i \prod_{j=1}^4 h_j^{a_{ij}} \leq 1,$$

$$g_2(\bar{h}) = \delta_1/[\delta_1] = c_5 h_1^{-1} h_2 h_3^3 h_4^{-3} \leq 1, \quad /8/$$

та мінімізувати

$$g_0(\bar{h}) = \omega_{\max}(\bar{h}) = \sum_{i=1}^2 d_i \prod_{j=1}^4 h_j^{a_{ij}} \quad /9/$$

при умовах

$$h_j > 0, \quad j = \overline{1, 4},$$

$$g_1(\bar{h}) = V(\bar{h})/[V] = \sum_{i=3}^4 d_i \prod_{j=1}^4 h_j^{a_{ij}} \leq 1, \quad /10/$$

$$g_2(\bar{h}) = \delta_1/[\delta_1] = d_5 h_1^{-1} h_2 h_3^3 h_4^{-3} \leq 1.$$

На алгоритмічній мові PL/I складена програма, яка визначає максимальний прогин пластинки і точку, де він виникає, зводить задачу оптимального проектування до задачі геометричного програмування і розв'язує її. Одержані дані для випадку вільно опертої /жорстко защемленої/ пластинки, що знаходиться під дією рівномірного тиску /зосередженої сили в центрі/.

Якщо в задачі /3/-/4/ допустимий об'єм $[V]$ дорівнює $V_{\text{опт}}$ задачі /1/-/2/, то оптимальні параметри задач /1/-/2/ і /3/-/4/ збігаються.

Приклад. Розглянемо вільно оперту круглу пластинку під дією рівномірного тиску.

Прогин такої пластинки записуємо у вигляді [2]

$$w(z, \bar{h}) = \frac{q R_1^4}{64(1+\nu)D} \left\{ \left(1 - \frac{z^2}{R_1^2}\right) \left[5 + \nu - (1+\nu) \frac{z^2}{R_1^2}\right] + w_1(\bar{z}, \bar{h}) \right\},$$

$$w_1(z, \bar{h}) = \frac{\kappa^2 \delta_1 (1+\nu) [(1+\nu)\kappa^2 - (3+\nu)]}{2(1+\nu) + \delta_1 [\kappa^2(1-\nu) + (1+\nu)]} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \left(1 - \frac{z^2}{R_1^2}\right) + \right. \\ \left. + 2 \left(1 - \frac{z^2}{\kappa^2 R_1^2} - 2 \ln \kappa\right) \right\}, \quad 0 \leq z \leq R,$$

$$w_1(z, \bar{h}) = \frac{(1+\nu)\kappa^2 \delta_1 [(1+\nu)\kappa^2 - (3+\nu)]}{2(1+\nu) + \delta_1 [\kappa^2(1-\nu) + (1+\nu)]} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} \left(1 - \frac{z^2}{R_1^2}\right) - \right. \\ \left. - 4 \ln \left(\frac{z}{R_1}\right) \right\}, \quad R \leq z \leq R_1,$$

де ν - коефіцієнт Пуассона; D - циліндрична жорсткість пластинки; $\kappa = R/R_1$.

Задачі /1/-/2/ і /3/-/4/ розв'язуємо в безрозмірних параметрах $h_1 = R/R_1$; $h_2 = b/R_1$; $h_3 = H/R_1$; $h_4 = h/R_1$; $V_1 = V/(\pi R_1^3)$; $w_1 = w / \left(\frac{3}{16} \frac{q(1-\nu)R_1}{E} \right)$.

При $\nu = 0,3$ і $[w_1] = 0,1 \cdot 10^6$ одержуємо такі оптимальні параметри:

δ_1	R/R_1	b/R_1	H/R_1	h/R_1	$V/(\pi R_1^3)$
3	$3,76 \cdot 10^{-1}$	$1,90 \cdot 10^{-2}$	$1,27 \cdot 10^{-1}$	$3,26 \cdot 10^{-2}$	$3,39 \cdot 10^{-2}$
5	$2,44 \cdot 10^{-1}$	$3,47 \cdot 10^{-2}$	$1,07 \cdot 10^{-1}$	$3,26 \cdot 10^{-2}$	$3,25 \cdot 10^{-2}$
7	$1,84 \cdot 10^{-1}$	$5,15 \cdot 10^{-2}$	$9,52 \cdot 10^{-2}$	$3,26 \cdot 10^{-2}$	$3,12 \cdot 10^{-2}$

Як і слід було чекати, зі зростанням відносної жорсткості ребра радіус його зменшується.

Список літератури: І. Д а ф ф и н Р., П и т е р с о н З., З е н е р К. Геометрическое программирование. - М.: Мир, 1972. - 307 с. 2. С а в и н Г.Н., Ф л е й ш м а н Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. - К.: Наук. думка, 1964. - 380 с.

Стаття надійшла до редколегії 28.04.83

З М І С Т

Бартіш М.Я., Роман Л.Л. Про один рекурсивний метод розв'язування нелінійних функціональних рівнянь	3
Бартіш М.Я., Огірко І.В. Фарат В.М. Застосування методу Ньютона-Канторовича до розв'язування двовимірного нелінійного рівняння теплопровідності у змішаній системі координат.....	8
Щербина Ю.М., Голуб Б.М. Ітеративна регуляризація методу з пам'яттю для мінімізації функцій.....	12
Щербина Ю.М., Остапчук Л.А. Один ітеративний метод для мінімізації функцій.....	20
Квіт І.Д. Інформативність вибірки.....	23
Квіт І.Д. Множники відбиття.....	25
Гнатишин О.П. Оптимальна тактика попереджувальної заміни при вейбулівським напрацюванні.....	28
Роман Л.Л. Про розв'язок одномірних нелінійних крайових задач термопружності.....	30
Кічура С.М., Остудін Б.А. Розв'язування однієї задачі теорії потенціалу у випадку частково необмежених поверхонь.....	35
Жук О.В., Остудін Б.А., Пасічник Р.М. Чисельний розв'язок одного класу задач електророзвідки методом перехідних процесів.....	39
Височанський В.С., Головка М.Ф., Попіль П.М. Дослідження впливу форми короткодіючих потенціалів на поведінку функцій розподілу змішаних іонно-молекулярних систем з допомогою ЕОМ.....	45
Мартиненко Марія Д. Задача без початкових умов для однієї системи рівнянь узагальненої термомеханіки.....	52
Мартиненко Марія Д. Задача без початкових умов для одновимірного рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами.....	54
Кардаш А.І., Коркуна О.П. Програмна реалізація деяких задач планування експерименту в регресійному аналізі.....	56

Мокрик Р.І., Уханська О.М. Нестационарна задача термопружності для тіла змінної маси.....59

Кочубей В.Ф., Олійник І.В., Вошак О.О. Теплообмін і дифузія в трубі кільцевого поперечного перерізу.....64

Горечко О.М. Розсіяння вузьконапрямового звукового пучка на пластині.....69

Шинкаренко Г.А., Левченко О.М. Апроксимація градієнта розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона методом штрафу.....71

Ощипко Л.И. Про оптимальне підкріплення круглої пластинки концентричним ребром жорсткості.....79

УДК 518:517.948

Об одном рекурсивном методе решения нелинейных функциональных уравнений. Б а р т и ш М.Я., Р о м а н Л.Л. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 3-7 /на укр. яз./.

Для решения нелинейных функциональных уравнений в банаховом пространстве построен рекурсивный итерационный процесс на базе алгоритма со скоростью сходимости $1 + \sqrt{2}$. Доказана сходимость построенного метода. Библиогр.: 4 назв.

УДК 518.12:517.946:536.21

Использование метода Ньютона-Канторовича при решении двумерного нелинейного уравнения теплопроводности в смешанной системе координат. Б а р т и ш М.Я., О г и р к о И.В., Ф а р а т В.М. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 8-12 /на укр. яз./.

Для решения нелинейной задачи теплопроводности в смешанной системе координат используется метод Ньютона-Канторовича. Приводятся результаты численных расчетов. Ил. 2. Табл. 2. Библиогр.: 5 назв.

УДК 519.6

Итеративная регуляризация метода с памятью для минимизации функций. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 12-19. /на укр. яз./.

Рассматривается итерационная регуляризация итерационного метода с порядком сходимости $1 + \sqrt{2}$ для решения задачи нелинейного программирования. Библиогр.: 5 назв.

УДК 519.6

Один итерационный метод для минимизации функций. Щ е р б и -
н а Ю.Н., О с т а п ч у к Л.А. - Вестн. Львов. ун-та. Сер.
мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики.
Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 20-22.
/на укр. яз./.

Рассматривается итерационный метод высокого порядка схо-
димости для минимизации сильно выпуклых функций. Библиогр.:
5 назв.

УДК 519.21

Информативность выборки. К в и т И.Д. - Вестн. Львов. ун-та.
Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики.
Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 23-25.
/на укр. яз./.

На основании медианной эмпирической функции распределения
указываются формулы для нахождения информативности полной, усе-
ченной и сгруппированной выборок. Рассматривается также относи-
тельная информативность усеченной выборки. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.21

Множители отражения. К в и т И.Д. - Вестн. Львов. ун-та.
Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механи-
ки. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 25-27.
/на укр. яз./.

На основании разложения отражения на множители указыва-
ется возможность расщепления действия системы на действия
независимых подсистем. Показано, что такое расщепление не
является однозначным. Библиогр.: 2 назв.

УДК 621.3

Оптимальная тактика предупредительной замены при вейбулловской наработке. Г н а т и ш и н А.П. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 28-29.

/на укр. яз./.

Решена задача определения оптимального времени предупредительной замены в случае вейбулловской наработки до отказа.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 518:517.948

О решении одномерных нелинейных краевых задач термоупругости.

Р о м а н Д.А. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып.26.

Задачи прикладной математики и механики. - Львов: Вища шк.

Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 30-35. /на укр. яз./.

Решение одномерных геометрически нелинейных задач термоупругости в случае нелинейных краевых условий аппроксимацией этих условий сводится к решению последовательности краевых задач с линейными краевыми условиями. Полученные при этом краевые задачи решаются методом Ньютона-Канторовича. Приведен пример решения задачи термоупругости для изотропной полосы.

Ил. I. Библиогр.: 4 назв.

УДК 518.517.948

Решение одной задачи теории потенциала в случае частично неограниченных поверхностей. К и ч у р а С.М., О с т у д и н Б.А. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. - Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 35-39. /на укр. яз./.

Рассматривается одна конкретная задача теории потенциала в электронной оптике. Для ее решения используется модифицированный метод функций Грина. При этом получается интегральное уравнение Фредгольма первого рода со слабой особенностью в ядре. Библиогр.: 5 назв.

УДК 518.517

Численное решение одного класса задач электроразведки методом переходных процессов. Ж у к А.В., О с т у д и н Б.А., П а с и ч н и к Р.М. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 39-44 /на укр. яз./.

Задача разделения сигналов в электроразведке сформулирована в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Для решения последнего построен алгоритм, основанный на методе регуляризации А.Н.Тихонова, причем минимизация соответствующего функционала осуществлена на основе идей метода конечных элементов. Методика реализована в виде комплекса программ, решены конкретные задачи, в которых исходные данные осложнены случайными помехами. Ил. 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 530.145

Исследование влияния формы короткодействующих потенциалов на поведение функций распределения смешанных ионно-молекулярных систем с помощью ЭВМ. В ы с о ч а н с к и й В.С., Г о л о в - к о М.Ф., П о п и л ь П.М. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 45-52. /на укр. яз./.

С использованием ЭВМ исследуется влияние различных форм короткодействующих потенциалов на поведение функций распределения смешанных ионно-молекулярных систем при различных значениях параметров рассматриваемой системы. Табл. 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.944:947

Задача без начальных условий для одной системы уравнений обобщенной термомеханики. М а р т ы н е н к о М а р и я Д. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. - Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 52-54. /на укр. яз./.

Методом А.Н.Тихонова построено формальное решение задачи без начальных условий для систем двух гиперболических уравнений второго порядка, описывающей в рамках обобщенной термомеханики динамические поля напряжений и температуры в бесконечных плитах. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.944:947

Задача без начальных условий для одномерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. М а р т ы н е н к о М а - р и я Д. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. - Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 54-56. /на укр. яз./.

Доказаны две теоремы о разрешимости задачи без начальных условий для неоднородного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

УДК 519.24 + 681.3.06

Программная реализация некоторых задач планирования эксперимента в регрессивном анализе. - Кардаш А.И., Коркуня О.П. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып.26. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 56-58. /на укр. яз./.

Рассматривается применение методов регрессионного анализа в теории планирования экспериментов для решения задач идентификации и оптимизации сложных процессов и систем. Осуществлена программная реализация вычислительных процедур статистического анализа результатов экспериментирования. Приведен численный пример. Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.319

Нестационарная задача термоупругости для тела с изменяющейся массой. Мокрик Р.И., Ухайдская О.М. - Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с.59-63. /на укр.яз./.

Рассматривается нестационарная задача термоупругости для тела с изменяющейся массой в полосе с фиксированной нижней и изменяющейся верхней границей. Получено численное решение такой задачи. Результаты сравниваются с соответствующей классической задачей термоупругости. Ил. 4. Библиогр.: 4 назв.

УДК 536.2

Теплообмен и диффузия в трубе кольцевого поперечного сечения.

К о ч у б е й В.Ф., О л и я р н и к И.В., В о ш и к А.А. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 54-58 /на укр. яз./.

Методом разделения переменных решена задача о распределении температуры и парциального давления в цилиндрической трубе кольцевого поперечного сечения. Учтено влияние температуры на изменение парциального давления. Проведен численный анализ полученных результатов. Ил. 4. Библиогр.: 4 назв.

УДК 534.24

Рассеяние узконаправленного звукового пучка на пластине. Г о - р е ч к о А.Н. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 69-71. /на укр. яз./.

Рассмотрена двумерная задача рассеяния плоской узконаправленной гармонической звуковой волны на тонкой упругой бесконечной пластине. Методом перевала построена асимптотика поля давлений в дальней зоне. Анализируется характер диаграммы рассеяния. Библиогр.: 2 назв.

УДК 518.12:517.544

Аппроксимация градиента решения краевой задачи для уравнения Пуассона методом штрафа. Ш и м к а р е н к о Г.А., Л е в ч е н к о А.Н. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1985, с. 71-78 /на укр. яз./.

Для определения градиента решения краевых задач с уравнением Пуассона предлагается использовать двойственную вариационную задачу. Метод штрафа позволяет избавиться от ограничения типа уравнения равновесия и применить стандартную процедуру метода конечных элементов для приближенного решения задачи. Доказана сходимость непрерывных и дискретных решений вариационных задач со штрафом и получены оценки сходимости. Приведен численный пример. Табл. 1. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3

Об оптимальном подкреплении круглой пластинки концентрическим ребром жесткости. О щ и п к о Л.И. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., вып. 26. Задачи прикладной математики и механики. – Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, с. 79-81. /на укр. яз./.

Решается задача оптимального проектирования круглой пластинки с концентрическим ребром жесткости прямоугольного поперечного сечения. Управляющими параметрами служат толщина пластинки, ширина, высота и радиус ребра. Задача решается в двух постановках: определяются параметры конструкции оптимальной по объему и оптимальной по жесткости. При решении задачи использовался аппарат геометрического программирования. Рассмотрены примеры и приведены полученные результаты. Библиогр.: 2 назв.

Министерство высшего и среднего
специального образования СССР

Вестник Львовского университета
Серия механико-математическая
Издается с 1965 г.
Выпуск 26

ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Львов. Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения "Вища школа"

Адрес редакционной коллегии:

290000 Львов-центр, ул. Университетская, I. Университет,
кафедра прикладной математики

Львовская областная книжная типография

290000 Львов-IO, ул. Стефаника, II.

/ На украинском языке /

Редактор В.В.В о й т о в и ч

Технічний редактор І.Г.Х р у щ о в а

Коректор М.Т.Д о м е х а

Н/К

Підп. до друку 20.01.86 . БГ 02425 . Формат 60x84/16.

Папір друк.мз. Офс. друк. Умовн. друк. арк. 5,35

Умовн. фарб.-відб. 5,58. Обл.-вид. арк. 5,02. Тираж 600 прим.

Вид. № I4I5. Сам. 2570. Ціна 70 коп.Замовне.

Львівська обласна книжкова друкарня. 290000

Львів-IO, вул. Стефаника, II

70 к.



Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат., 1986, вип. 26, 1—92.