УДК 539.3

Д.В.Грилицький, Г.Т.Сулим

РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ТОНКОСТІННИХ ВКЛЮЧЕНЬ У ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Прошарки чужорідних матеріалів, зони окисленого металу – це поширені дефекти мікро- і макроструктури матеріалів. Тонкостінні включення можуть виконувати роль тензодатчиків, клейових з"єднань, заповнених у процесі ремонтних робіт тріщин. У цілому міцність та втома матеріалу суттєво залежать від характеру розподілу та форми таких включень внаслідок високої концентрації напружень, яка виникає у їх околі.

Вивчати тонкі включення можна на основі розв"язку задачі про включення досить загальної форми, враховуючи далі малість одного з його геометричних параметрів. Досить ефективний (але і складний) метод спряження зовнішнього та внутрішнього асимптотичного розкладу. Цікаві результати можна отримати шляхом застосування прямих числових (МСЕ) та експериментальних методів, однак найбільш доцільним виявився метод, який полягає у застосуванні принципу спряження континуумів різної розмірності: виключення з розгляду самого включення та заміна його впливу ускладненими умовами контакту берегів матриці вздовж серединної лінії або поверхні дефекту.

Умови, які отримали назву умов взаємодії тонкостінного включення із зовнішнім середовищем, випливають із зв"язку між напруженнями, переміщеннями, температурою і т.п. на протилежних берегах прошарку. Цю думку стосовно питань теплопровідності висловив Я.С.Підстригач ще у 1963 р.

Названий метод дає змогу отримати зовнішній асимптотичний розклад поставленої задачі, тобто на певній відстані від нього, оскільки не враховує всіх особливостей геометричної форми дефекту.

К.С.Чобанян (1967 р.) встановив досить загальні умови для гнучкого ортотропного включення, однак у подальших роботах вірменські вчені використовували модель стрінгера, за якою включення сприймає тільки зусилля розтягу-стиску і на ньому виникає лише стрибок дотичних напружень.

Під впливом праці [46], де вперше досліджена плоска задача теорії пружності для тіла із включенням скінченої довжини, на кафедрі механіки Львівського університету розпочалося активне вивчення цієї проблематики. У рамках моделі стрінгера враховано додатковий вплив поперечної деформації прошарку при дії однорідного поля напружень на нескінченості [40] та зосереджених сил [36], встановлено [9] чотири умови взаємодії для прямолінійного включення, що узагальнюють умови К.С.Чобаняна. Детально опрацьовано та вивчено [39] чотири основні варіанти таких умов стосовно криволінійного включення, один з яких використано при побудові інтегральних рівнянь для включення по дузі кола [6]. У праці [29] побудовано дві моделі пружного включення для випадку антиплоскої деформації, у [30, 23] - умови температурної взаємодії для плоского випадку, а в [47] - умови пружної взаємодії лінійного включення з пологою циліндричною оболонкою.

Основним способом, який дає змогу моделювати дефекти та недосконалість граничних умов, є метод особливостей. Суть його полягає в заміні включення розподіленими вздовж деякої лінії чи поверхні силовими, моментними та іншими факторами, густина яких визначається з умови сумісності деформацій тіла та включення. Метод сил у ролі цих факторів використовує зосереджені сили, метод дислокацій - дислокації та дисторсії, метод фіктивних навантажень - сили та їх диполі. Перший з них можна використовувати для аналізу включень досить великої жорсткості, другий - малої, третій - довільної, однак він не досить гнучкий.

Набагато кращим виявилося поєднання методу сил і дислокацій. Оскільки задання на деякій поверхні стрибка вектора напружень і зміщень відразу та однозначно зумовлює густину відповідних факторів, то такий метод названо методом функцій стрибка. У задачах поздовжного зсуву йому відповідає розподіл сил і гвинтових дислокацій, у задачах теплопровідності - джерел і диполів тепла.

Метод функцій стрибка вперше запропонований у 1975 р. Д.В.Грилицьким та Г.Т.Сулимом при дослідженні плоских задач теорії пружності для тонкостінних включень на прямолінійній границі розділу ізотропних матеріалів: у праці [10] враховано три функції стрибка (дотичних напружень і переміщень), в [9] - чотири (компоненти векторів напружень і зміщень). Використання методів теорії функцій комплексної змінної [9] або інтегральних перетворень [7] чи формули Сомільяно [34] дає змогу встановити залежність компонент тензора напружень і вектора переміщень у довільній точці середовища від функцій стрибка та зовнішнього навантаження. Застосування формул Племеля приводить до граничних значень вказаних величин на берегах лінії чи поверхні [34] стрибка, а їх підстановка в ті чи інші умови взаємодії породжує систему функціональних рівнянь відносно функцій стрибка. Її розв"язок можна проводити методом степеневих рядів [40], ортогональних поліномів [9], механічних квадратур [47] чи коллокацій [33]. Збіжність процесу зумовлюється квазірегулярністю алгебраїчних систем [37]. Використання методу степеневих рядів [8 , 40] виявилося неефективним, швидкість збіжності трьох останніх - практично однакова [33], хоча найбільш зручні при аналізі складних задач методи коллокацій та механічних квадратур. У граничних випадках пружних сталих метод дає змогу отримати результати для тріщини, абсолютно жорсткого включення та включення з матеріалу матриці.

Пізніше цей метод перенесений на випадок антиплоскої деформації [29], стаціонарної теплопровідності з тепловіддачею і без неї [22, 23, 30], задач тривимірної теорії пружності для анізотропного середовища з включенням вздовж деякої поверхні Ляпунова [34].

Чотирьом функціям стрибка в плоскій задачі теорії пружності для включення в однорідній матриці відповідають чотири узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) [9, 32, 38]. Слід відзначити, що, починаючи з праць [38] і [13], використовується дещо інше [9] означення КІН, яке дає змогу побудувати асимптотичні залежності поля напружень і зміщень біля вершини дефекту. У праці [32] поряд із раціональним викладом методики розв"язання задачі детально аналізується зміст введених КІН. Побудовано [43, 44] асимптотичні залежності поля зміщень і напружень біля вершини включення в рамках плоскої і антиплоскої задачі теорії пружності, визначено поле напружень і переміщень у довільній точці середовища і здійснено порівняння одно- і двочленного розкладу із точним. Антиплоска задача приводить до існування двох КІН. У випадку лінійного включення у пологій оболонці восьми функціям стрибка (зміщень серединної поверхні, зусиль, згинальних моментів та кутів повороту нормалі) відповідають вісім коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів, які визначають ці величини в околі краю неоднорідності [47]. У задачах теплопровідності поле температури та теплові потоки біля вершини включення характеризують два коефіцієнти інтенсивності теплових потоків (КІТП) [22].

Взаємодія включень досліджувалася на прикладі періодичної системи співосних [8, 9] та компланарних [17] неоднорідностей. У праці [38] одержано залежність поля напружень і переміщень від функцій стрибка на системі довільно орієнтованих прямолінійних і викривлених включень у безмежній площині та наведено загальну методику розв"язання задач цього класу, а у праці [35] ці результати перенесено на випадок пружної півплощини.

Взаємодія включення з вільною та міжфазною границею більш детально вивчена на прикладі включення у смузі [7], півплощині [4], шаруватих і клиноподібних композиціях [14]. Особливість розв"язку біля вершини жорсткого включення, яка наближається по нормалі до границі розділу матеріалів, досліджена у праці [16]. Аналіз включення на границі розділу матеріалів зроблено в плоскій задачі у рамках узагальненої моделі стрінгера [8, 36, 40] і моделі пружного включення [9, 32], в антиплоскій задачі [29], задачі теплопровідності [22, 24] та ін.

Ряд досліджень присвячено впливу на КІН та КІТП змінної товщини тонкого прошарку [22, 28, 29, 30, 31, 43, 44].

Основним навантажуючим фактором вважається однорідне поле напружень і тепловий потік на нескінченості. Дія зосереджених факторів вивчена у ряді праць, присвячених плоскій [36], антиплоскій задачі [28], задачі теплопровідності [24, 25, 26].

Метод функцій стрибка виявився простим та ефективним методом аналізу концентрації напружень біля вершини пружного включення. Він відзначається великою універсальністю, дає змогу вивчати різні моделі включення (пружне, гнучке чи у вигляді балки [32], із стисливої рідини [15] тощо), контактну взаємодію [41]. Його ефективність підтверджують збігання результатів з граничними випадками тріщини, жорсткої плівки чи нитки, теплоізольованого включення, застосування до задачі цього класу методу скінчених елементів [42].

До методу функцій стрибка безпосередньо долучається метод лінійного розкладу потенціалів, згідно з яким включення розглядається як об"єкт того ж класу, що й оточуюче середовище і характеризується аналогічними потенціалами [2, 13]. Використовуючи розклад відповідних потенціалів у ряд по степенях малого параметра (півтовщини включення) з утриманням перших двох членів, записують значення потенціалу на границі включення. Різниці компонент вектора зміщення на протилежних берегах включення визначаються деякими комбінаціями невідомих функцій (коефіцієнтів розкладу), що мають, природно, зміст функцій стрибка. Суми відповідних компонент утворюють стійкі сполуки таких комбінацій, а отже, і функцій стрибка. Тому й величини, що характеризують граничні умови на берегах включення, записують через функції стрибка. Умови ідеального контакту включення з матрицею пов"язують граничні значення потенціалів матриці із введеними у розгляд функціями стрибка, а застосування методів теорії функцій комплексної змінної приводить до системи інтегральних рівнянь.

У рамках цього методу вивчено плоскі задачі для ізольованого включення в однорідному ізотропному середовищі при моделюванні згину у площині [I2, I3], а при дії однорідного поля напружень на нескінченності для випадку тонкого включення по дузі кола [I] та періодичної задачі стосовно системи включень, центри яких лежать на одній прямій [2I]. Досліджена також плоска задача стаціонарної термопружності [3], антиплоска задача для ізольованого [I9] та двох взаємодіючих включень [I8]. Задача згину пластини Кірхгофа вивчена при наявності ізольованого лінійного [2, 20] та додаткового кругового [5, 45] включення. Частина цих результатів міститься у праці [II].

Експериментальне дослідження проблеми концентрації напружень біля тонких включень [27] в основному підтвердило правильність вибраних концепцій.

I. Бернар И.И., Опанасович В.К. Напряженное состояние пластинки с тонкостенным включением по дуге окружности // Прикл. математика и механика. I983. Т. 47. № 2. С. 249-256. 2. Грилицкий Д.В., Драган М.С., Опанасович В.К. Изгиб плиты с прямолинейным тонкостенным включением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. I979. № 3. С. 83-88. 3. Грилицкий Д.В., Драган М.С., Опанасович В.К. Температурное поле и термоупругое состояние пластин с тонкостенным упругим включением // Прикл. математика и механика. I980. Т. 44. № 2. С. 338-345. 4. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Полуплоскость с произвольно-ориентированным линейным упругим включением // Изв. АН АрмССР. Механика. I980. Т. 33. № I. С. I2-20. 5. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К., Тисовский Л.О. Напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной плиты с тонким прямолинейным упругим включением // Физ.-хим. механика материалов. I984. Т. 20. № 2. С. 77-82. 6. Грилицький Д.В., Сорокатий Ю.І., Сулим Г.Т. Система сингулярних інтегральних рівнянь для тонкостінних пружних включень по дузі кола // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. I979. Вип. I5. С. 69-75. 7. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т., Евтушенко А.А. Распределение напряжений в полосе с упругим тонким включением // Прикл. математика и механика. I979. Т. 43. № 3. С. 542-549. 8. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для кусочнооднородной плоскости с тонкостенными упругими включениями // Прикл. механика. I975. Т. II. № I. С. 74-8I. 9. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // Прикл. математика и механика. I975. Т. 39. № 3. С. 520-529. I0. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением // Мат. методы и физ.-мех. поля. I975. Вып. I. С. 4I-48. II. Драган М.С. Двумерные задачи теории упругости для тел с тонкими упругими прямолинейными включениями:

Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1984. 12. Д р а г а н М.С. Згин консольної балки з прямолінійним пружним включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1980. Вип. 16. С. 69-75.
13. Д р а г а н М.С., О п а н а с о в и ч В.К. Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43. № 2. С. 342-348.
14. Е в т у ш е н к о А.А. Напряженное состояние упругих пластин с тонкостенным упругим включением: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1981. 15. Е в т у ш е н к о А.А., С у л и м Г.Т. Концентрация напряжений возле полости, заполненной жидкостью // Физ.-хим. механика материалов. 1980. Т. 16. № 6. С. 70-73. 16. Е в т у ш е н к о А.А., С у л и м Г.Т. Концентрация напряжений у вершины жесткого включения на прямой линии раздела материалов полуплоскостей // Физ.-хим. механика материалов. 1985. Т. 21. № 5. С. 71-74.
17. М а р т ы н я к Р.М., С у л и м Г.Т. Периодическая задача для системы линейных компланарных включений в изотропной плоскости // Мат. методы и физ. поля. 1982. Вып. 15. С. 113-117. 18. О п а н а с о в и ч В.К., Д р а г а н М.С. Антиплоска деформація тіла з системою тонких пружних включень // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С. 71-77. 19. О п а н а с о в и ч В.К., Д р а г а н М.С. Антиплоска деформація тіла з тонкостінним пружним включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1981. Вип. 16. С. 69-73. 20. О п а н а с о в и ч М.С., Д р а г а н М.С. Кручення плити з тонкостінним прямолінійним включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1980. Вип. 16. С. 64-69. 21. О п а н а с о в и ч В.К., Д р а г а н М.С. Періодична система паралельних тонких пружних включень у пластині // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 23. С. 83-89. 22. П и с к о з у б И.З. Двумерные задачи теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородных тел с тонкими упругими теплоактивными включениями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1985. 23. П и с к о з у б И.З., С у л и м Г.Т. Температурные условия взаимодействия среды с тонким включением // Инж.-физ. журн. 1983. Т. 44. № 6. С. 977-983.
24. П и с к о з у б И.З., С у л и м Г.Т. Температурное поле в кусочно-однородных средах с теплоактивными прослойками. Львов, 1984. 14 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4735-84 Деп. 25. П і с к о з у б Й.З., С у л и м Г.Т. Вплив лінійного включення на температурне поле від джерела тепла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1980. Вип. 16. С. 80-87. 26. П і с к о з у б Й.З., С у л и м Г.Т. Вплив лінійного включення на температурне поле від диполя тепла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1981. Вип. 17. С. 82-87.
27. С о р о к а т ы й Ю.И. Теоретико-экспериментальные исследования напряженного состояния упругих пластин с инородными тонкостенными включениями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1985. 28. С у л и м Г.Т. Антиплоская деформация изотропной среды с тонкими прослойками под воздействием сил, дислокаций, диполей. Львов, 1985. 20 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 782-85 Деп. 29. С у л и м Г.Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45. № 2. С. 308-318. 30. С у л и м Г.Т. Влияние формы тонкого включения на распределение температуры в кусочно-однородной плоскости // Инж.-физ. журн. 1979. Т. 37. № 6. С. 1124-1130. 31. С у л и м Г.Т. Влияние формы тонкостенного включения на концентрацию напряжений в пластине // Физ.-хим. механика материалов. 1981. Т. 17. № 3. С. 64-68. 32. С у л и м Г.Т. Сравнительный анализ моделей изгиба тонких упругих включений. Львов, 1985. 15 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ № 4487-85 Деп. 33. С у л и м Г.Т. Сравнительный анализ моделей изгиба тонких упругих включений. Львов, 1985. 15 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4487-85 Деп. 34. С у л и м Г.Т. Применение формулы

Сомильяно в задачах теории упругости для тел с тонкостенными включениями // Мат. методы и физ. поля. 1983. Вып. 18. С. 48-51. 35. С у л и м Г.Т. Упругое равновесие полуплоскости с системой линейных включений // Прикл. мех. 1983. Т. 19. № 2. С. 96-100. 36. С у л и м Г.Т. Концентрація напружень на тонкостінному включенні в кусково-однорідній площині // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1974. Вип. 9. С. 74-80. 37. С у л и м Г.Т. Про регулярність деяких систем лінійних алгебраїчних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1975. Вип. 10. С. 76-79. 38. С у л и м Г.Т. Система лінійних включень в ізотропному середовищі // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1980. № 7. С. 62-65. 39. С у л и м Г.Т. Термопружні умови взаємодії середовища з тонкостінним включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1979. Вип. 15. С. 85-92. 40. С у л и м Г.Т., Г р и л и ц к и й Д.В. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 11. С. 59-65. 41. С у л и м Г.Т., М а р т и н я к Р.М. Задача порушення контакту при стиску пружних півплощин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 23. С. 78-82. 42. С у л и м Г.Т., Р о к а ч И.В. Метод конечных элементов в задаче о тонкостенном включении // Материалы 10 конф. молодых ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР. Львов, 1982. С. 165-167. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1948-83 Деп. 43. С у л и м Г.Т., С у л и м М.В. Напряженное состояние пластинки с тонкостенным включением. Львов, 1982. 20 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4839-82 Деп. 44. С у л и м Г.Т. С у л и м М.В. Поле напряжений и перемещений в антиплоской задаче для среды с тонкостенной прослойкой. Львов, 1982. 20 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4838-82 Деп. 45. Т и с о в с ь к и й Л.О. Згин плити з круглою шайбою і тонкими пружними прямолінійними включеннями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С. 64-707. 46. Х а ч и к я н А.С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины // Изв. АН АрмССР. Механика. 1970. Т. 23. № 3. С. 14-22. 47. Ш а п к и й И.П. Напряженное состояние пологих оболочек с тонкими упругими включениями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1984.

Стаття надійшла до редколегії 03.03.86