УДК 517:536.21

Р.І. Мокрик, В.В.Балибердін, І.В.Оліярник, О.М.Уханська

НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ СФЕРИ

Розглянемо багатошарову сферу з центром у точці $r=0$. Введемо такі позначення: $r_i\ (i=\overline{1,4})$ – радіус i-го шару ($r_i < r_{i+1}$); λ_i, a_i – відповідно коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності; $T^{(i)}(r,t)$ – шукана температура i-го шару; T_c – температура зовнішнього середовища. У початковий момент часу температура дорівнює нулю. На границях шарів виконуються умови ідеального теплового контакту, що виражаються в рівності температур і теплових потоків. Між зовнішнім шаром і навколишнім середовищем, температура якого змінюється з часом, відбувається теплообмін за законом Ньютона з коефіцієнтом теплообміну α.

Задача зводиться до розв"язування системи рівнянь [2]

$$\frac{\partial}{\partial t}(rT^{(i)}) = a_i \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT^{(i)}), \quad i=\overline{1,4} \tag{1}$$

при наступних початкових та граничних умовах

$$T^{(i)}\Big|_{t=0}=0, \quad i=\overline{1,4}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=0}=0; \tag{3}$$

$$T^{(i)}\Big|_{r=r_i} = T^{(i+1)}\Big|_{r=r_i}, \quad i=\overline{1,3}; \tag{4}$$

$$\lambda_i \frac{\partial T^{(i)}}{\partial r}\Big|_{r=r_i} = \lambda_{i+1}\frac{\partial T^{(i+1)}}{\partial r}\Big|_{r=r_i}, \quad i=\overline{1,3}; \tag{5}$$

$$\lambda_4 \frac{\partial T^{(4)}}{\partial r}\Big|_{r=r_4} = -\alpha\left(T^{(4)}\Big|_{r=r_4} - T_c\right), \tag{6}$$

де

$T_c = T_0(1-e^{-\alpha_0 t})$ – температура зовнішнього середовища. (7)

Введемо безрозмірні величини

$$\alpha_i = \frac{a_1}{a_i}, \ H=\frac{\alpha r_4}{\lambda_4}, \ \gamma_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}, \ \theta^{(i)} = \frac{T^{(i)}}{T_0},$$

$$\tau = \frac{a_1 t}{r_4^2}, \ R=\frac{r}{r_4}, \ f(\tau)=1-e^{-\alpha'\tau}. \tag{8}$$

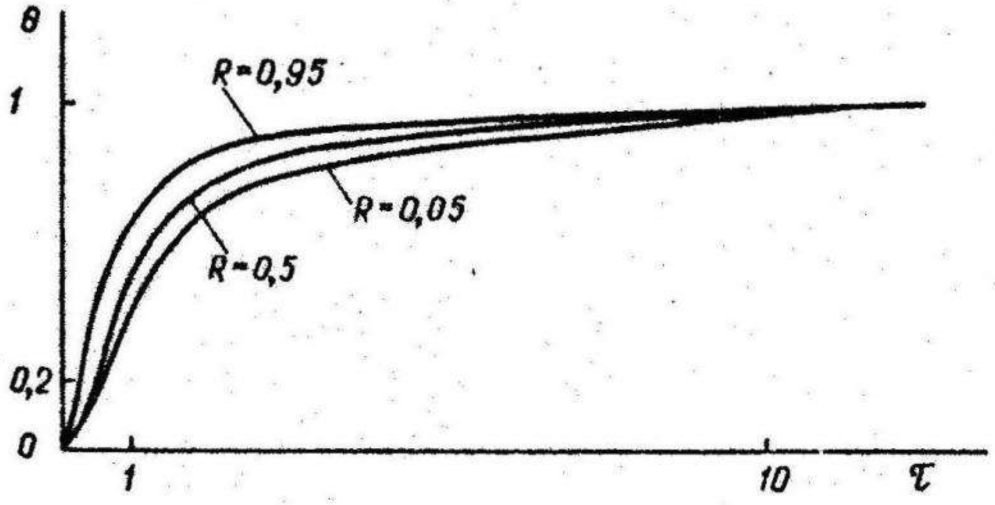

Рис. I.

Тоді зі співвідношень (I)–(6) задача у безрозмірній формі матиме вигляд

$$\alpha_i \frac{\partial(R\theta^{(i)})}{\partial\tau} = \frac{\partial^2(R\theta^{(i)})}{\partial R^2}, \quad i=\overline{1,4},$$

$$\theta^{(i)}\Big|_{\tau=0} = 0, \quad i=\overline{1,4},$$

$$\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial R}\Big|_{R=0} = 0,$$

$$\theta^{(i)}\Big|_{R=R_i} = \theta^{(i+1)}\Big|_{R=R_i}, \quad i=\overline{1,3},$$

$$\gamma_{i+1}\frac{\partial\theta^{(i)}}{\partial R}\Big|_{R=R_i} = \frac{\partial\theta^{(i+1)}}{\partial R}\Big|_{R=R_i}, \quad i=\overline{1,3},$$

$$\frac{\partial\theta^{(4)}}{\partial R}\Big|_{R=R_4} = -H\left(\theta^{(4)}\Big|_{R=R_4} - f(\tau)\right). \qquad (9)$$

Застосуємо до (9) інтегральне перетворення по часу з орто-експоненціальним ядром $oep_n(\tau)$ [1]

$$oep_n(\tau)=\sum_{k=1}^{n} b_{nk}\, e^{-k\tau}, \tag{10}$$

де b_{nk} – постійні величини.

Функцію

$$\theta_n(R)=\int_0^{\infty}\theta(R,\tau)\, oep_n(\tau)\, d\tau \tag{11}$$

називаємо зображенням шуканої функції $\theta(R,\tau)$. Оригінал від такого зображення визначається як

$$\theta(R,\tau)=2\sum_{n=1}^{\infty} n\,\theta_n(R)\, oep_n(\tau). \tag{12}$$

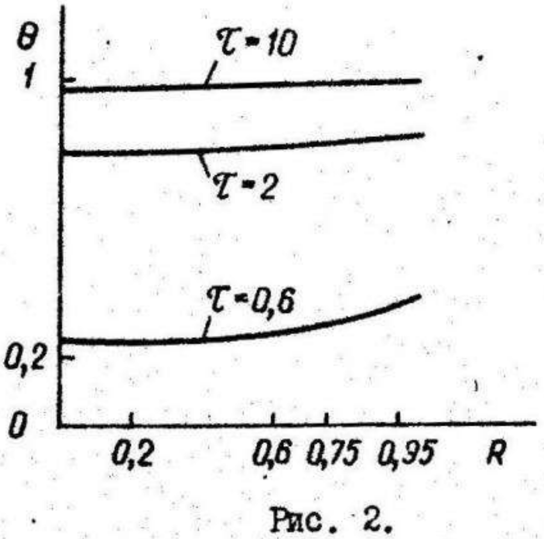

Рис. 2.

Тоді задача (9) в зображеннях набирає вигляду

$$\alpha_i\Big[nR\theta_n^{(i)}+2\sum_{k=1}^{n-1}k\,\theta_k^{(i)}R\Big]=\frac{d^2}{dR^2}\left(R\theta_n^{(i)}\right),\quad i=\overline{1,4}, \tag{13}$$

$$\left.\frac{d\theta_n^{(1)}}{dR}\right|_{R=0}=0,$$

$$\left.\theta_n^{(i)}\right|_{R=R_i}=\left.\theta_n^{(i+1)}\right|_{R=R_i},\quad i=\overline{1,3},$$

$$\gamma_{i+1}\frac{d\theta_n^{(i)}}{dR}\bigg|_{R=R_i}=\frac{d\theta_n^{(i+1)}}{dR}\bigg|_{R=R_i},\quad i=\overline{1,3},$$

$$\frac{d\theta_n^{(4)}}{dR}\bigg|_{R=R_4}=-H\left(\theta_n^{(4)}\big|_{R=R_4}-f_n\right).\tag{I4}$$

Співвідношення

$$\theta_n^{(i)}(R)=\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{n}\left[A_{nk}^{(i)}ch(\sqrt{k\alpha_i}R)+B_{nk}^{(i)}sh(\sqrt{k\alpha_i}R)\right],\ i=\overline{1,4}\tag{I5}$$

є розв"язками системи рівнянь (I3); для невідомих коефіцієнтів $A_{nk}^{(i)}$ і $B_{nk}^{(i)}$ наявні рекурентні співвідношення

$$A_{nk}^{(i)}=\frac{2}{k-n}\sum_{m=k}^{n-1}mA_{mk}^{(i)},\quad i=\overline{1,4},$$

$$B_{nk}^{(i)}=\frac{2}{k-n}\sum_{m=k}^{n-1}mB_{mk}^{(i)},\quad k=\overline{1,n-1}.$$

Підставивши (I5) в граничні умови (I4), знаходимо значення $A_{nn}^{(i)}$ та $B_{nn}^{(i)}$. Числовий аналіз задачі проводився за допомогою складеної *FORTRAN* - програми.

Числові розрахунки проводили для безрозмірних параметрів $0\le\tau\le 20$, $0\le R\le 1$, $R_1=0{,}6$, $R_2=0{,}75$, $R_3=0{,}95$, $R_4=1$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1{,}1$, $\alpha_3=0{,}5$, $\alpha_4=0{,}8$, $\gamma_2=1{,}2$, $\gamma_3=0{,}9$, $\gamma_4=1$.

На рис. I показано розподіл безрозмірної температури $\theta(R,\tau)$ по часу τ при різних значеннях R. У початковий момент часу $\theta(R,0)=0$. Розрахунки показують, що з плином часу в інтервалі $0<\tau<10$ температура зростає і, починаючи з $\tau=10$, набирає постійного значення. На рис. 2 зображено розподіл температури по просторовій координаті R при різних значеннях τ.

Таким чином, запропонований метод розрахунку температурних полів дає змогу ефективно аналізувати в розгортці просторових координат і часу зміну температурного поля в багатошаровому сферичному об"єкті в залежності від зовнішніх умов та теплофізичних характеристик матеріалів об"єкта. Даний метод вимагає на порядок менше "машинного" часу в порівнянні з іншими методами.

1. М о к р и к Р.И., О л и я р н и к И.В. Нестационарная задача термовязкоупругости для полупространства. К., 1984. 14 с. Рукопись деп. в УКРНИИНТИ, № 1569. 2. М у ч н и к Г.Ф., Р у б а ш о в И.Б. Методы теории теплообмена. М., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.86

УДК 539.3

В.К.Опанасович, А.С.Копець

ПРО ПОБУДОВУ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ЯКИЙ МАЄ РОЗРИВ ПО ТВІРНІЙ

Розглянемо замкнуту безмежну циліндричну оболонку радіуса R і товщини $2h$, навантажену поверхневими зусиллями. Серединну поверхню оболонки віднесемо до ортогональної системи безрозмірних координат α, β, які введено таким чином, щоб координатна лінія $\beta = const$ збігалася з твірною оболонки, а перша квадратична форма поверхні мала вигляд $dS^2 = l^2 d\alpha^2 + l^2 d\beta^2$ (l - деякий лінійний параметр оболонки).

Виходитимемо з рівнянь рівноваги для циліндричної оболонки [3,4]

$$\frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} = -l q_1,$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \frac{2}{R}\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -l q_2 - \frac{l}{R} m_2,$$

$$\frac{l}{R} N_2 - \frac{1}{l}\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial \beta^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta}\right) = l q_n + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial m_2}{\partial \beta},$$

$$Q_1^* = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + 2\frac{\partial H}{\partial \beta}\right) + m_1,$$

$$Q_2^* = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial M_2}{\partial \beta} + 2\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right) + m_2, \tag{1}$$

і диференціальних співвідношень між зусиллями N_1, N_2, S, моментами M_1, M_2, H та переміщеннями U, V, W і кутами повороту нормалі θ_1, θ_2 у формі [3]