1. М о к р и к Р.И., О л и я р н и к И.В. Нестационарная задача термовязкоупругости для полупространства. К., 1984. 14 с. Рукопись деп. в УКРНИИНТИ, № 1569. 2. М у ч н и к Г.Ф., Р у б а ш о в И.Б. Методы теории теплообмена. М., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.86

УДК 539.3

В.К.Опанасович, А.С.Копець

ПРО ПОБУДОВУ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ЯКИЙ МАЄ РОЗРИВ ПО ТВІРНІЙ

Розглянемо замкнуту безмежну циліндричну оболонку радіуса R і товщини $2h$, навантажену поверхневими зусиллями. Серединну поверхню оболонки віднесемо до ортогональної системи безрозмірних координат α, β, які введено таким чином, щоб координатна лінія $\beta = const$ збігалася з твірною оболонки, а перша квадратична форма поверхні мала вигляд $dS^2 = l^2 d\alpha^2 + l^2 d\beta^2$ (l – деякий лінійний параметр оболонки).

Виходитимемо з рівнянь рівноваги для циліндричної оболонки [3,4]

$$\frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} = -l q_1,$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \frac{2}{R}\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -l q_2 - \frac{l}{R} m_2,$$

$$\frac{l}{R} N_2 - \frac{1}{l}\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial \beta^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta}\right) = l q_n + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial m_2}{\partial \beta},$$

$$Q_1^* = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + 2\frac{\partial H}{\partial \beta}\right) + m_1,$$

$$Q_2^* = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial M_2}{\partial \beta} + 2\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right) + m_2, \tag{1}$$

і диференціальних співвідношень між зусиллями N_1, N_2, S, моментами M_1, M_2, H та переміщеннями U, V, W і кутами повороту нормалі θ_1, θ_2 у формі [3]

$$N_1=\frac{B}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\nu\frac{\partial v}{\partial\beta}+\nu\frac{l}{R}w\right),\quad M_1=-\frac{B}{l}a^2R^2\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}+\nu\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right),$$

$$N_2=\frac{B}{l}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{l}{R}w\right),\quad M_2=-\frac{B}{l}a^2R^2\left(\nu\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right),$$

$$S=\frac{B}{l}\,\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\right),\quad H=-\frac{B}{l}a^2R^2(1-\nu)\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha},\tag{2}$$

де $\quad\theta_1=\frac{1}{l}\frac{\partial w}{\partial\alpha};\quad \theta_2=\frac{1}{l}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{v}{R};$

$$B=\frac{2Eh}{1-\nu^2};\quad a^2=\frac{h^2}{3R^2};\tag{3}$$

$E,\ \nu$ – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона оболонки.

Нехай S_0 – область зміни криволінійних координат α, β, а L – координатна лінія $\beta=\beta_0$. Встановимо загальний вигляд розв"язку рівнянь (I), (2), коли переміщення, кути повороту, зусилля та моменти мають розрив першого роду вздовж лінії L. З цією метою дані величини розглядаємо як узагальнені функції [I] в області S_0. Тоді, перейшовши в співвідношеннях (I)–(3) до узагальнених похідних, дістаємо

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}N_1+\frac{\partial}{\partial\beta}S=-lq_1+[S]\delta_0(\beta_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}N_2+\frac{\partial}{\partial\alpha}S+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\beta}M_2+\frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha}H=-lq_2-\frac{l}{R}m_2+[N_2]\delta_0(\beta_1)+\frac{1}{R}[M_2]\delta_0(\beta_1),$$

$$\frac{l}{R}N_2-\frac{1}{l}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}M_1-\frac{\partial}{\partial\beta}Q_2^*=lq_n+\frac{\partial}{\partial\alpha}m_1-[Q_2^*]\delta_0(\beta_1),$$

$$Q_1^*=\frac{1}{l}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}M_1+2\frac{\partial}{\partial\beta}H\right)+m_1+\frac{B}{l^2}a^2R^2(1-\nu)\left[\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right]\delta_0(\beta_1),$$

$$Q_2^*=\frac{1}{l}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}M_2+2\frac{\partial}{\partial\alpha}H\right)+m_2-\frac{1}{l}[M_2]\delta_0(\beta_1);\tag{4}$$

$$N_1=\frac{B}{l}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}u+\nu\frac{\partial}{\partial\beta}v+\nu\frac{l}{R}w\right)-\nu[v]\delta_0(\beta_1)\right),\quad M_1=-\frac{B}{l}a^2R^2\left(\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta_1+\nu\frac{\partial}{\partial\beta}\theta_2\right)-\nu[\theta_2]\delta_0(\beta_1)\right),$$

$$N_2=\frac{B}{l}\left(\left(\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}u+\frac{\partial}{\partial\beta}v+\frac{l}{R}w\right)-[v]\delta_0(\beta_1)\right),\quad M_2=\frac{B}{l}a^2R^2\left(\left(\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta_1+\frac{\partial}{\partial\beta}\theta_2\right)-[\theta_2]\delta_0(\beta_1)\right),$$

$$S=\frac{B}{l}\frac{1-\nu}{2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}v+\frac{\partial}{\partial\beta}u\right)-[u]\delta_0(\beta_1)\right),\ H=-\frac{B}{l}a^2R^2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta_2\ ; \tag{5}$$

$$\theta_1=\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial\alpha}w\ ,\ \ \theta_2=\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial\beta}w-\frac{v}{R}-\frac{1}{l}[w]\delta_0(\beta_1). \tag{6}$$

Тут і далі $\frac{\partial}{\partial\alpha}f$, $\frac{\partial}{\partial\beta}f$ – узагальнені похідні функції f по координатах α і β відповідно; $\delta_0(\beta_1)-2\pi\frac{R}{l}$ – періодична дельта-функція; $\beta_1=\beta-\beta_0$;

$$[f]=f(\alpha,\beta_0+0)-f(\alpha,\beta_0-0).$$

Зауважимо, що при отриманні співвідношень (4)–(6) використано правило знаходження узагальнених похідних кусково-однорідних функцій, коли відома звичайна (класична) похідна та величина стрибка у точці розриву [1]. Для випадку функції двох змінних α,β, що має розрив по лінії $\beta=\beta_0$, це правило дає

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f=\frac{\partial f}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial}{\partial\beta}f=\frac{\partial f}{\partial\beta}+[f]\delta_0(\beta-\beta_0).$$

Підставляючи у рівняння (4) вирази для зусиль, моментів кутів повороту (5), (6), приходимо до системи рівнянь у переміщеннях, матричний запис якої має вигляд

$$M\cdot\bar{U}(\alpha,\beta)=\bar{P}(\alpha,\beta), \tag{7}$$

де

$$M=\|m_{ij}\|_{3\times3}\ ;$$
$$\bar{U}=\|u,v,w\|^T;$$
$$\bar{P}=\|X,Y,Z\|^T;$$

$$m_{11}=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2};\quad m_{12}=m_{21}=\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta};$$

$$m_{13}=m_{31}=\nu\frac{l}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha};\quad m_{22}=\frac{1-\nu}{2}\left(1+4a^2\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+(1+a^2)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2};$$

$$m_{23}=m_{32}=\frac{l}{R}\frac{\partial}{\partial\beta}-a^2\frac{R}{l}\left((2-\nu)\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}+\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\right);$$

$$m_{33}=\frac{l^2}{R^2}+a^2\frac{R^2}{l^2}\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\right);$$

$$X=\frac{l}{B}\left\{-lq_1+[S]\delta_0(\beta_1)+\nu\frac{B}{l}\frac{d}{d\alpha}[V]\delta_0(\beta_1)+\frac{B}{l}\frac{1-\nu}{2}[U]\delta_0'(\beta_1)\right\};$$

$$Y=\frac{l}{B}\left\{-lq_2-\frac{l}{R}m_2+[N_2]\delta_0(\beta_1)+\frac{1}{R}[M_2]\delta_0(\beta_1)+\frac{B}{l}[V]\delta_0'(\beta_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{B}{l}\frac{1-\nu}{2}\frac{d}{d\alpha}[U]\delta_0(\beta_1)-\frac{B}{l}a^2\frac{R}{l}\left(l[\theta_2]\delta_0'(\beta_1)+[W]\delta_0''(\beta_1)+(2-2\nu)\frac{d^2}{d\alpha^2}[W]\delta_0(\beta_1)\right)\right\},$$

$$Z=\frac{l}{B}\left\{lq_n+\frac{\partial}{\partial\alpha}m_1+\frac{\partial}{\partial\beta}m_2-[Q_2^*]\delta_0(\beta_1)-\frac{1}{l}[M_2]\delta_0'(\beta_1)+\right.$$

$$+\frac{B}{l}a^2\frac{R^2}{l^2}\left(l[\theta_2]\delta_0''(\beta_1)+[W]\delta_0'''(\beta_1)+\nu l\frac{d^2}{d\alpha^2}[\theta_2]\delta_0(\beta_1)+\right.$$

$$\left.\left.+(2-\nu)\frac{d^2}{d\alpha^2}[W]\delta_0'(\beta_1)\right)+\frac{B}{R}[V]\delta_0(\beta_1)\right\}.$$

Зауважимо, що в праву частину рівнянь (6) увійшли стрибки лише від функцій $U, V, W, \theta_2, N_2, S, M_2$ та Q_2^*. Приймаючи $[N_2]=[S]=[Q_2^*]=[M_2]=0, \forall\alpha$ і $[U]=[V]=[W]=[\theta_2]=0, \forall\alpha: |\alpha|>1$, отримуємо систему рівнянь у переміщеннях, яка описує деформацію непологотої циліндричної оболонки з повздовжнім розрізом [3]. Якщо ж $[U]=[V]=[W]=[\theta_2]=0, \forall\alpha$, то дістаємо рівняння для знаходження переміщень в оболонці, навантаженій зосередженими силами по твірній. Частковий розв"язок системи рівнянь (6) знаходимо в класі узагальнених функцій методом матриць Гріна [2]

$$\bar{U}(\alpha,\beta)=\frac{l^2}{a^2R^2}\frac{2}{1-\nu}\iint\limits_{S_0}G(\alpha-\xi,\beta-\eta)\bar{P}(\xi,\eta)d\xi\,d\eta\,. \tag{8}$$

Матрицю Гріна G записуємо у формі

$$G(\alpha,\beta)=\frac{\partial}{\partial\alpha}D\varphi(\alpha,\beta),$$

де $D=\|d_{ij}\|_{3\times3}$ – матриця алгебраїчних доповнень до матриці M; $\varphi(\alpha,\beta)$ – узагальнений розв"язок скалярного рівняння; $\frac{l^2}{a^2R^2}\frac{2}{1-\nu}\det_M\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(\alpha,\beta)=\delta(\alpha)\delta_0(\beta)$, $\det M$ – визначник матриці M.

Використавши властивості згортки узагальнених функцій [1], представлення (8) зведемо до вигляду

$$\bar{U}(\alpha,\beta)=\bar{U}_0(\alpha,\beta)+\frac{l^2}{a^2R^2}\frac{2}{1-\nu}\frac{l}{B}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{8}\begin{bmatrix}R_{1j}\\R_{2j}\\R_{3j}\end{bmatrix}\varphi(\alpha-\xi,\beta-\beta_0)f_j(\xi)\,d\xi \text{ , де } \quad (9)$$

$$f_1=\frac{B}{l}\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right];\ f_2=\frac{B}{l}\left[\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right];\ f_3=Ba^2\frac{R^2}{l^3}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}\right];\ f_4=Ba^2\frac{R^2}{l^2}\left[\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right];$$

$$f_5=[N_2];\ f_6=[S],\ f_7=\frac{1}{l}[M_2];\ f_8=\left[\int^{\alpha}Q_2^{*}\,d\alpha\right];$$

$$R_{i_1}=\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}d_{i_1}+\frac{\partial}{\partial\alpha}d_{i_2}\right),\ R_{i_2}=\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}d_{i_1}+\frac{\partial}{\partial\beta}d_{i_2}+\frac{l}{R}d_{i_3};$$

$$R_{i_3}=(2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}d_{i_3}+\int^{\alpha}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}(d_{i_3})d\alpha+\frac{l}{R}\left((2-2\nu)\frac{\partial}{\partial\alpha}d_{i_2}+\int^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(d_{i_2})d\alpha\right);$$

$$R_{i_4}=\nu\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}d_{i_3}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}d_{i_3}-\frac{l}{R}\frac{\partial}{\partial\beta}d_{i_2};$$

$$R_{i_5}=\frac{\partial}{\partial\alpha}d_{i_2};$$

$$R_{i_6}=\frac{\partial}{\partial\alpha}d_{i_1};$$

$$R_{i_7}=\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}d_{i_3}-\frac{l}{R}d_{i_2};$$

$$R_{i_8}=-\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}d_{i_3};\qquad i=1,2,3.$$

Складова частина розв"язку $\bar{U}_0$ визначається розподіленим навантаженням q_1, q_2, q_n, m_1, m_2, яке діє на оболонку в області $S_0\setminus L$,

$$\bar{U}_0(\alpha,\beta)=\frac{l^2}{a^2R^2}\frac{2}{1-\nu}\iint_{S_0}G(\alpha-\xi,\beta-\eta)\begin{bmatrix}-\frac{l^2}{B}q_1\\-\frac{l^2}{B}\left(q_2+\frac{1}{R}m_2\right)\\\frac{l}{B}\left(lq_n+\frac{\partial m_1}{\partial\xi}+\frac{\partial m_2}{\partial\eta}\right)\end{bmatrix}d\xi\,d\eta.$$

Зрозуміло, що для отримання загального розв"язку рівняння до часткового розв"язку (8) або (9) слід додати розв"язок однорідного рівняння $M\bar{U}(\alpha,\beta)=0$. Маючи розв"язок рівнянь (6) у переміщеннях, який знайдено в класі узагальнених функцій в області S_0, легко встановити кути повороту, зусилля та моменти для області $S_0 \setminus L$. Для цього достатньо скористатись співвідношеннями (5).

I. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976. 2. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М., 1980. 3. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. К., 1985. 4. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К., 1978.

Стаття надійшла до редколегії 18.12.85

УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Б.М.Голуб

ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ З ПАМ"ЯТТЮ З ВИКОРИСТАННЯМ LDL^T - РОЗКЛАДУ ХОЛЕСЬКОГО ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянемо задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in E^n, \tag{1}$$

де E^n – n - мірний евклідів простір.

Для розв"язування задачі (1) запропоновано ітераційний метод з пам"яттю, порядок збіжності якого $1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$ [3]. Однак цей метод забезпечує лише локальну збіжність.

Пропонуємо метод з регулюванням кроку, який поряд із збереженням високої швидкості збіжності збігатиметься до розв"язку задачі (1) з довільного початкового наближення.

Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційована і $f''(x)$- матриця її других похідних. Побудуємо [1] матрицю $F(x)$, пов"язану з $f''(x)$ наступним чином:

$$F(x) = LDL^T = f''(x) + E(x), \tag{2}$$

де L і D – фактори розкладу Холеського матриці $F(x)$; L – нижня одинична трикутна матриця; D – додатна діагональна матриця; $E(x)$ – діагональна матриця поправок. Матриця $F(x)$ – додатно визначена і відрізняється від $f''(x)$ лише діагональними еле-