у переміщеннях, який знайдено в класі узагальнених функцій в області S_0, легко встановити кути повороту, зусилля та моменти для області $S_0 \setminus L$. Для цього достатньо скористатись співвідношеннями (5).

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976. 2. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М., 1980. 3. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. К., 1985. 4. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К., 1978.

Стаття надійшла до редколегії 18.12.85

УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Б.М.Голуб

ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ З ПАМ"ЯТТЮ З ВИКОРИСТАННЯМ LDL^T - РОЗКЛАДУ ХОЛЕСЬКОГО ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянемо задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in E^n, \tag{1}$$

де E^n – n - мірний евклідів простір.

Для розв"язування задачі (1) запропоновано ітераційний метод з пам"яттю, порядок збіжності якого $1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$ [3]. Однак цей метод забезпечує лише локальну збіжність.

Пропонуємо метод з регулюванням кроку, який поряд із збереженням високої швидкості збіжності збігатиметься до розв"язку задачі (1) з довільного початкового наближення.

Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційована і $f''(x)$- матриця її других похідних. Побудуємо [1] матрицю $F(x)$, пов"язану з $f''(x)$ наступним чином:

$$F(x) = LDL^T = f''(x) + E(x), \tag{2}$$

де L і D – фактори розкладу Холеського матриці $F(x)$; L – нижня одинична трикутна матриця; D – додатна діагональна матриця; $E(x)$ – діагональна матриця поправок. Матриця $F(x)$ – додатно визначена і відрізняється від $f''(x)$ лише діагональними елементами. Зауважимо, що коли $f''(x)$ додатно визначена, то $F(x)=f''(x)$.

Дослідимо наступний ітераційний метод для розв"язування задачі (I):

$$x_{k+1}=x_k-\alpha_k F^{-1}(\bar{x}_k)f'(x_k),$$

$$\bar{x}_k=\begin{cases} x_0, & \text{якщо } k=0 \\ x_k-\frac{1}{2}\alpha_{k-1}F^{-1}(\bar{x}_{k-1})f'(x_k), & \text{якщо } k=1,2,3,\ldots, \end{cases} \quad (3)$$

де $F(x)$ визначається формулою (2) [I], а крок α_k вибирається наступним чином [2]. Приймемо $\alpha=1$ і дробимо його шляхом множення на константу $\gamma\ (0<\gamma<1)$ до виконання нерівності

$$f(x_k+\alpha p_k)\leqslant f(x_k)+\varepsilon\alpha<f'(x_k),\ p_k>, \quad (4)$$

де $p_k=-F^{-1}(\bar{x}_k)f'(x_k);\ 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, а $<.,.>$ – скалярний добуток.

Достатні умови збіжності методу (3) дає наступна теорема.

<u>Теорема</u>. Нехай функція $f(x)$ обмежена знизу і $f(x)\in C^2(E^n)$. Тоді для методу (3) $\|f'(x_k)\|\to 0$ при $k\to\infty$, яка б не була початкова точка x_0 .

Якщо, крім того, $f(x)\in C^3(E^n)$, $\|f'''(x)\|\leqslant R$,

$\|f'''(x)-f'''(y)\|\leqslant K\|x-y\|,\ x,y\in E^n,\ R=const>0,\ K=const>0$

і функція $f(x)$ сильно випукла у деякому околі точки x_* , де x_* – єдина точка, в якій виконуються необхідні умови екстремуму, то незалежно від вибору початкової точки x_0 послідовність $\{x_k\}$, визначена умовами (3), збігається до x_* , причому справедлива оцінка

$$\|x_{N+j}-x_*\|\leqslant Cq^{z_{N+j}},\quad j=0,1,2,\ldots, \quad (5)$$

де q, N і C – деякі константи: $0<q<1,\ 0\leqslant N<\infty,\ 0<C<\infty$ і

$z_N=1,\ z_{N+1}=2,\ z_{N+j}=2z_{N+j-1}+z_{N+j-2},\ j=2,3,4,\ldots$

<u>Доведення</u>. Оскільки матриці $F_k=F(\bar{x}_k)$, $k=0,1,2,\ldots$ симетричні та додатно визначені [I], то вектори $p_k=-F_k^{-1}f'_k$, де $f'_k=f'(x_k)$, характеризують напрямки спуску функції $f(x)$. У цьому випадку існує [2] точка $\alpha_k\neq 0$, коли умова (4) виконуватиметься, тобто

$$f_{k+1}-f_k\leqslant-\varepsilon\alpha_k<f'_k,\ F_kf'_k><0, \quad (6)$$

якщо $\| f'_K \| \neq 0$ (тут $f_K = f(x_K)$). З обмеженості знизу функції $f(x)$ і (6) випливає, що при $K \to \infty$ $(f_{K+1} - f_K) \to 0$ і $\| f'_K \| \to 0$. Це й доводить першу частину теореми.

Оскільки точка x_* єдина, в якій виконуються необхідні умови екстремуму, а $\| f'_K \| \to 0$ при $K \to \infty$, то послідовність $\{x_K\}$ збігається до x_*. Внаслідок сильної випуклості функції $f(x)$ в околі точки x_* матриця $f''(x)$ додатно визначена, а тому в цьому околі $F(x) = f''(x)$.

Проводячи такі ж міркування, як і при доведенні теореми про збіжність узагальненого методу Ньютона [2], можна показати, що, починаючи з деякої ітерації, в методі (3) $\alpha_K \equiv 1$.

Далі внаслідок збіжності послідовності $\{x_K\}$ до x_* на деякій ітерації N виконується нерівність

$$l \| f'_N \| \leq mq,$$

де $\frac{m}{2} = \varkappa > 0$ – константа сильної випуклості функції $f(x)$ в околі точки x_*; $l^2 = \frac{R^2}{m^2} + \frac{2}{3}\frac{K}{m}$, а це означає, що задовольняться всі умови теореми [3] і наявна оцінка (5). Теорема доведена.

Зауважимо, що для побудови LDL^T – розкладу з уточненням при необхідності діагональних елементів матриці D потрібно виконати приблизно $\frac{n^3}{6}$ операцій, а для знаходження векторів $(x_K - x_{K-1})$ і $(\bar{x}_K - x_K)$ необхідно чотири рази розв"язати систему лінійних рівнянь з відомими одиничними трикутними матрицями [1]. Це означає, що кількість обчислень на кожній ітерації у методі (3) без врахування затрат на визначення α_K не перевищує кількості обчислень у методі [3]. Порівняно з узагальненим методом Ньютона [2] збільшення кількості арифметичних операцій на кожній ітерації незначне [3], а швидкість збіжності суттєво більша. Крім того, метод (3) дає змогу знаходити точки x_K, в яких $\| f'_K \| = 0$, без вимоги сильної випуклості на функцію $f(x)$, і, якщо x_K – сідлова точка, то можна визначити напрямок від"ємної кривизни [1] (вектор, що задовольняє нерівність $p_K^T F_K p_K < 0$) і продовжувати пошук точки мінімуму.

1. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., 1985. 2. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., 1975. 3. Щербина Ю.М., Голуб Б.М. Збіжність ітераційного методу з пам"яттю для мінімізації функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С. 3-7.

Стаття надійшла до редколегії 12.12.85