УДК 519.6

Б.М.Голуб

ОДНА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Розглянемо задачу

$$f_0(x) \to min , \quad x \in E^n \tag{1}$$

при обмеженнях $f_i(x) \leq 0,\ i \in J^-,\ f_i(x) = 0,\ i \in J^0$, де E^n – n – мірний евклідів простір; J^0, J^- – скінченні множини індексів.

Не зменшуючи загальності [2], можна розглядати задачу (1) при наявності обмежень лише типу нерівностей

$$f_i(x) \leq 0, \quad i \in J = \{1, 2, \ldots, l\}. \tag{2}$$

За умови, що функції $f_i(x),\ i \in \{0\} \cup J$ сильно випуклі, досліджено [1] варіант методу лінеаризації з надлінійною швидкістю збіжності до точки x_*, в якій задовольняються необхідні умови екстремуму задачі (1)-(2).

Пропонуємо модифікований метод лінеаризації, який поряд зі збереженням високої швидкості збіжності не ставить ніяких вимог щодо випуклості функцій.

На кожній ітерації методу потрібно розв"язувати задачу

$$\min_p \left\{ \langle f_0'(x), p \rangle + \frac{1}{2} \langle p, Ap \rangle : \langle f_i'(x), p \rangle + f_i(x) \leq 0,\ i \in J_\delta(x) \right\}, \tag{3}$$

де $J_\delta(x) = \{ i \in J : f_i(x) \geq F(x) - \delta \}$; $\delta > 0$;

$$F(x) = max\{0, f_1(x), \ldots, f_l(x)\},$$

а $\langle \cdot , \cdot \rangle$ – скалярний добуток.

Розв"язок задачі (3) і її множники Лагранжа позначимо відповідно через $p(x)$ і $u^i(x)$, $i \in J_\delta(x)$. Позначимо також через $J_\delta^0(x)$ множину індексів активних обмежень задачі (3):

$$J_\delta^0(x) = \{ i \in J_\delta(x) : \langle f_i'(x), p(x) \rangle + f_i(x) = 0 \}.$$

Матрицю A будуємо наступним чином.

Нехай матриця $B(x, u, h)$ складається з елементів

$$h^{-2}[L(x + (e_i + e_j)h, u) - L(x + e_i h, u) - L(x + e_j h, u) + L(x, u)],$$

де $L(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{l} u^i f_i(x)$ – функція Лагранжа задачі (1)-(2); e_i – одиничні орти простору E^n. Очевидно, що $B(x, u, h)$ є наближення з точністю до порядку h матриці $L''_{xx}(x, u)$, якщо $f_i \in C^2$, $i \in \{0\} \cup J$.

Для симетричної матриці $B(x,u,h)$ можна побудувати модифіковане LDL^T - розбиття Холеського [I] і отримати додатно визначену матрицю

$$A = LDL^T = B + E, \qquad (4)$$

де L - одинична нижня трикутна матриця; D, E - невід"ємні діагональні матриці; T - транспонування. Всі матриці в (4) залежать від x, u і h.

Для розв"язування задачі (I)-(2) дослідимо наступний алгоритм.

Нехай вибрані [2] числа $N>0$, $\delta>0$, $h_0>0$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, а також параметр модифікованого розбиття Холеського $\overline{m}>0$ [I] і початкове наближення x_0. Приймаємо $u_{-1}=0$, $u_{-1}\in E^l$.

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка x_K, вектор множників Лагранжа u_{K-1} і число h_K вже побудовані.

I. Обчислюємо матрицю $B_K = B(x_K, u_{K-1}, h_K)$ і будуємо для неї модифікований розклад Холеського. В результаті отримуємо додатно визначену матрицю $A_K = A(x_K, u_{K-1}, h_K)$.

2. Розв"язуючи задачу (3) при $x = x_K$, $A = A_K$, обчислюємо $p_K = p(x_K)$, $u_K^i = u^i(x_K)$, $i \in J_\delta(x_K)$. Приймаємо $u_K^i = 0$, $i \notin J_\delta(x_K)$.

3. Вважаємо, що $h_{K+1} = min(h_K, \|p_K\|)$.

4. Починаючи з $\alpha = 1$, дробимо його шляхом ділення навпіл до першого виконання нерівності

$$f_0(x_K+\alpha p_K) + NF(x_K+\alpha p_K) \le f_0(x_K) + NF(x_K) - \alpha\varepsilon \langle A_K p_K, p_K \rangle. \qquad (5)$$

Приймаємо $x_{K+1} = x_K + \alpha p_K$ і повертаємося до кроку I.

Процес припиняється, якщо $\|p_K\| \le \varepsilon_1$, де ε_1 - задана точність.

Достатні умови збіжності алгоритму дає наступна теорема.

<u>Теорема</u>. Нехай виконуються умови:

I) множина $\Omega_0 = \{x : f_0(x) + NF(x) \le f_0(x_0) + NF(x_0)\}$ компактна;

2) задача (3) має розв"язок відносно $p \in E^n$ при довільному $x \in \Omega_0$ і існують множники Лагранжа $u^i(x)$, $i \in J_\delta(x)$, що $\sum_{i=1}^{l} u^i(x) \le N$;

3) функції $f_i \in C^2$, $i \in \{0\} \cup J$;

4) градієнти $f_i'(x)$, $i \in J_* = \{i \in J : f_i(x_*) = 0\}$ лінійно незалежні і $u_*^i = u^i(x_*) > 0$, $i \in J_*$;

5) $\langle L''_{xx}(x_*, u_*)p, p\rangle > 0$ для всіх $p \neq 0$, які задовільняють рівності $\langle f'_i(x_*), p\rangle = 0$, $i \in J_*$, де x_* – єдина точка, в якій виконуються необхідні умови екстремуму.

Тоді послідовність $\{x_K\}$ збігається до x_* швидше будь-якої геометричної прогресії.

Доведення. З алгоритму модифікованого розкладу Холеського випливає [I], що найменше власне число m_K матриці A_K задовольнятиме умову $m_K \geqslant m > 0$ (m залежить від параметра $\bar{m}$), а тому

$$\langle A_K p, p\rangle \geqslant m_K \|p\|^2 \geqslant m \|p\|^2, \quad K = 0,1,2,\ldots, \ p \in E^n.$$

Оскільки $f_i \in C^2$, $i \in \{0\} \cup J$, то $\|L''_{xx}(x,u)\| \leqslant M_1 < \infty$ для всіх $x \in \Omega_0$, при яких $\sum_{i=1}^{l} u^i \leqslant N$. Враховуючи, що норма матриці E_K обмежена, якщо обмежена норма матриці B_K [I], можемо записати

$$\|A_K\| = \|B_K + E_K\| \leqslant \|B_K - L''_{xx}(x_K, u_{K-1})\| +$$
$$+ \|L''_{xx}(x_K, u_{K-1})\| + \|E_K\| \leqslant M_2 h_K + M_1 + M_3 \leqslant M < \infty.$$

Звідси $\langle A_K p, p\rangle \leqslant M\|p\|^2$, $K = 0,1,2,\ldots$, $p \in E^n$.

Тепер виконуються всі умови теореми збіжності для модифікованого методу лінеаризації [2], тому $F_K = F(x_K) \to 0$ і довільна гранична точка послідовності $\{x_K\}$ задовольняє обмеження (2) і необхідні умови екстремуму.

Оскільки x_* – єдина точка, в якій виконуються необхідні умови екстремуму, то

$$x_K \to x_*, u_K \to u_*, p_K \to 0, F_K \to 0 \quad \text{при } K \to \infty. \tag{6}$$

З врахуванням (6) для достатньо великих K [2]

$$J^0_\delta(x_K) = J_*, \ u^i_K > 0, \ i \in J_*, \ u^j_K = 0, \ j \notin J_*. \tag{7}$$

Звідси, а також з умови 5 теореми випливає, що в деякому околі точки x_* матриці $L''_{xx}(x_K, u_{K-1})$ і $B(x_K, u_{K-1}, h_K)$ додатно визначені, а тому $A_K = B_K$. Множину індексів K, для яких виконується ця умова і (7), позначимо через $\mathcal{K}$.

Аналогічно [2] можна показати, що $B(x_K, u_{K-1}, h_K) \to L''_{xx}(x_*, u_*)$ при $K \to \infty$, $K \in K$.

Нехай $C_0 = L''_{xx}(x_*, u_*)$, $p_0(x)$ – розв"язок задачі (3) при $A = C_0$, $u_0(x)$ – відповідні множники Лагранжа. Мають місце співвідношення [2]

$$\rho_0(x) = -(x-x_*) + \omega(x-x_*),$$

$$\|\omega(x-x_*)\| \leqslant \lambda(x)\|x-x_*\|, \quad \lim_{x\to x_*} \lambda(x) = 0, \tag{8}$$

$$\|\rho_K - \rho_0(x_K)\| \leqslant R\|C_0 - A_K\| \cdot \|\rho_0(x_K)\|, \ K \in K, \ R > 0. \tag{9}$$

Покажемо, що послідовність $\{x_K\}$ збігається до x_* із швидкістю щонайменше геометричної прогресії.

З (8) випливає

$$x_{K+1} = x_K + \alpha_K \rho_K = x_K + \rho_0(x_K) + \alpha_K \rho_K - \rho_0(x_K) + \alpha_K \rho_0(x_K) - \alpha_K \rho_0(x_K) =$$

$$= x_* + \omega(x-x_*) + \alpha_K(\rho_K - \rho_0(x_K)) - (1-\alpha_K)\rho_0(x_K).$$

Далі з врахуванням (8) і (9)

$$\|x_{K+1} - x_*\| \leqslant \|\omega(x_K - x_*)\| + \alpha_K\|\rho_K - \rho_0(x_K)\| + (1-\alpha_K)\|\rho_0(x_K)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\omega(x_K - x_*)\| + [\alpha_K R\|C_0 - A_K\| + 1 - \alpha_K] \cdot \|\rho_0(x_K)\| \leqslant$$

$$\leqslant [2 + \alpha_K(R\|C_0 - A_K\| - 1] \|\omega(x_K - x_*)\| + [1 + \alpha_K(R\|C_0 - A_K\| - 1)]\|x_K - x_*\| \leqslant$$

$$\leqslant [R_1\lambda(x_K) + \alpha_K\|C_0 - A_K\| + (1-\alpha_K)] \|x_K - x_*\|.$$

Оскільки $0 < \alpha_K \leqslant 1$ і $\lim_{K\to\infty} \alpha_K \neq 0$ [2], то існує таке число $z > 0$, що $\alpha_K > z$ для всіх K. Враховуючи (6) і (8), легко бачити, що $R_1\lambda(x_K) + \alpha_K\|C_0 - A_K\| \to 0$ при $K \to \infty$, а тому, починаючи з деякого K_0,

$$\|x_{K+1} - x_*\| \leqslant (z + 1 - \alpha_K)\|x_K - x_*\| \leqslant q\|x_K - x_*\|, \tag{10}$$

де $0 < q < 1$.

Покажемо тепер, що існує нескінченна підпослідовність $\{x_{K_j}\}$, $j = 1,2,3,\ldots$, для якої

$$\|x_{K_{j+1}} - x_*\| \leqslant q_{K_j}\|x_{K_j} - x_*\|, \quad \lim_{j\to\infty} q_{K_j} = 0.$$

Нехай $i \in J_*$. Тоді з неперервності функції $f_i(x)$ випливає, що в деякому околі точки x_* необхідно $f_i(x) \leqslant \eta < 0$. Оскільки $x_K \to x_*$, то при достатньо великих K

$$f_i(x_K) \leqslant \eta < 0, \quad i \in J_*. \tag{11}$$

Враховуючи, що $F_K \to 0$ при $K \to \infty$, нескінченну кількість разів $F_{K+1} \leqslant F_K$. Позначимо множину індексів $K \in K$, що задовольняють цю нерівність і (11), через K_0.

Нехай $\kappa \in K_0$. З огляду на необхідні умови екстремуму для задачі (3) наявна [2] рівність

$$< f_0'(x_\kappa), p_\kappa > = \sum_{i\in J_*} u_\kappa^i f_i(x_\kappa) - < p_\kappa , A_\kappa p_\kappa > . \tag{I2}$$

Оцінимо зміну функцій $f_i(x), i \in \{0\} \cup J$ при зсуві з точки x_κ у напрямку p_κ з кроком $\alpha_\kappa = 1$.

Для $i \notin J_*$ наявна нерівність (II).

Для $i \in J_*$, використовуючи формулу Тейлора, отримаємо

$$f_i(x_\kappa + p_\kappa) = f_i(x_\kappa) + < f_i'(x_\kappa), p_\kappa > + \frac{1}{2} < f_i''(\theta_\kappa^i) p_\kappa , p_\kappa > , \tag{I3}$$

де $\theta_\kappa^i = x_\kappa + \xi_i p_\kappa$, $0 \leq \xi_i \leq 1$. Оскільки p_κ є розв"язком задачі (3), то $< f_i'(x_\kappa), p_\kappa > + f_i(x_\kappa) = 0$ для $i \in J_*$. Тому (I3) можна переписати у вигляді

$$f_i(x_\kappa + p_\kappa) = \frac{1}{2} < f_i''(\theta_\kappa^i) p_\kappa , p_\kappa > . \tag{I4}$$

Розкладаючи в ряд Тейлора функцію $f_0(x_\kappa + p_\kappa)$ і використовуючи (I2), аналогічно до попереднього одержуємо

$$f_0(x_\kappa + p_\kappa) = f_0(x_\kappa) + \sum_{i\in J_*} u_\kappa^i f_i(x_\kappa) + \frac{1}{2} < f_0''(\theta_\kappa^0) p_\kappa , p_\kappa > - < p_\kappa , A_\kappa p_\kappa > ,$$

де $\theta_\kappa^0 = x_\kappa + \xi_0 p_\kappa$, $0 \leq \xi_0 \leq 1$.

Звідси і з (I4) випливає, що

$$f_0(x_\kappa + p_\kappa) + \sum_{i\in J_*} u_\kappa^i f_i(x_\kappa + p_\kappa) = f_0(x_\kappa) + \sum_{i\in J_*} u_\kappa^i f_i(x_\kappa) +$$

$$+ \frac{1}{2} < f_0''(\theta_\kappa^0) p_\kappa , p_\kappa > + \frac{1}{2} \sum_{i\in J_*} u_\kappa^i < f_i''(\theta_\kappa^i) p_\kappa , p_\kappa > - < p_\kappa , A_\kappa p_\kappa > .$$

Далі, тому що $\kappa \in K_0$, отримуємо

$$f_0(x_\kappa + p_\kappa) + NF(x_\kappa + p_\kappa) \leq f_0(x_\kappa) + NF(x_\kappa) +$$

$$+ \frac{1}{2} < [f_0''(\theta_\kappa^0) + \sum_{i\in J_*} u_\kappa^i f_i''(\theta_\kappa^i)] p_\kappa , p_\kappa > - < p_\kappa , A_\kappa p_\kappa > .$$

Очевидно, що при $\kappa \to \infty$ $< p_\kappa , A_\kappa p_\kappa > \to < p_\kappa , C_0 p_\kappa >$, $\theta_\kappa^i \to x_*$, $i \in \{0\} \cup J_*$, а також $\frac{1}{2} < [f_0''(\theta_\kappa^0) + \sum_{i\in J_*} u_\kappa^i f_i''(\theta_\kappa^i)] p_\kappa , p_\kappa > \to \frac{1}{2} < C_0 p_\kappa , p_\kappa >$. Тому для достатньо великих $\kappa \in K_0$ нерівність (5) виконується при $\alpha = 1$ і $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Використовуючи цей результат, аналогічно [2] можна показати, що, починаючи з деякого $\kappa_1 \in K_0$,

$$\|x_{k+1}-x_*\| \leq q_k \|x_k - x_*\|,\ q_k \to 0 \text{ при } k\to\infty,\ k\in K_0 . \qquad (15)$$

Об"єднуючи (10) і (15) і враховуючи нескінченність множини K_0, отримуємо, що послідовність $\{x_k\}$ збігається до x_* швидше довільної геометричної прогресії.

Розглянемо тепер деякі обчислювальні аспекти методу. Всі міркування відносно розв"язування задачі квадратичного програмування (3), вибору числа δ і контролю вибору константи N, викладені в праці [2], доцільно враховувати і при практичній реалізації розглянутого алгоритму.

Цільова функція двоїстої задачі для задачі (3) має вигляд

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2}<Cu,u> - <d,u> - \|R^{-1}f_0'(x)\|^2,$$

де $R = LD^{1/2}$ – нижня трикутна матриця; C – симетрична матриця, яка складається з елементів

$$\{C_{ij}\} = \{<R^{-1}f_i'^T(x), R^{-1}f_j'^T(x)>\},\ i,j\in J_\delta(x),$$

а i-та компонента вектора d дорівнює $<R^{-1}f_0'(x), R^{-1}f_i'^T(x)> - f_i(x)$, $i\in J_\delta(x)$. Відзначимо, що оскільки матриці L і D вже побудовані в ході розбиття Холеського, то розрахунок матриці R^{-1} не є складною обчислювальною процедурою.

Основний обсяг пам"яті ЕОМ при реалізації описаного алгоритму йде на збереження $n(n+1)/2$ елементів матриці A (або R^{-1}) і $l(l+1)/2$ елементів матриці C, причому обчислення елементів C_{ij} можна організувати так, що запам"ятовувати вектори $R^{-1}f_i'^T(x)$, $i\in J_\delta(x)$ немає потреби. При цьому кількість обчислень не збільшиться.

Кількість обчислень на одній ітерації описаного алгоритму і методу лінеаризації для сильно випуклих функцій [2] однакова. Проте під час реалізації запропонованої модифікації відсутня можливість робити невдалі кроки [2].

Відзначимо, що для побудови матриці $B(x,u,h)$ достатньо $n(n+3)/2$ звертань до обчислень функцій.

Маючи в наявності LDL^T – розбиття матриці A, можна контролювати її зумовленість [1], а отже керувати чисельною стійкістю методу.

1. Г и л л Ф., М ю р р е й У., Р а й т М. Практическая оптимизация. М., 1985. 2. П ш е н и ч н ы й Б.Н. Метод линеаризации. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.85

УДК 517.946

М.М.Притула, В.М.Цимбал

ОЦІНКА РОЗВ"ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Рівняння другого порядку гіперболічного типу з малим параметром при старшій похідній по часу, що вироджується у параболічне рівняння другого порядку при нульовому значенні параметра, трапляється у багатьох прикладних задачах [1, 3]. Відомі праці, у яких одержана асимптотика по малому параметру розв"язку задачі Коші та змішаної задачі. Однак подекуди, наприклад [5], одержується асимптотика, а питання обгрунтування асимптотичної коректності, тобто оцінки залишкового члена, не береться до уваги.

В області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq l\ ,\ 0\leq t\leq T\}$ розглядається рівняння

$$\varepsilon a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+d(x,t)u=f(x,t,\varepsilon) \tag{1}$$

з початковими

$$u\Big|_{t=0}=0\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \tag{2}$$

і граничними умовами вигляду

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\gamma u(0,t)-\alpha u(l,t)-\varkappa\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}\ ,$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\alpha u(0,t)+\beta u(l,t)+\delta\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}\ , \tag{3}$$

або

$$u(l,t)=\rho u(0,t)\ ,$$