1. Г и л л Ф., М ю р р е й У., Р а й т М. Практическая оптимизация. М., 1985. 2. П ш е н и ч н ы й Б.Н. Метод линеаризации. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.85

УДК 517.946

М.М.Притула, В.М.Цимбал

ОЦІНКА РОЗВ"ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Рівняння другого порядку гіперболічного типу з малим параметром при старшій похідній по часу, що вироджується у параболічне рівняння другого порядку при нульовому значенні параметра, трапляється у багатьох прикладних задачах [1, 3]. Відомі праці, у яких одержана асимптотика по малому параметру розв"язку задачі Коші та змішаної задачі. Однак подекуди, наприклад [5], одержується асимптотика, а питання обгрунтування асимптотичної коректності, тобто оцінки залишкового члена, не береться до уваги.

В області $D=\{(x,t): 0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ розглядається рівняння

$$\varepsilon a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+d(x,t)u=f(x,t,\varepsilon) \tag{1}$$

з початковими

$$u\Big|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \tag{2}$$

і граничними умовами вигляду

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\gamma u(0,t)-\alpha u(l,t)-\varkappa\frac{\partial u(0,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\alpha u(0,t)+\beta u(l,t)+\delta\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}, \tag{3}$$

або

$$u(l,t)=\rho u(0,t),$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+\tau u(0,t)\,.$$

(4)

Асимптотику розв"язку задач (I)-(3) або (I), (2), (4) у багатьох випадках можна легко побудувати і ми на цьому зупинятися не будемо. Наша мета – одержання оцінки розв"язку наведених задач, з якої випливає коректність цих асимптотик.

Вважаємо виконаними умови

I) $a(x,t)\,,d(x,t)\in C^1(D)\,;\,b(x,t)\,,c(x,t)\,,\,f(x,t)\in C(D)$

(зауважимо, що для побудови асимптотики необхідно вимагати більшу гладкість функцій, які входять у (I); вона залежить від порядку асимптотики);

2) $a(x,t)>0\,,\quad b(x,t)>0\,,\ d(x,t)>0$ для $(x,t)\in D$;

3) сталі $\delta\leq 0\,,\quad \varkappa\leq 0\,,$ сталі $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\varrho\,,\tau$ у граничних випадках можуть обертатися у нуль або нескінченість і задовольняють умови

$$\beta\leq 0\,,\quad \gamma\leq 0\,,\quad \alpha^2+\beta\gamma\leq 0\,,$$

причому знаку рівності в одному з цих перших двох співвідношень повинен відповідати знак рівності у третьому, а в умовах (4) нерівності $\varrho\tau\leq 0$.

Теорема. Нехай виконуються умови I-4, тоді розв"язок задачі (I)-(3) або (I), (2), (4) допускає оцінку

$$\sqrt{\iint\limits_D(\varepsilon u_t^2+u_x^2+u)\,dD}\leq C\sqrt{\iint\limits_D f^2\,dD}\ , \tag{5}$$

де константа C не залежить від ε .

Доведення. При доведенні використовуємо метод інтегралів енергії [2,4]. Після домноження (I) на $2\frac{\partial u}{\partial t}$ і елементарних перетворень, одержимо основні співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varepsilon a(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+d(x,t)u^2\right\}-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$

$$+2b(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\varepsilon a_t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-2c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial t}+d_t u^2+2\frac{\partial u}{\partial t}f(x,t)\,.$$

(6)

Позначимо D_τ область $D_\tau=\{(x,t):0\leq x\leq l,\ 0\leq t\leq \tau\}$, де τ – довільне $0\leq\tau\leq T$.

Після інтегрування (6) по D_τ з використанням формули Гауса-Остроградського і початкових умов (2) допишуємо

$$\int_0^l\left[\varepsilon a(x,\tau)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+d(x,\tau)u^2\right]dx-2\int_0^\tau\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=l}dt+$$

$$+2\iint_{D_\tau}b(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dD_\tau=\varepsilon\iint_{D_\tau}a_t(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dD_\tau-$$

$$-2\iint_{D_\tau}c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dD_\tau+\iint_{D_\tau}d_t(x,t)u^2dD_\tau+2\iint_{D_\tau}\frac{\partial u}{\partial t}f\,dD_\tau. \tag{7}$$

Введемо позначення $I=-2\int_0^\tau\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=l}dt$. Міркуючи так само як і в праці [4] і використовуючи граничні умови (3), (4) і припущення 3, неважко переконатися, що $I\geq 0$.

Застосовуючи нерівність Коші з параметром, одержуємо

$$2\iint_{D_\tau}\left|c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right|dD_\tau\leq c\mu\iint_{D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dD_\tau+\frac{c}{\mu}\iint_{D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dD_\tau, \tag{8}$$

$$2\iint_{D_\tau}\left|\frac{\partial u}{\partial t}f\right|dD_\tau\leq\nu\iint_{D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dD_\tau+\frac{1}{\nu}\iint_{D_\tau}f^2dD_\tau, \tag{9}$$

де $C=\max\limits_{(x,t)\in D}|c(x,t)|$, $\mu>0$, $\nu>0$ – параметри, які вибираємо так, що $2B-\nu-c\mu\geq 0$, $B=\min\limits_{(x,t)\in D_\tau}b(x,t)$.

Тоді (7) можна оцінити наступним чином.

$$\int_0^l\left\{\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right)^2+u^2(x,\tau)\right\}dx\leq$$

$$\leq\frac{K}{N}\iint_{D_\tau}\left\{\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u^2\right\}dD_\tau+$$

$$+\frac{1}{\nu N}\iint_D f^2dD, \tag{10}$$

де

$$N=min\left\{1,\min_{(x,t)\in D} a(x,t),\min_{(x,t)\in D} d(x,t)\right\};$$

$$K=max\left\{\max_{(x,t)\in D}|a_t(x,t)|,\max_{(x,t)\in D}|d_t(x,t)|,\frac{c}{\mu}\right\}.$$

Звідси вже легко одержувати потрібну оцінку (5), при цьому необхідно використати лему Гронуолла-Беллмана.

Теорема доведена.

На закінчення відзначимо, що подібні оцінки розв"язків задачі Коші і змішаної задачі одержані у працях [6, 7].

1. З л а м а л М.О. Смешанная задача для гиперболических уравнений с малым параметром // Чехосл. мат. журн. 1960. Т. 10. № 1. С. 83–102. 2. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 3. Л ы к о в А.В. Применение метода термодинамики необратимых процессов к исследованию масс и теплообмена // Инж. физ. журн. 1965. Т. 9. № 3. С. 711–714. 4. С т е к л о в В.А. Основные задачи математической физики. М., 1983. 5. Ф и н к е л ь ш т е й н А.В. Решение гиперболического уравнения теплопроводности методом малого параметра // Инж. физ. журн. 1983. Т. 44. № 5. С. 809–814. 6. Ц и м б а л В.М. Оцінки розв"язку задачі Коші для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1983. Вип. 21. С. 54–59. 7. Ц и м б а л В.М. Застосування методу інтегралів енергії в одній сингулярно збуреній задачі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 24. С. 7–11.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.85