УДК 518:517.946

П.С.Сеньо, В.М.Цимбал

ОЦІНКА РОЗВ"ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

В області $D=\{(x,t): 0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T\}$ розглянемо рівняння

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = f(x,t,\varepsilon) \tag{1}$$

з початковою

$$u\big|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

і граничними умовами вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - \alpha u(0,t) - \beta u(l,t) + p\int_0^t u(l,\tau)\,d\tau = 0, \\ &\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - \gamma u(0,t) + \alpha u(l,t) + q\int_0^t u(0,\tau)\,d\tau = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

або ж

$$\begin{aligned} &u(l,t) = \varrho u(0,t), \\ &\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \varkappa u(0,t), \end{aligned} \tag{4}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Асимптотику розв"язку задачі (1)–(3) або (1), (2), (4) у багатьох випадках можна легко побудувати методом примежового шару [2, 3]. Наша мета – одержання оцінки розв"язків задач, існування класичних розв"язків яких припускаємо, із чого випливає коректність цих асимптотик. Підкреслимо важливість цього етапу побудови асимптотики, хоч він часто відсутній у роботах прикладного характеру.

Вважаємо виконаними такі умови:

1) $a(x,t), b(x,t) \in C^1(D)$; $c(x,t), f(x,t) \in C(D)$

(Відзначимо, що для побудови асимптотики необхідно вимагати більшої гладкості функцій, що входять в (I), яка залежить від порядку асимптотики);

2) $a(x,t)>0 (x,t)\in D$; $b(l,t)\geq 0$, $b(0,t)\leq 0$ $(0<t\leq T)$, зокрема може бути $b(x,t)\equiv 0$, тобто розглядається випадок, коли примежовий шар з"являється в околі обох бічних сторін прямокутника D. Нам невідомі роботи, де б розглядався цей випадок. Звичайно розглядають випадок, коли коефіцієнт $b(x,t)$ зберігає знак у всій області D, що відповідає випадку появи примежового шару в околі одної з бічних сторін прямокутника D; 3) константи $p\geq 0$, $q\leq 0$, константи $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \varkappa$ у граничних випадках можуть перетворюватися в нуль або нескінченність і задовольняють нерівності $\beta\leq 0, \gamma\geq 0, \alpha^2+\beta\gamma\leq 0$, причому знаку рівності в одному з перших двох з цих співвідношень повинен відповідати знак рівності у третьому, а в умовах (4) нерівність $\rho\varkappa\leq 0$. Тоді існує така теорема.

Теорема. Нехай виконуються умови I–3. Тоді для розв"язків задачі (I)-(3) або (I), (2), (4) справедлива оцінка

$$\|u\|_{L_2(D)}\leq C\|f\|_{L_2(D)}, \tag{5}$$

де константа C не залежить від ε.

Доведення. Оцінку (5) доводять методом інтегралів енергії [4, 5]. Після домноження (I) на $2u$ і очевидних перетворень, одержуємо співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a(x,t)u^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,t)u^2-2\varepsilon u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+2\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=$$

$$=(a_t(x,t)+b_x(x,t)-2c(x,t))u^2+2f(x,t,\varepsilon)u. \tag{6}$$

Позначимо через D_τ область $D_\tau=\{(x,t): 0\leq x\leq l,\ 0\leq t\leq \tau\}$, де τ - довільне $0\leq\tau\leq T$. Інтегруючи (6) по D_τ, використовуючи формулу Гауса-Остроградського і початкові умови (2), одержуємо

$$\int_0^l a(x,\tau)u^2dx-2\varepsilon\int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=l}dt +$$

$$+\int_0^\tau [b(l,t)u^2(l,t)-b(0,t)u^2(0,t)]\,dt+2\varepsilon\iint_{D_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dt=$$

$$=\iint_{D_\tau}(a_t(x,t)+b_x(x,t)-2c(x,t))u^2\,dx\,dt+2\iint_{D_\tau} fu\,dx\,dt. \tag{7}$$

Введемо позначення $J=-2\varepsilon\int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=l}dt.$

Далі міркуємо як і в праці [5], використовуючи граничні умови і припущення 3. При цьому слід мати на увазі, що

$$\int_0^\tau [-qu(0,t)\int_0^t u(0,\xi)d\xi+pu(l,t)\int_0^t u(l,\xi)d\xi]\,dt=$$

$$=-\frac{q}{2}\left(\int_0^\tau u(0,\xi)d\xi\right)^2+\frac{p}{2}\left(\int_0^\tau u(l,\xi)d\xi\right)^2.$$

Тоді легко отримуємо $J\geqslant 0$. Нерівність Коші

$$2\iint_{D_\tau}|fu|\,dD_\tau\leqslant\iint_{D_\tau}u^2\,dD_\tau+\iint_{D_\tau}f^2\,dD_\tau. \tag{8}$$

З огляду на припущення 3 третій доданок в (7) невід"ємний. Тоді з (7) остаточно записуємо

$$\int_0^l u^2(x,\tau)\,dx\leqslant\frac{K}{N}\iint_{D_\tau}u^2\,dD_\tau+\frac{1}{N}\iint_D f^2\,dD,$$

$$K=\max_D|a_t(x,t)+b_x(x,t)-2c(x,t)+1|;\ N=\min_D a(x,t). \tag{9}$$

Застосування леми Гронуолла-Беллмана до (9) дає потрібну оцінку (5).

Теорема доведена.

1. Б о м б а А.Я. Асимптотический метод решения задач массопереноса растворимых веществ при плановой фильтрации подземных вод: Автореф. дис. ..., канд. физ.-мат. наук. К., 1984. 2. В а с и л ь е в а А.Б., Б у т у з о в В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. 3. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и ограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Усп. мат. наук. 1957. № 5. С. 3-122. 4. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 5. С т е к л о в В.А. Основные задачи математической физики. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 18.12.85