УДК 517.946

М.М.Притула, Т.М.Грица

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Розглянемо коливну систему, яка описується квазілінійним диференціальним рівнянням з випадковим відхиленням аргументу вигляду

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+k_1x(t)+k_2x\left(t-\Delta_0-\sqrt{\varepsilon}\mu\dot{\xi}(t)\right)=\varepsilon\left[1-\beta x^2(t)\right]\frac{dx(t-\Delta_0-\sqrt{\varepsilon}\mu\dot{\xi}(t))}{dt} \qquad (1)$$

при додатковій умові

$$\Delta\frac{dx}{dt}\Big|_{x=x_0}=\frac{dx(\bar{t}+0)}{dt}-\frac{dx(\bar{t}-0)}{dt}\Big|_{x(\bar{t})=x_0}=\varepsilon\frac{\alpha}{x(t)\frac{dx(\bar{t}-0)}{dt}}\Big|_{x(\bar{t})=x_0}, \qquad (2)$$

де k_1, k_2 – деякі постійні параметри системи, $\varepsilon>0$ – малий параметр; α ; β , μ – деякі постійні величини; $\Delta_0+\sqrt{\varepsilon}\mu\dot{\xi}(t)$ – випадкове відхилення по часу в системі; $\dot{\xi}(t)$ – процес "білого шуму" ($M\dot{\xi}(t)=0$, $M\dot{\xi}(t)\dot{\xi}(t+\tau)=\delta(\tau)$); M – оператор математичного сподівання; $\delta(\tau)$ – дельта-функція Дірака.

Рівняння (1) – це рівняння типу Ван-дер-Поля з випадковим запізненням зворотного зв"язку та відновлювальної сили. При деякій схематизації воно описує динамічні процеси в автогенераторах електричних коливань [1]. Коливання в системі збуджується імпульсами вигляду (2).

Для дослідження коливних процесів в системі (1), (2) використовують асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського [1] і апарат теорії марковських процесів [2].

Як випливає з праці [3], періодичний рух в системі з частотою $\omega=2\pi/\Delta_0=\sqrt{k_1+k_2}$ можливий при виконанні умов

$$k_1+k_2>0\ ,\ \Delta_0=2\pi/\sqrt{k_1+k_2}\ .$$

Використовуючи формалізм узагальнених функцій, систему (1), (2) запишемо у зручному для дослідження вигляді

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+k_1x(t)+k_2x(t-\Delta_0-\sqrt{\varepsilon}\mu\dot{\xi}(t))=\varepsilon\left\{\left[1-\beta x^2(t)\right]\times\right.$$

$$\times \frac{dx(t-\Delta_0-\sqrt{\varepsilon}\mu\dot{\xi}(t))}{dt} + \frac{\alpha}{x_0 \frac{dx(t)}{dt}} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| \delta(x-x_0) \Big\} . \tag{3}$$

Розв"язок рівняння (3) шукаємо у вигляді

$$x(t) = a(t)\cos(\omega t + \theta(t)) ,$$

де $a(t)$, $\theta(t)$ – амплітуда і фаза коливань; ω – частота коливань. Функції $a(t)$, $\theta(t)$ повинні задовольняти рівняння

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a) , \quad \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B(a) . \tag{4}$$

Конкретний вигляд функцій $A(a)$ і $B(a)$ знайдено в праці [3]. Для знаходження амплітуди та фази коливань системи (3) отримаємо наступну систему стохастичних диференціальних рівнянь:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \frac{a\omega}{4\omega^2 + 4\omega\Delta_0 k_2 \sin\omega\Delta_0 + k_2^2\Delta_0^2} \Big[\Big(-\frac{1}{2}\omega\beta\cos\omega\Delta_0 + \frac{1}{4}k_2\Delta_0 \sin 2\omega\Delta_0 \Big) a^2 +$$

$$+ 2\omega\cos\omega\Delta_0 + \frac{2\alpha}{\pi a^2 x_0}\Big(2 + \frac{k_2\Delta_0}{\omega}\sin\omega\Delta_0\Big) + \frac{2\mu\omega k_2}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\omega\Delta_0 \dot{\xi}(t) \Big] ,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon \frac{\omega}{4\omega^2 + 4\omega\Delta_0 k_2 \sin\omega\Delta_0 + k_2^2\Delta_0^2} \Big[\Big(\frac{3}{2}\omega\beta\sin\omega\Delta_0 + \frac{1}{4}k_2\Delta_0\beta +$$

$$+ \frac{1}{2}k_2\Delta_0\beta\sin^2\omega\Delta_0 \Big) a^2 - 2(\omega\sin\omega\Delta_0 + k_2\Delta_0) - \frac{2\alpha k_2\Delta_0}{\pi a^2 \omega x_0}\cos\omega\Delta_0 -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mu\Big(2\omega k_2\sin\omega\Delta_0 - k_2^2\Delta_0^2\Big)\dot{\xi}(t) \Big] . \tag{5}$$

Розв"язком системи стохастичних диференціальних рівнянь К.Іто (5) є двомірний марковський дифузійний процес $\{a(t), \theta(t)\}$ [2,3]. Нас головним чином цікавитиме перше рівняння системи. Для знаходження стаціонарної густини розподілу ймовірностей амплітуди використовують аналітичний метод рівняння Колмогорова-Фоккера-Планка [3].

Визначивши з першого рівняння системи (5) коефіцієнти спрацювання та дифузії амплітуди, підставивши їх в рівняння Колмогорова-Фоккера-Планка і проінтегрувавши це диференціальне рівняння, отримаємо функцію стаціонарної густини $W_{CT}(a)$ розподілу амплітуди в аналітичному вигляді:

$$W_{CT}(a) = C a^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_4^2}-2} e^{\frac{\gamma_1}{\gamma_4^2}a^2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_4^2 a^2}}, \tag{6}$$

де

$$\gamma_1 = \frac{-\frac{1}{2}\cos^2\beta\cos\omega\Delta_0 + \frac{1}{4}k_2\Delta_0\beta\sin 2\omega\Delta_0}{4\omega^2 + 4\omega\Delta_0 k_2\sin\omega\Delta_0 + k_2^2\Delta_0^2};$$

$$\gamma_2 = \frac{2\omega^2\cos\omega\Delta_0}{4\omega^2 + 4\omega\Delta_0 k_2\sin\omega\Delta_0 + k_2^2\Delta_0^2};$$

$$\gamma_3 = \frac{4\alpha\omega + 2\alpha k_2\Delta_0\sin\omega\Delta_0}{\pi x_0(4\omega^2 + 4\omega\Delta_0 k_2\sin\omega\Delta_0) + k_2^2\Delta_0^2};$$

$$\gamma_4 = \frac{2\mu\omega^2 k_2\cos\omega\Delta_0}{4\omega^2 + 4\omega\Delta_0 k_2\sin\omega\Delta_0 + k_2^2\Delta_0^2}.$$

Константу інтегрування C знаходимо з умови нормування $W_{CT}(a)$.

Функція (6) має єдиний максимум у точці

$$a_0 = \left[\frac{\gamma_4^2 - \gamma_2 - \sqrt{(\gamma_4^2-\gamma_2)^2 - 4\gamma_1\gamma_3}}{2\gamma_1}\right]^{1/2} \tag{7}$$

при виконанні певних умов [3]. Таким чином, в системі (I), (2) можливі стійкі стаціонарні коливання з амплітудою (7).

Для чисельного розв"язку на проміжку часу $[t_0, t]$ першого стохастичного диференціального рівняння системи (5), яке має вигляд

$$\frac{da}{dt} = F(a) + G(a)\dot{\xi}(t),$$

використовують метод Рунге-Кутта четвертого порядку [4]. Тоді рекурентне рівняння для амплітуди

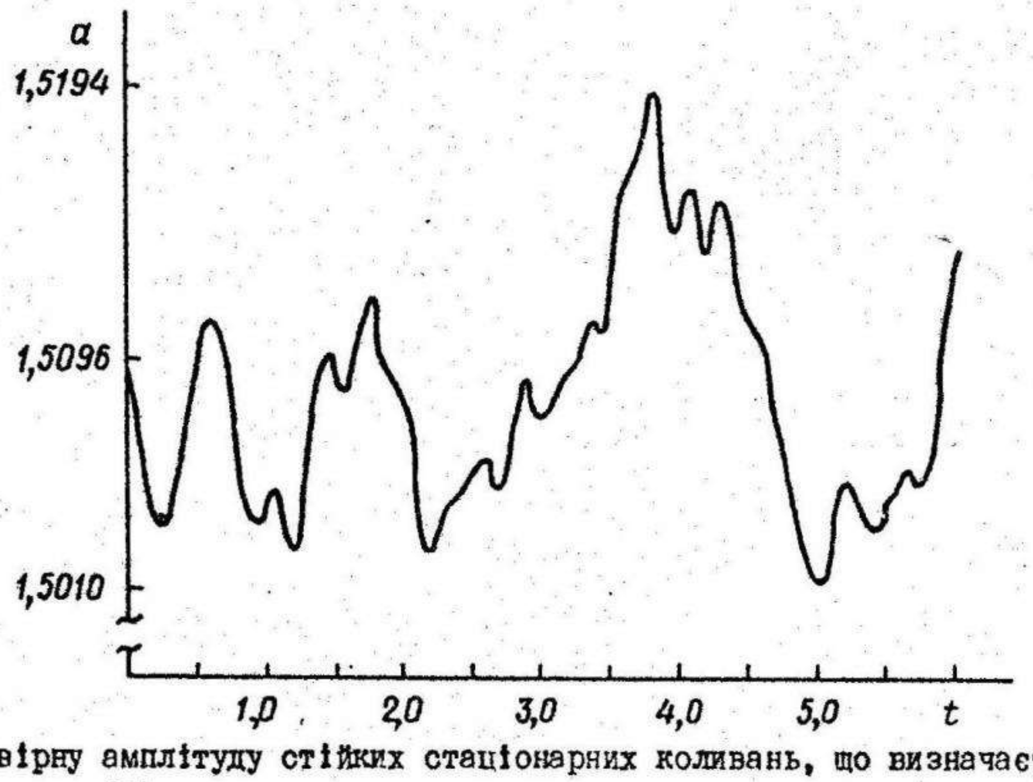
$$a_{i+1} = a_i + \frac{1}{6}(d_1 + 2d_2 + 2d_3 + d_4) + G(a_i)\Delta\xi_i(t) \qquad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{8}$$

де N – число точок розбиття відрізка $[t_0, t]$; $h = \dfrac{t-t_0}{N}$ – крок розбиття:

$$d_1 = F(a_i)h\,; \qquad d_3 = F(a_i + \frac{d_2}{2})h\,;$$

$$d_2 = F(a_i + \frac{d_1}{2})h\,; \qquad d_4 = F(a_i + d_3)h\,;$$

$\Delta\xi_i$ – прирости процесу Вінера $\xi(t)$. Математичне сподівання приростів $M\Delta\xi_i = 0$, а дисперсія приростів визначається виразом $D\Delta\xi_i = S_0 h$, S_0 – спектральна густина віннеровського процесу $\xi(t)$. Значення $\Delta\xi_i$ і $\Delta\xi_j$ незалежні при $i \neq j$, закон розподілу випадкових чисел $\Delta\xi_i$ нормальний. За початкове наближення амплітуди a_0 в схемі (8) природньо взяти найбільш



ймовірну амплітуду стійких стаціонарних коливань, що визначається формулою (7).

Для реалізації обчислювальної схеми (8) на проміжку часу $[0{,}6]$ з кроком $h = 0{,}1$ написана програма на мові $PL/1$. Параметрам надані числові значення, які трапляються в практиці:

$\varepsilon = 0{,}001$; $k_1 = 13{,}86$; $k_2 = 1{,}0$; $\Delta_0 = 1{,}6$; $x_0 = 1{,}0$; $\alpha = 0{,}7$; $\mu = 1{,}0$.

Наведемо результати обчислень на ЕОМ:

t	$a(t)$	t	$a(t)$
0,0	I,5096	3,5	I,5I55
0,5	I,5II4	4,0	I,5I62
I,0	I,5063	4,5	I,5II8
I,5	I,5075	5,0	I,50I0
2,0	I,5069	5,5	I,5049
2,5	I,5060	6,0	I,5I30
3,0	I,507I		

Найбільш ймовірна амплітуда стійких стаціонарних коливань a_0 = I,5096.

Залежність амплітуди від часу, що одержана в результаті обробки масиву значень амплітуди, показана на рисунку. З рисунка видно, що амплітуда коливань флуктуює з часом близько найбільш ймовірного значення амплітуди стаціонарного режиму.

I. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., I974. 2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., I968. 3. Коломиец В.Г., Притула Н.Н., Грица Т.М. Случайные колебания в квазилинейных системах со случайными отклонениями аргумента и импульсным воздействием // Приближенные методы анализа нелинейных колебаний. I984. С. 44-54. 4. Никитин Н.Н., Первачев С.В., Разевич В.Д. О решении на ЦВМ стохастических дифференциальных следящих систем // Автоматика и телемеханика. I975. № 4. С. I33-I37.

Стаття надійшла до редколегії I7.I2.85