УДК 518:517.9

М.В.Жук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+z(x,y)u=f(x,y) \tag{1}$$

при однорідній крайовій умові

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma}=\left[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x)+q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,y)\right]_{\Gamma}=0\ , \tag{2}$$

де Γ – межа області D, обмеженої по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x)<h(x)$; ν – зовнішня нормаль до Г.

Відносно заданих функцій припускаємо, що $f(x,y)$ належить дійсному простору $H=L_2(D)$ з нормою $\|f\|^2=\iint\limits_D f^2(x,y)\,dx\,dy$; функції $p(x,y)$, $q(x,y)$, $z(x,y)$ додатні обмежені, тобто

$$0<\alpha_1\le p(x,y)\le\beta_1\,,\ 0<\alpha_2\le q(x,y)\le\beta_2\,,\ 0<\alpha_3\le z(x,y)\le\beta_3\,.$$

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x,y)$ в області $\bar{D}$, що задовольняють крайові умови (2).

Введемо оператор T, який визначається формулами

$$Tu=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u\ , \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,y)\right]_{\Gamma}=0\,. \tag{4}$$

За область $D(T)$ оператора T приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x,y)$ в $\bar{D}$, що задовольняють крайову умову (4). При цьому оператор T на $D(T)$ додатно визначений. Дійсно, для симетричного оператора T при довільному $u\in D(T)$ маємо

$$(Tu,u)=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u^2\right]dx\,dy\ge\|u\|^2. \tag{5}$$

Позначимо через $H_T\subset H$ енергетичний простір оператора T, тобто замикання множини $D(T)$ в метриці

$$[u,v]=(Tu,v)=\iint\limits_D\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+uv\right]dxdy\,,\ |u|^2=[u,u]\ .$$

З нерівності (5) у результаті граничного переходу для довільного $u\in H_T$ отримуємо

$$\|u\|\leq|u|\ . \tag{6}$$

Відзначимо, що при цьому $H_T=W_2^1(D)$.

Для довільних елементів $u,v\in H_T$ формально введемо білінійну форму

$$L(u,v)=\iint\limits_D\left[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+r(x,y)uv\right]dxdy\ . \tag{7}$$

Для довільного u з H_T виконуються нерівності

$$\mu|u|^2\leq L(u,u)\leq\eta|u|^2, \tag{8}$$

де $\mu=min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$; $\eta=max\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$.

Узагальненим розв"язком задачі (I)-(2) називається функція $u(x,y)$ з H_T, для якої виконується тотожність

$$L(u,v)\equiv\iint\limits_D\left[p\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+q\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+ruv\right]dxdy=\iint\limits_D f\,v\,dxdy \tag{9}$$

при довільній $v(x,y)$ з H_T, що при зроблених припущеннях існує і единий [1].

До задачі (I)-(2) застосуємо метод Канторовича, згідно з яким наближений розв"язок шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}c_k(x)\varphi_k(x,y), \tag{10}$$

де лінійно незалежні у проміжку $[g(x),\ h(x)]$ функції $\varphi_k(x,y)$ вибираємо таким чином, щоб система функцій $\{X_e(x)\varphi_k(x,y)\}\in H_T$ була повною системою лінійно незалежних функцій у H_T.

Невідомі коефіцієнти $C_k(x)$ визначаємо з системи

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)}(Lu_n-f)\varphi_i\,dy+\varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\partial u_n}{\partial v}\Big|_{y=g(x)}+\varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\partial u_n}{\partial v}\Big|_{y=h(x)}=0 \tag{11}$$

при умовах

$$\int\limits_{g(a)}^{h(a)}\frac{\partial u_n}{\partial v}\varphi_i\Big|_{x=a}dy=0,\ \int\limits_{g(b)}^{h(b)}\frac{\partial u_n}{\partial v}\varphi_i\Big|_{x=b}dy=0,\ i=1,2,\ldots,n. \tag{12}$$

Введемо поняття узагальненого розв"язку для системи методу Канторовича (II)-(I2). Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду $v_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\varphi_k(x,y)$. Нехай для деякої функції $u_n(x,y) \in H_n \cap H_T$ справедлива тотожність

$$L(u_n,v_n) \equiv \iint_D \left[p\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial v_n}{\partial x}+q\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial v_n}{\partial y}+zu_n v_n\right]dxdy-\iint_D f v_n\,dxdy \tag{I3}$$

при довільній функції $v_n(x,y) \in H_n \cap H_T$. Тоді функція $u_n(x,y)$ називається узагальненим розв"язком системи (II)-(I2).

Аналогічно, як і в праці [2], доводиться наступна теорема.

Теорема. Якщо обмеження на вихідні дані задачі (I)-(2) такі, що виконується співвідношення (8), то для довільної функції $f(x,y) \in H$ задача (I)-(2) має єдиний узагальнений розв"язок $u(x,y) \in H$, при довільному n системи методу Канторовича (II)-(I2) має єдиний узагальнений розв"язок $u_n(x,y) \in H_n \cap H_T$, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$|u-u_n| \leq C|u-v_n|, \tag{I4}$$

де $C=\sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$, а елемент $v_n \in H_n \cap H_T$ реалізує мінімум функціонала $|u-v_n|$.

Зауважимо, що повною лінійно незалежною системою функцій $\{\chi_e(x)\varphi_k(x,y)\}$ в H_T буде, наприклад, система $x^e y^k$, $l,k=0,1,2,\ldots$ Таким чином, розв"язок можна шукати у вигляді $u_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n} c_k(x)y^k$.

I. В а р г а Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в гильбертовом пространстве. М., I974. 2. Л у ч к а А.Ю., Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., I975. С. 84-98.

Стаття надійшла до редколегії I5.02.86