УДК 519.21

І.Д.Квіт

ЕМПІРИЧНИЙ І ГІПОТЕТИЧНИЙ ЗРІЗАНІ ВАРІАЦІЙНІ РЯДИ

Розглянемо незалежні напрацювання n однотипних пристроїв, K з яких працювали до відмови F, а решта $n-K$ зупинені S, хоч і могли ще працювати. Треба перевірити гіпотезу про те, що дана вибірка напрацювань взята з популяції, яка має абсолютно неперервну функцію розподілу ймовірностей $F(t)$.

Варіаційний ряд даної зрізаної вибірки напрацювань запишемо у вигляді

$$t(\bar{1},n) \leqslant \ldots \leqslant t(\bar{j},n) \leqslant \ldots \leqslant t(\bar{n},n), \tag{1}$$

де j - те за величиною $t(j,n)$ позначає напрацювання до відмови F або зупинки S. Якщо $t(\bar{j},n)$ позначає напрацювання до відмови F, то $\bar{j}$ виражає середній ранг цієї відмови. Метод обчислення сподіваних рангів відмов у зрізаному емпіричному варіаційному ряді описано, наприклад, у праці [1]. Надалі в ряді /1/ нас цікавитимуть лише $t(\bar{j},n)$, що відповідають K напрацюванням до відмови.

За означенням медіаною статистики $t(\bar{j},n)$ називається число $t(\bar{j},n;0{,}5)$, що задовольняє співвідношення

$$P\{t(\bar{j},n) \leqslant t(\bar{j},n;0{,}5)\} = 0{,}5 .$$

Але відомо [2], що коли наша гіпотеза про напрацювання до відмови істинна, то

$$F(t(\bar{j},n;0{,}5)) = \frac{\bar{j}}{\bar{j}+(n+1-\bar{j})F_{0{,}5}(2(n+1-\bar{j}),2\bar{j})} \approx \frac{\bar{j}-0{,}3}{n+0{,}4}, \tag{2}$$

де $F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$ - процентні точки розподілу Фішера зі ступенями вільності (ν_1,ν_2), як правило, дробовими. Співвідношення (2) визначає медіану $t(\bar{j},n;0{,}5)$ статистики $t(\bar{j},n)$. Звідси

$$P\{t(\bar{j},n) < t(\bar{j},n;0{,}5)\} = P\{t(\bar{j},n) > t(\bar{j},n;0{,}5)\} = 0{,}5 .$$

Тому за статистику критерію перевірки гіпотези приймаємо число $\varkappa(+)$ додатних різниць $t(\bar{j},n)-t(\bar{j},n;0{,}5)$.

Статистика $\varkappa(+)$ має біноміний розподіл

$$P\{\varkappa(+) = i\} = \frac{C_K^i}{2^K}, \quad (i = 0,1,\ldots,K).$$

На основі цього розподілу, при заданому рівні значущості α, визначаємо область прийому гіпотези (m, M), де m – найбільше, а M – найменше з чисел, що задовольняють нерівність

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{C_K^i}{2^K} \leqslant \frac{\alpha}{2}, \quad \sum_{i=M+1}^{K} \frac{C_K^i}{2^K} \leqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

Наприклад, при $\alpha = 0{,}05$ для різних K маємо:

K	m	M	K	m	M	K	m	M
5	0	5	9	2	7	I3	3	I0
6	I	5	I0	2	8	I4	3	II
7	I	6	II	2	9	I5	4	II
8	I	7	I2	3	9	I6	4	I2

При $K \geqslant 16$ суми в нерівностях (3) досить добре наближаються за допомогою інтегральної асимптотики Муавра-Лапласа. Звідси при $\alpha = 0{,}05$ $m = \left[\frac{K}{2} - 0{,}98\sqrt{K}\right]$, $M = \left\{\frac{K}{2} + 0{,}98\sqrt{K}\right\}$,

де $[x]$ позначає цілу частину числа x, а $\{x\}$ – число з доповненням до найближчого цілого. Наприклад, при $K = 16$

$$m = [8 - 3{,}92] = 4, \qquad M = \{8 + 3{,}92\} = 12.$$

Зазначимо, що при $\alpha = 0{,}05$ і $K \leqslant 5$ область прийому гіпотези збігається з областю всіх значень статистики $\mathcal{H}(+)$; критерій знаків не може відкинути ніякої гіпотези (навіть якщо вона хибна). Тому при $\alpha = 0{,}05$ критерій знаків тим гнучкіший, чим K більше від шістьох.

Якщо емпіричне значення статистики $\mathcal{H}(+)$ потрапляє зовні області прийому гіпотези (m, M), то гіпотезу відхиляємо.

Зауважимо, що при $K = n$ варіаційний ряд (I) стає повним рядом порядкових статистик $t(j, n)$, $(j = 1, \ldots, n)$.

Приклад I. Дано емпіричний варіаційний ряд незалежних напрацювань до відмов повної вибірки обсягу I6 у відповідних одиницях:

0,045	0,I00	0,I85	0,250	0,340	0,430
0,500	0,600	0,880	0,890	I,000	I,I00
I,200	I,300	2,I00	3,200		

Слід перевірити гіпотезу про те, що популяція, з якої взято вибірку, має функцію розподілу $F(t) = 1 - e^{-t^2}$, $t > 0$.

За формулою (2) знаходимо гіпотетичний варіаційний ряд:

0,209	0,33I	0,424	0,506	0,58I	0,653
0,725	0,796	0,870	0,946	I,028	I,II8
I,220	I,343	I,506	I,776		

Число додатних різниць відповідних елементів емпіричного та гіпотетичного варіаційних рядів $\mathcal{H}(+) = 3$. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ і $K = n$ = I6 область прийому гіпотези $(m, M) = (4,\ I2)$. Отже, гіпотезу відхиляємо.

Перевіримо тепер гіпотезу про те, що вибірку взято з популяції керованої функцією розподілу $F(t) = 1 - e^{-t},\ t > 0$.

За формулою (2) знаходимо новий гіпотетичний варіаційний ряд:

0,044	0,I09	0,I80	0,256	0,338	0,427
0,525	0,634	0,756	0,895	I,057	I,250
I,489	I,804	2,267	3,I54		

Тепер $\mathcal{H}(+)$ = 6. Гіпотезу приймаємо.

<u>Приклад 2</u>. На основі багатократно зрізаної вибірки незалежних напрацювань до відмови F і зупинки S дано багатократно зрізаний емпіричний варіаційний ряд у відповідних одиницях:

0,I00 S	0,I30 F	0,I50 S	0,I60 S	0,I90 F
0,200 S	0,220 S	0,240 F	0,320 F	0,340 F
0,420 F	0,430 S	0,450 S	0,460 F	0,480 F
0,560 F	0,570 F	0,620 F	0,660 F	0,700 S
0,800 F	0,8I0 F	0,930 F	0,950 S	I,0I0 F

Тут n = 25, K = I6. Слід перевірити гіпотезу про те, що популяція, з якої взято зрізану вибірку, має функцію розподілу $F(t) = 1 - e^{-2t^2},\ t > 0$.

Сподівані ранги відмов такі:

I,04	2,I74545	3,428516	4,682487	5,936458	7,I90430
8,6373I9	I0,08420	II,53I09	I2,97798	I4,42487	I5,87I76
I7,55980	I9,24784	20,93588	23,46794		

За формулою (2) знаходимо зрізаний гіпотетичний варіаційний ряд:

0,I22	0,I96	0,256	0,308	0,354	0,398
0,446	0,493	0,540	0,588	0,637	0,689
0,754	0,828	0,9I5	I,I03		

Число додатних різниць відповідних елементів емпіричного та гіпотетичного зрізаних варіаційних рядів $\mathcal{H}(+)$ = 7. Отже, гіпотезу приймаємо.

1. К в і т І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності". Львів, 1982. 2. К в і т І.Д. Довірчі інтервали для порядкових статистик // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 23. С. 94-98.

Стаття надійшла до редколегії 28.10.85

УДК 519.21

І.Д.Квіт, Є.В.Москвяк

ПОРІВНЯННЯ ДВОХ ЗРІЗАНИХ ВИБІРОК

Розглянемо дві незалежні вибірки (x) та (y) незалежних напрацювань до відмови F або зупинки S з абсолютно неперервних популяцій. Потрібно перевірити гіпотезу про те, що вибірки однорідні, тобто популяції, з яких взято вибірки, однаково абсолютно неперервно розподілені.

Упорядкуємо за значенням елементи кожної вибірки від найменшого напрацювання до найбільшого, вказуючи сподівані ранги відмов. Метод обчислення сподіваних рангів відмов у зрізаній вибірці описано, наприклад, у праці [1]. Сподівані ранги напрацювань до відмови у зрізаній вибірці, як правило, дробові. Ранг найбільшого напрацювання до відмови в упорядкованій вибірці, збільшений до найближчого цілого числа, назвемо обсягом варіаційного ряду. Позначимо через m і n відповідно обсяги варіаційних рядів для вибірок (x) та (y). За допомогою інтерполяції та екстраполяції запишемо два нові варіаційні ряди $(\tilde{x})$ та $(\tilde{y})$ з елементами, відповідними рангам від 1 до m для вибірки (x), і від 1 до n для вибірки (y). Тепер можемо застосувати один з довільних критеріїв порівняння двох повних незалежних вибірок.

На основі двох одержаних варіаційних рядів $(\tilde{x})$ та $(\tilde{y})$ запишемо один спільний варіаційний ряд обсягу $m+n$. Якщо гіпотеза однорідності вибірок істинна, то на кожному відрізку спільного варіаційного ряду зі заданою пропорцією $\tilde{x}$ повинна трапитися в середньому така ж пропорція $\tilde{y}$. Якщо ж на якомусь відрізку спільного варіаційного ряду пропорція $\tilde{x}$ значно більша, або значно менша, ніж пропорція $\tilde{y}$, то це свідчить проти гіпотези. Тому за статистику критерію перевірки гіпотези приймаємо число $W(\tilde{y}/\tilde{x})$ інверсій $\tilde{y}$ відносно $\tilde{x}$ у спільному