УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(y)b(x) + c(x), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

у припущенні, що функції $a(x)$, $b(x)$, $f(y)$ неперервні, а $f(y)$, крім того, задовольняє умову Ліпшица в деякій області D площини (x, y), що містить в середині точку (x_0, y_0). При цих припущеннях задача Коші (1)-(2) має единий неперервно-диференційовний в D розв"язок [5].

Аналітичний розв"язок задачі (1)-(2) - задача важка навіть у випадку рівняння Рікатті, коли $f(y)=y^2$, $a(x)$ та $b(x)$ довільні функції [5]. Найпростішою лінеаризацією, яка використовується для наближеного розв"язку задачі (1)-(2), є нехтування нелінійними членами*. Це виправдовується здебільшого, коли $f(y)$ - безмежно мала величина більш високого порядку порівняно з y. Проте така лінеаризація досить груба, оскільки отримувані при цьому наближені розв"язки можуть дуже швидко віддалятись від точних при віддаленні від початкової точки (x_0, y_0).

Запропонований нижче модифікований метод еквівалентної лінеаризації розв"язку задачі Коші (1)-(2) аналогічний методу статистичної лінеаризації [3] і полягає в заміні функції $f(y)$ у рівнянні (1) на лінійну функцію ky, де стала k визначається з формули

$$k^2 = 4\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^\infty f^2(y) e^{-\alpha y^2} dy; \tag{3}$$

Тут α - поки що довільна додатна стала (у методі статистичної лінеаризації α пов"язується з дисперсією випадкового вихідного процесу і визначається із статистичних міркувань [3]).

За наближений розв"язок $\tilde{y}(x)$ задачі (1)-(2) виберемо розв"язок такої лінійної задачі Коші

---

* Виклад інших методів лінеаризації наведений у працях [2, 6].

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} + a(x)\tilde{y} = \kappa b(x)\tilde{y} + c(x), \tag{4}$$

$$\tilde{y}(x_0) = y_0 , \tag{5}$$

де знак сталої κ зумовлений наближеною рівністю $f(y) \approx \kappa y$. Цей наближений розв"язок можна безпосередньо записати за добре відомою формулою [5]. Фігуруючу у (3) сталу α слід визначати з такої додаткової умови:

$$\left.\frac{d\tilde{y}}{dx}\right|_{x=x_0} = f(y_0)b(x_0) - a(x_0)y_0 + c(x_0), \tag{6}$$

що випливає з рівності похідних розв"язків задач (I)-(2) та (4)-(5), коли $x = x_0$. При такому визначенні сталої α (а разом з нею і κ) для гладких функцій $a(x)$, $b(x)$, $f(y)$ можна стверджувати існування наступної рівномірної оцінки

$$\max_{|x-x_0|\leq h} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq Ah^2,$$

де A - деяка додатна стала; $y(x)$ - точний розв"язок задачі (I)-(2).

З формул (3)-(6) випливає, що рівняння (6) для визначення сталої A є, взагалі кажучи, нелінійним. Тому з можливих розв"язків цього рівняння необхідно вибрати такий, що є додатним та задовольняє умови збіжності фігуруючих у (3) інтегралів. Остання умова істотна, оскільки розв"язки нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку можуть експоненціально зростати [1]. Для функцій обмеженого росту формула (3) дає змогу через наявність під знаком інтегралу швидко спадної експоненти визначити еквівалентність функцій $f(y)$ та κy при малих значеннях y.

Фігуруючий у(3) інтеграл легко обчислити для досить широкого набору функцій $f(y)$ [4, 7], тому запропонований метод можна ефективно реалізувати на практиці.

Для того, щоб визначити точніше наближений розв"язок вихідної задачі (I)-(2), можна розглядати розв"язки лінеаризованої задачі (4)-(5) як нульове наближення у методі Пікара послідовних наближень [5]. Конкретні приклади показують більш швидку (порівняно з використанням класичної лінеаризації $f(y) = 0$ або $f(y) = const$ для визначення нульового наближення) збіжність процесу послідовних наближень у цьому випадку.

На закінчення відзначимо, що модифікований метод еквівалентної лінеаризації може бути поширений без істотних труднощів і на задачу Коші для системи рівнянь першого порядку

$$\frac{dy_i}{dx}+\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)y_k=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(x)f_k(y_k)+c_i(x),$$

а також на нелінійні рівняння другого порядку виду

$$y''+f(y')+g(y)=h(x).$$

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954. 2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1958. 3. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., 1971. 4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962. 5. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. К., 1984. 6. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1969. 7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.

Стаття надійшла до редколегії 26.09.85

УДК 517.949:517.956

А.М.Кузик

ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ЛОКАЛЬНО-ОДНОВИМІРНОЇ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ У ВИПАДКУ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ

Одним з найбільш ефективних методів побудови економічних різницевих схем є метод сумарної апроксимації (МСА). Він дає змогу будувати різницеві локально-одновимірні схеми (ЛОС) для нестаціонарних задач математичної фізики у випадку довільної області n - вимірного простору [4]. У працях [2,3] досліджена збіжність адитивних моделей і різницевих ЛОС МСА при мінімальних вимогах на гладкість розв"язку вихідної диференціальної задачі. Одержимо оцінку швидкості збіжності для однієї різницевої