КАПРИ-I // Надежность и качество программного обеспечения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Львов, 27-29 января 1985 г. С.9-11. 2. Архангельский Б.В., Черняховский В.В. КАШКАН-ФОРТРАН-система отладки программ методом поиска конкретных ошибок // Программирование. 1984. № 6. С. 30-40. 3. Дзержинский Ф.Я. ПСЕВДОКОД (язык проектирования программ и правила структурного программирования). М., 1979.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.86

УДК 519.34:532.516

В.М.Зубов, Г.А.Шинкаренко

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ ДЛЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З РІВНЯННЯМИ НАВ"Є-СТОКСА

Узагальнимо оцінки збіжності методу регуляризації для задачі Стокса, отриманні у праці [1], на випадок стаціонарних рівнянь Нав"є-Стокса.

1. Розглянемо крайову задачу для системи рівнянь Нав"є-Стокса в обмеженій області $\Omega \in R^n$ (n = 2 або 3) з кусково-неперервною границею Γ :

$$\rho(\bar{u}\bar{\nabla})\bar{u}-\mu\Delta\bar{u}+grad\, p=\rho\bar{f} \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

$$div\,\bar{u}=0 \quad \text{в } \Omega, \tag{2}$$

$$\bar{u}=0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{3}$$

Ця задача, як відомо, описує в області Ω рух в"язкої нестисливої рідини з постійними в"язкістю $\mu>0$ і густиною $\rho>0$ під дією масових сил, заданих вектором $\bar{f}=(f_1,\dots,f_n)$. Треба знайти вектор швидкостей рідини $\bar{u}=(u_1,\dots,u_n)$, а також тиск p , які б задовольняли рівняння руху (1), умову нестисливості (2) і однорідну крайову умову Діріхле (3).

2. У варіаційній постановці задача (1)-(3) має наступний вигляд [3]:

$$a(\bar{u},\bar{v})-b(p,\bar{v})+a_1(\bar{u},\bar{u},\bar{v})=\langle\bar{f},\bar{v}\rangle \quad \forall\,\bar{v}\in V, \tag{4}$$

$$b(q,\bar{u})=0 \qquad \forall\, q\in Q, \tag{5}$$

де $$a(\bar{u},\bar{v})=\mu\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right);\quad b(q,\bar{v})=(q,\operatorname{div}\bar{v});$$

$$a_1(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=\sum_{i,j=1}^{n}\left(u_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j},w_i\right);\ \langle\bar{f},\bar{v}\rangle=\sum_{i=1}^{n}(f_i,v_i);$$

$$(p,q)=\int_{\Omega}pq\,dx;\quad\forall\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in V;\ \forall p,q\in Q;$$

$$V=[H_0^1(\Omega)]^n;\ Q=L_0^2(\Omega).$$

Можна переконатись [3], що

1) $|a(\bar{u},\bar{v})|\leq\mu|\bar{u}|_1|\bar{v}|_1\quad\forall\bar{u},\bar{v}\in V;$ (6)

2) $a(\bar{v},\bar{v})=\mu|\bar{v}|_1^2\quad\forall\bar{v}\in V;$ (7)

3) $|a_1(\bar{u},\bar{v},\bar{w})|\leq N|\bar{u}|_1|\bar{v}|_1|\bar{w}|_1\quad\forall\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in V,$ (8)

де $N=\sup\limits_{\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in V}\dfrac{|a_1(\bar{u},\bar{v},\bar{w})|}{|\bar{u}|_1|\bar{v}|_1|\bar{w}|_1};$

4) Існує стала $L>0$ така, що

$$\sup_{\bar{v}\in V}\frac{b(q,\bar{v})}{|\bar{v}|_1}\geq L\|q\|_0\quad\forall q\in Q. \tag{9}$$

3. Для розв"язування задачі (4), (5) застосуємо метод регуляризації, який приводить до задачі [3]

$$a(\bar{u}^\varepsilon,\bar{v})-b(p,\bar{v})+a_1(\bar{u}^\varepsilon,\bar{u}^\varepsilon,\bar{v})=\langle\bar{f},\bar{v}\rangle\quad\forall\bar{v}\in V, \tag{10}$$

$$\varepsilon(p^\varepsilon,q)+b(q,\bar{u}^\varepsilon)=0\quad\forall q\in Q, \tag{11}$$

з якої необхідно знайти пару $(\bar{u}^\varepsilon,p^\varepsilon)$ для заданого $\varepsilon>0$.
З рівняння (11) виразимо функцію p^ε в явному вигляді

$$p^\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}\bar{u}^\varepsilon \tag{12}$$

і підставимо отриманий вираз у рівняння (10). В результаті приходимо до такої задачі

$$a(\bar{u}^\varepsilon,\bar{v})+\frac{1}{\varepsilon}(\operatorname{div}\bar{u}^\varepsilon,\operatorname{div}\bar{v})+a_1(\bar{u}^\varepsilon,\bar{u}^\varepsilon,\bar{v})=\langle\bar{f},\bar{v}\rangle\quad\forall\bar{v}\in V. \tag{13}$$

Надалі вважаємо, що задача (4), (5) має єдиний розв"язок $(\bar{u},p)\in \bar{V}\times Q$, а задача (I3) єдиний розв"язок $\bar{u}^{\varepsilon}\in V$.

<u>Теорема I</u>. Нехай виконуються такі умови:

I) пара $(\bar{u},p)\in V\times Q$ є розв"язком задачі (4), (5), причому

$$|\bar{u}|_1\le \dot{I}\ ,\ \dot{I}=const>0\ ;$$

2) Існують сталі $\varepsilon_0>0,\ \dot{J}>0$ такі, що

$$|\bar{u}^{\varepsilon}|_1\le \dot{J},\ \forall \varepsilon<\varepsilon_0\ ,\ \varepsilon>0\ ,$$

де $\bar{u}^{\varepsilon}$ – розв"язок задачі (I3) при фіксованому ε ;

3) $\mu>N(\dot{I}+\dot{J})$.

Тоді послідовність $\{(\bar{u}^{\varepsilon},p^{\varepsilon})\}$, де функція p^{ε} визначається формулою (I2), при $\varepsilon\to 0$ збігається до розв"язку $(\bar{u},p)$, причому $|\bar{u}^{\varepsilon}-\bar{u}|_1+\|p^{\varepsilon}-p\|_0=O(\varepsilon)$.

<u>Доведення</u>. Віднімемо рівняння (I3) і (4) з врахуванням (I2):

$$a(\bar{u}^{\varepsilon}-\bar{u},\bar{v})+a_1(\bar{u}^{\varepsilon},\bar{u}^{\varepsilon},\bar{v})-a_1(\bar{u},\bar{u},\bar{v})=b(p^{\varepsilon}-p,\bar{v})\ \ \forall\bar{v}\in V. \tag{I4}$$

Завдяки властивості (9) існують такі $\bar{w}\in V,\ \bar{w}\neq 0,\ L>0$, що

$$L\|p^{\varepsilon}-p\|_0|\bar{w}|_1\le a(\bar{u}^{\varepsilon}-\bar{u},\bar{w})+a_1(\bar{u}^{\varepsilon},\bar{u}^{\varepsilon},\bar{w})-a_1(\bar{u},\bar{u},\bar{w}).$$

Враховуючи співвідношення (6), (8) і тотожність

$$a_1(\bar{u},\bar{u},\bar{w})-a_1(\bar{v},\bar{v},\bar{w})=a_1(\bar{u}-\bar{v},\bar{u},\bar{w})+a_1(\bar{v},\bar{u}-\bar{v},\bar{w})\ \ \forall\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in V,$$

одержуємо

$$\|p^{\varepsilon}-p\|_0\le\frac{\mu+N(\dot{I}+\dot{J})}{L}|\bar{u}^{\varepsilon}-\bar{u}|_1 \tag{I5}$$

Приймемо в (I4) $\bar{v}=\bar{u}^{\varepsilon}-\bar{u}$; використовуючи нерівність Буняковського – Шварца, (7), (8), (I5), приходимо до нерівності

$$(\mu-N(\dot{I}+\dot{J}))|\bar{u}^{\varepsilon}-\bar{u}|_1^2\le\varepsilon\frac{\mu+N(\dot{I}+\dot{J})}{L}|\bar{u}^{\varepsilon}-\bar{u}|_1\|p\|_0\ .$$

Оскільки константа $\mu-N(\dot{I}+\dot{J})$ строго додатна, то, застосовуючи ще раз нерівність (I5), дістаємо твердження теореми.

4. Нехай V_h – підпростір простору V з базою $\bar{\Phi}^1,\dots,\bar{\Phi}^N$. Розв"язок $\bar{u}_h^{\varepsilon}\in V_h$ задачі

$$a(\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{v})+\frac{1}{\varepsilon}(div\,\bar{u}_h^{\varepsilon},div\,\bar{v})+a_1(\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{v})=\langle\bar{f},\bar{v}\rangle\ \ \forall\bar{v}\in V_h \tag{I6}$$

називається апроксимацією Бубнова – Гальоркіна розв"язку $\bar{u}_h^{\varepsilon}$ задачі (13). Оскільки $\bar{u}_h^{\varepsilon} \in V_h$, то наявний розклад

$$\bar{u}_h^{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N} U_i \bar{\Phi}^i . \tag{17}$$

Невідомі коефіцієнти U_i знаходимо з системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{N} U_i [a(\bar{\Phi}^i, \bar{\Phi}^j) + \frac{1}{\varepsilon}(div\,\bar{\Phi}^i, div\,\bar{\Phi}^j)] + \sum_{i,j=1}^{N} U_i U_k a_1(\bar{\Phi}^i, \bar{\Phi}^k, \bar{\Phi}^j) =$$
$$= \langle \bar{f}, \bar{\Phi}^j \rangle, \; j = 1, \ldots, N,$$

яку отримуємо підстановкою (17) в (16) з $\bar{v} = \bar{\Phi}^i$, $i = 1, \ldots, N$.

<u>Теорема 2</u>. Нехай виконуються такі умови:

1) пара $(\bar{u}, p) \in V \times Q$ є розв"язком задачі (4), (5), причому $|\bar{u}|_1 \leq \dot{I}$, $\dot{I} = const > 0$;

2) Існують сталі $\varepsilon_0 > 0$, $h_0 > 0$, $\dot{J} > 0$ такі, що розв"язок $\bar{u}_h^{\varepsilon}$ задачі (16) задовольняє нерівність

$$|\bar{u}_h^{\varepsilon}|_1 \leq \dot{J} \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \; \forall h < h_0 ;$$

3) $\mu > 3N(\dot{I} + \dot{J})$.

Тоді при достатньо малих ε справедлива нерівність

$$|\bar{u}_h^{\varepsilon} - \bar{u}|_1 \leq (C_1 \varepsilon + \frac{C_2}{\varepsilon} \inf_{\bar{v} \in V_h} |\bar{v} - \bar{u}|_1)^{1/2}, \; C_1, C_2 = const > 0 . \tag{18}$$

Якщо додатково виконується наступна умова:

4) Існує стала $L > 0$ така, що

$$\sup_{\bar{v} \in V_h} \frac{b(q, \bar{v})}{|\bar{v}|_1} \geq L \|q\|_0 \quad \forall q \in Q ,$$

тоді послідовність $\{(\bar{u}_h^{\varepsilon}, p_h^{\varepsilon})\}$, де

$$p_h^{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} div\,\bar{u}_h^{\varepsilon} , \tag{19}$$

при $\varepsilon \to 0$, $h \to 0$ збігається до розв"язку $(\bar{u}, p)$. При цьому справедлива оцінка

$$|\bar{u}_h^{\varepsilon} - \bar{u}|_1 + \|p_h^{\varepsilon} - p\|_0 \leq C_3 \varepsilon + C_4 \inf_{\bar{v} \in V_h} |\bar{v} - \bar{u}|_1 , \; C_3, C_4 = const > 0 . \tag{20}$$

<u>Доведення</u>. З рівнянь (4) і (16) випливає

$$a(\bar{u}_h^{\varepsilon} - \bar{u}, \bar{v}) + \frac{1}{\varepsilon}(div\,\bar{u}_h^{\varepsilon}, div\,\bar{v}) + b(p, \bar{v}) + a_1(\bar{u}_h^{\varepsilon}, \bar{u}_h^{\varepsilon}, \bar{v}) -$$
$$- a_1(\bar{u}, \bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in V_h . \tag{21}$$

На основі останнього рівняння приходимо до рівності

$$\mu|\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u}|_1^2+\frac{1}{\varepsilon}\|div(\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u})\|_0^2=-b(p,\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u})+a(\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u},\bar{v}-\bar{u})+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}(div(\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u}),\, div(\bar{v}-\bar{u}))+b(p,\bar{v}-\bar{u})+a_1(\bar{u},\bar{u},\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u})-$$
$$-a_1(\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u})+a_1(\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{v}-\bar{u})-a_1(\bar{u},\bar{u},\bar{v}-\bar{u})\ \forall\bar{v}\in V_h. \tag{22}$$

Оцінюючи зверху праву частину (22), одержуємо нерівність

$$(\mu-3N(\dot{I}+\dot{j}))|\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u}|_1^2\leq 2\varepsilon\|p\|_0^2+(\mu+\frac{2n}{\varepsilon}+N(\dot{I}+\dot{j}))|\bar{v}-\bar{u}|_1^2\ \forall\bar{v}\in V_h,$$

звідки, внаслідок умови 3 теореми, для достатньо малих ε приходимо до оцінки (18).

Підставимо формулу (19) в рівність (21), тоді

$$a(\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u},\bar{v})+a_1(\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{v})-a_1(\bar{u},\bar{u},\bar{v})=b(p_h^{\varepsilon}-p,\bar{v})\ \forall\bar{v}\in V. \tag{23}$$

Звідси

$$\mu|\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u}|_1^2+\varepsilon\|p_h^{\varepsilon}-p\|_0^2=a(\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u},\bar{v}-\bar{u})-b(p_h^{\varepsilon}-p,\bar{v}-\bar{u})-$$
$$-\varepsilon(p_h^{\varepsilon}-p,p)+a_1(\bar{u},\bar{u},\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u})-a_1(\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u})+$$
$$+a_1(\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{u}_h^{\varepsilon},\bar{v}-\bar{u})-a_1(\bar{u},\bar{u},\bar{v}-\bar{u})\ \forall\bar{v}\in V_h. \tag{24}$$

Внаслідок умови 4

$$\|p_h^{\varepsilon}-p\|_0\leq\frac{\mu+N(\dot{I}+\dot{j})}{L}|\bar{u}_h^{\varepsilon}-\bar{u}|_1. \tag{25}$$

Врешті, оцінюючи зверху праву частину (24) з використанням (25), з огляду на умову 3 приходимо до оцінки (20).

5. Нехай базисні функції $\bar{\Phi}^i$ є скінченноелементними сплайнами такими, що простори апроксимацій V_h характеризуються наступною інтерполяційною властивістю [2]:

Для довільного $\bar{v}\in V\cap[H^{k+1}(\Omega)]^n, k\geq 1$ існує $\bar{v}_h\in V_h$ такий, що

$$\|\bar{v}-\bar{v}_h\|_1\leq Mh^k\|\bar{v}\|_{k+1}, \tag{26}$$

де h – параметр дискретизації, а $M=const>0$ не залежить від вибору h і $\bar{V}$.

Наслідок (з теореми 2). Нехай виконуються умови I–3 теореми 2, а також умова (26). Тоді, якщо $\varepsilon \sim h^K$, послідовність $\{\bar{u}_h^\varepsilon\}$ при $h \to 0$ збігається до вектора $\bar{u}$. При цьому справедлива оцінка

$$|\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}|_1 = O(h^{K/2}).$$

Якщо ж додатково виконується умова 4 теореми 2, то при $\varepsilon \sim h^K$ виконується оцінка

$$|\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}|_1 + \|p_h^\varepsilon - p\|_0 = O(h^K).$$

I. Зубов В.Н., Шинкаренко Г.А. Сходимость конечноэлементных аппроксимаций для регуляризованной задачи Стокса. Львов, 1985. 23 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2142-Ук85. 2. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. – Львов: Редакционно-издательская группа Львов. ун-та. 1981. 88 с. 3. Girault V., Raviart P.A. Finite element approximations of the Navier-Stokes equations // Lect. Notes Math. 1979. Vol. 749. 200 p.

Стаття надійшла до редколегії 27.01.86

УДК 539.3

Л.Й.Ощипко, Л.М.Журавчак

ОПТИМІЗАЦІЯ КОНСТРУКЦІЇ З УМОВ МІЦНОСТІ І СТІЙКОСТІ

Розглядаємо задачу оптимального проектування за вагою на міцність і стійкість конструкції, що складається з кругової циліндричної оболонки радіуса R, товщини h_2 і довжини L, спряженої з пластинкою товщини h_1. Конструкція знаходиться під дією рівномірного зовнішнього тиску $q=const$. Мінімум маси (об"єму) конструкції шукаємо на підпросторі проектування, що визначається обмеженнями на максимальні еквівалентні напруження, які виникають в пластинці й оболонці, і верхнє критичне на-