де h – параметр дискретизації, а $M = const > 0$ не залежить від вибору h і $\bar{V}$.

Наслідок (з теореми 2). Нехай виконуються умови I–3 теореми 2, а також умова (26). Тоді, якщо $\varepsilon \sim h^K$, послідовність $\{\bar{u}_h^{\varepsilon}\}$ при $h \to 0$ збігається до вектора $\bar{u}$. При цьому справедлива оцінка

$$|\bar{u}_h^{\varepsilon} - \bar{u}|_1 = O(h^{K/2}).$$

Якщо ж додатково виконується умова 4 теореми 2, то при $\varepsilon \sim h^K$ виконується оцінка

$$|\bar{u}_h^{\varepsilon} - \bar{u}|_1 + \|p_h^{\varepsilon} - p\|_0 = O(h^K).$$

1. З у б о в В.Н., Ш и н к а р е н к о Г.А. Сходимость конечноэлементных аппроксимаций для регуляризованной задачи Стокса. Львов, 1985. 23 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2142–Ук85. 2. С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е н к о Г.А., В о в к В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. – Львов: Редакционно-издательская группа Львов. ун-та. 1981. 88 с. 3. Girault V., Raviart P.A. Finite element approximations of the Navier-Stokes equations // Lect. Notes Math. 1979. Vol. 749. 200 p.

Стаття надійшла до редколегії 27.01.86

УДК 539.3

Л.Й.Ощипко, Л.М.Журавчак

ОПТИМІЗАЦІЯ КОНСТРУКЦІЇ З УМОВ МІЦНОСТІ І СТІЙКОСТІ

Розглядаємо задачу оптимального проектування за вагою на міцність і стійкість конструкції, що складається з кругової циліндричної оболонки радіуса R, товщини h_2 і довжини L, спряженої з пластинкою товщини h_1. Конструкція знаходиться під дією рівномірного зовнішнього тиску $q = const$. Мінімум маси (об"єму) конструкції шукаємо на підпросторі проектування, що визначається обмеженнями на максимальні еквівалентні напруження, які виникають в пластинці й оболонці, і верхнє критичне на-

вантаження на оболонку. Тобто задача оптимального проектування за масою на міцність і стійкість формулюється так:
мінімізувати

$$V(h_1, h_2, R, L) = \pi\left[\left(R+\frac{h_2}{2}\right)^2\left(L+\frac{h_1}{2}\right) - \left(R-\frac{h_2}{2}\right)^2\left(L-\frac{h_1}{2}\right)\right] \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\max_{r} \sigma^{пл}_{екв\,max} \leqslant [\sigma],$$

$$\max_{x} \sigma^{об}_{екв\,max} \leqslant [\sigma],$$

$$\min \hat{q}_{кр} \geqslant \hat{q};$$

$$h_1 \geqslant 0,\ h_2 \geqslant 0,\ R \geqslant 0,\ L \geqslant 0, \tag{2}$$

(3)

де $[\sigma]$ – допустиме напруження; $\hat{q} = \frac{q}{E}\left(\frac{R}{h_2}\right)^2$; E – модуль Юнга.

При пружному розрахунку конструкцію розбиваємо на круглу пластинку [3] і безмежну циліндричну оболонку [4].

Еквівалентні напруження на зовнішній і внутрішній поверхнях елементів конструкції визначаються за формулами

$$\sigma_{екв\,max} = \max\left\{\sigma^{+}_{екв}, \sigma^{-}_{екв}\right\},$$

$$\sigma^{\pm}_{екв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1^{\pm})^2 + (\sigma_2^{\pm})^2 + (\sigma_1^{\pm} - \sigma_2^{\pm})^2},$$

де

$$\sigma_1^{\pm} = \mp\frac{6M_r}{h_1^2} + \frac{N_r}{h_1}, \quad \sigma_2^{\pm} = \mp\frac{6M_\theta}{h_1^2} + \frac{N_\theta}{h_1}; \tag{4}$$

M_r, M_θ – згинні моменти; N_r, N_θ – розтягуючі зусилля, що виникають у пластинці;

$$\sigma_1^{\pm} = \pm\frac{6M_x}{h_2^2} + \frac{N_x}{h_2}; \quad \sigma_2^{\pm} = \pm\frac{6M_\varphi}{h_2^2} + \frac{N_\varphi}{h_2};$$

M_x, M_φ – згинні моменти; N_x, N_φ – розтягуючі зусилля, які виникають в оболонці.

Верхнє критичне навантаження на оболонку у випадку всестороннього стиску при умові, що $R/h_2 \gg 1$ мало відрізняється від критичного навантаження при чистому поперечному тиску. Тому розв"язок задачі про стійкість циліндричної оболонки у лінійній постановці [I] зводиться до мінімізації

$$q = \frac{n^2}{12(1-\nu^2)} \frac{h_2}{R}\left(1+\frac{\pi^2 R^2}{n^2 L^2}\right)^2 + \frac{\pi^4 R^5}{n^6 L^4 h_2} \frac{1}{\left(1+\frac{\pi^2 R^2}{n^2 L^2}\right)^2} \tag{5}$$

по n (кількості повних хвиль по колу).

Диференціюючи (5) по n^2, отримуємо рівняння

$$B\left(1+\frac{A}{n^2}\right)^5 - \frac{2BA}{n^4}\left(1+\frac{A}{n^2}\right)^4 - \frac{3A_1}{n^8}\left(1+\frac{A}{n^2}\right) + \frac{2AA_1}{n^{10}} = 0 \tag{6}$$

де

$$A = \left(\frac{\pi R}{L}\right)^2 ; \; A_1 = A^2 \frac{R}{h_2} ;$$

$$B = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{h_2}{R} ;$$

ν – коефіцієнт Пуасона.

Значення $\hat{q}_{KP}$ знаходимо зі співвідношення

$$\hat{q}_{KP} = B\frac{(n^2+A)^2}{n^2} + A_1 \frac{1}{n^2(n^2+A)^2} . \tag{7}$$

Рівняння (6) розв"язуємо, використовуючи метод ділення відрізка пополам.

Задачу оптимального проектування (I)-(3) з допомогою числових методів зводимо до задачі геометричного програмування з нульовим степенем важкості, пряма програма якого формулюється так: мінімізувати

$$g_0(\bar{h}) = C_1 h_1^{a_{11}} h_2^{a_{21}} h_3^{a_{31}} h_4^{a_{41}} + C_2 h_1^{a_{12}} h_2^{a_{22}} h_3^{a_{32}} h_4^{a_{42}} \tag{8}$$

при обмеженнях

$$\frac{\max\limits_{z} \sigma^{пл}_{екв\,max}}{[\sigma]} = C_3 h_1^{a_{13}} h_2^{a_{23}} h_3^{a_{33}} h_4^{a_{43}} \le 1,$$

$$\frac{\max\limits_{x} \sigma^{об}_{екв\,max}}{[\sigma]} = C_4 h_1^{a_{14}} h_2^{a_{24}} h_3^{a_{34}} h_4^{a_{44}} \le 1,$$

$$\frac{\hat{q}}{\min \hat{q}_{кр}} = C_5 h_1^{a_{15}} h_2^{a_{25}} h_3^{a_{35}} h_4^{a_{45}} \le 1, \tag{4}$$

де $h_3 = R$; $h_4 = L$.

На алгоритмічній мові ФОРТРАН складена програма, з допомогою якої проводять пружний розрахунок конструкції, знаходять критичне навантаження на оболонку, зводять задачу оптимального проектування до задачі геометричного програмування і розв"язують двоїсту програму задачі геометричного програмування.

При розв"язку задачі геометричного програмування використовуємо ітераційний процес, який полягає в тому, що при апроксимації функцій одночленними позіномами за вихідну точку послідовно беремо значення оптимальних параметрів, отриманих на попередньому кроці, аж поки не досягається задана точність на максимальні еквівалентні напруження і критичне навантаження

$$|\max_{z} \sigma^{пл}_{екв\,max} - [\sigma]| < \varepsilon,$$

$$|\max_{x} \sigma^{об}_{екв\,max} - [\sigma]| < \varepsilon,$$

$$|\hat{q} - \min \hat{q}_{кр}| < \varepsilon.$$

При фіксованих параметрах

$$E = 1{,}96 \cdot 10^7 \frac{МН}{м^2};\ \nu = 0{,}3;\ q = 0{,}98 \frac{МН}{м^2};\ [\sigma] = 39{,}2 \frac{МН}{м^2}$$

і вихідній точці

h_1 = 0,012 м; h_2 = 0,012 м; R = 0,2 м; L = 0,3 м

отримано такі результати:

$\hat{q}$	h_1	h_2	R	L	V
0,06	$0{,}776 \cdot 10^{-2}$	$0{,}764 \cdot 10^{-2}$	0,194	0,639	$0{,}687 \cdot 10^{-2}$
0,08	$0{,}847 \cdot 10^{-2}$	$0{,}833 \cdot 10^{-2}$	0,212	0,530	$0{,}713 \cdot 10^{-2}$
0,10	$0{,}904 \cdot 10^{-2}$	$0{,}899 \cdot 10^{-2}$	0,226	0,469	$0{,}738 \cdot 10^{-2}$

Як і слід було чекати зі збільшенням q при постійному $[\sigma]$ зменшується довжина циліндричної оболонки, а її радіус і товщина, а також товщина пластинки зростають.

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М., 1972. 2. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., 1972. 3. Ощипко Л.Й., Іванків К.С. Застосування геометричного програмування до оптимізації по вазі тонкостінних конструкцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1976. Вип. 11. С. 81-75. 4. Тимошенко С.П., Войновский - Кригер С. Пластинки и оболочки. М., 1963.

Стаття надійшла до редколегії 02.12.85

10-4067