

ISSN 0201-758X

ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

27

1987



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

Випуск 27

ЗАДАЧІ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
І МЕХАНІКИ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»

1987

В Вестнике помещены статьи по численным методам решения уравнений математической физики и задач оптимизации, статические и динамические задачи механики сплошной среды.

Для научных работников, преподавателей и студентов старших курсов.

Библиогр. в конце статей.

Редакційна колегія: проф., д-р техн. наук Д.В.Гриліп'юк (відп. редактор), доц., канд. фіз.-мат. наук Ю.М.Шербина (відп. секретар), доц., канд. фіз.-мат. наук М.Я.Бартіш, доц., канд. фіз.-мат. наук И.В.Людкевич, проф., д-р техн. наук Н.П.Флейшман.

Адреса редакційної колегії:

290000 Львів-центр, вул. Університетська, 1
Університет, кафедра прикладної математики

Редакція науково-технічної літератури

Зав. редакцією М.П.Парцей

Д.В.Гриліцький, Г.Т.Сулим

РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ТОНКОСТІННИХ ВКЛЮЧЕНЬ
У ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Прошарки чужорідних матеріалів, зони окисленого металу – це поширені дефекти мікро- і макроструктури матеріалів. Тонкостінні включення можуть виконувати роль тензодатчиків, клейових з'єднань, заповнених у процесі ремонтних робіт тріщин. У пілому міцність та втома матеріалу суттєво залежать від характеру розподілу та форми таких включень внаслідок високої концентрації напружень, яка виникає у їх околі.

Бувати тонкі включення можна на основі розв'язку задачі про включення досить загальної форми, враховуючи далі малість одного з його геометричних параметрів. Досить ефективний (але і складний) метод спряження зовнішнього та внутрішнього асимптотичного розкладу. Цікаві результати можна отримати шляхом застосування прямих числових (МСЕ) та експериментальних методів, однак найбільш доцільним виявився метод, який полягає у застосуванні принципу спряження континуумів різної розмірності: включення з розгляду самого включення та заміна його впливу ускладненими умовами контакту берегів матриці вздовж серединної лінії або поверхні дефекту.

Умови, які отримали назву умов взаємодії тонкостінного включення із зовнішнім середовищем, впливають із зв'язку між напруженнями, переміщеннями, температурою і т.п. на протилежних берегах прошарку. Цю думку стосовно питань теплопровідності висловив Л.С.Підстригач ще у 1963 р.

Названий метод дає змогу отримати зовнішній асимптотичний розклад поставленої задачі, тобто на певній відстані від нього, оскільки не враховує всіх особливостей геометричної форми дефекту.

К.С.Чобанян (1967 р.) встановив досить загальні умови для гнучкого ортотропного включення, однак у подальших роботах вірменські вчені використовували модель стрінгера, за якою включення сприймає тільки зусилля розтягу-стиску і на ньому виникає лише стрибок дотичних напружень.

Під впливом праці [46], де вперше досліджена плоска задача теорії пружності для тіла із включенням скінченної довжини, на кафедрі механіки Львівського університету розпочалося активне вивчення цієї проблематики. У рамках моделі стрінгера враховано додатковий вплив поперечної деформації прошарку при дії однорідного

поля напружень на нескінченості [40] та зосереджених сил [36], встановлено [9] чотири умови взаємодії для прямолінійного включення, що узагальнюють умови К.С.Чобаняна. Детально опрацьовано та вивчено [39] чотири основні варіанти таких умов стосовно криволінійного включення, один з яких використано при побудові інтегральних рівнянь для включення по дузі кола [6]. У праці [29] побудовано дві моделі пружного включення для випадку анти-плоскої деформації, у [30, 23] - умови температурної взаємодії для плоского випадку, а в [47] - умови пружної взаємодії лінійного включення з пологою циліндричною оболонкою.

Основним способом, який дає змогу моделювати дефекти та недосконалість граничних умов, є метод особливостей. Суть його полягає в заміні включення розподіленими вздовж деякої лінії чи поверхні силовими, моментними та іншими факторами, густина яких визначається з умови сумісності деформацій тіла та включення. Метод сил у ролі цих факторів використовує зосереджені сили, метод дислокацій - дислокації та дисторсії, метод фіктивних навантажень - сили та їх диполі. Перший з них можна використовувати для аналізу включень досить великої жорсткості, другий - малої, третій - довільної, однак він не досить гнучкий.

Набагато кращим виявилось поєднання методу сил і дислокацій. Оскільки задання на деякій поверхні стрібка вектора напружень і зміщень відразу та однозначно зумовлює густину відповідних факторів, то такий метод названо методом функцій стрібка. У задачах поздовжнього зсуву йому відповідає розподіл сил і гвинтових дислокацій, у задачах теплопровідності - джерел і диполів тепла.

Метод функцій стрібка вперше запропонований у 1975 р. Д.В.Гриліцьким та Г.Т.Сулимом при дослідженні плоских задач теорії пружності для тонкостінних включень на прямолінійній границі розділу ізотропних матеріалів: у праці [10] враховано три функції стрібка (дотичних напружень і переміщень), в [9] - чотири (компоненти векторів напружень і зміщень). Використання методів теорії функцій комплексної змінної [9] або інтегральних перетворень [7] чи формули Сомільяно [34] дає змогу встановити залежність компонент тензора напружень і вектора переміщень у довільній точці середовища від функцій стрібка та зовнішнього навантаження. Застосування формул Племелья приводить до граничних значень вказаних величин на берегах лінії чи поверхні [34] стрібка, а їх підстановка в ті чи інші умови взаємодії породжує систему функціональних рівнянь

відносно функції стрибка. Її розв'язок можна проводити методом степеневих рядів [40], ортогональних поліномів [9], механічних квадратур [47] чи коллокацій [33]. Збіжність процесу зумовлюється квазірегулярністю алгебраїчних систем [37]. Використання методу степеневих рядів [8, 40] виявилось неефективним, швидкість збіжності трьох останніх – практично однакова [33], хоча найбільш зручні при аналізі складних задач методи коллокацій та механічних квадратур. У граничних випадках пружних сталих метод дає змогу отримати результати для тріщини, абсолютно жорсткого включення та виключення з матеріалу матриці.

Пізніше цей метод перенесений на випадок антиплоскої деформації [29], стаціонарної теплопровідності з тепловіддачею і без неї [22, 23, 30], задач тривимірної теорії пружності для анізотропного середовища з включенням вздовж деякої поверхні Ляпунова [34].

Чотирьом функціям стрибка в плоскій задачі теорії пружності для включення в однорідній матриці відповідають чотири узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (KIN) [9, 32, 38]. Слід відзначити, що, починаючи з праць [38] і [13], використовується дещо інше [9] означення KIN, яке дає змогу побудувати асимптотичні залежності поля напружень і зміщень біля вершини дефекту. У праці [32] поряд із раціональним викладом методики розв'язання задачі детально аналізується зміст введених KIN. Побудовано [43, 44] асимптотичні залежності поля зміщень і напружень біля вершини включення в рамках плоскої, антиплоскої задачі теорії пружності, визначено поле напружень і переміщень у довільній точці середовища і здійснено порівняння одно- і двочленного розкладу із точним. Антиплоска задача приводить до існування двох KIN. У випадку лінійного включення у пологій оболонці восьми функціям стрибка (зміщень серединної поверхні, зусиль, згинальних моментів та кутів повороту нормалі) відповідають вісім коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів, які визначають ці величини в околі краю неоднорідності [47]. У задачах теплопровідності поле температури та теплові потоки біля вершини включення характеризують два коефіцієнти інтенсивності теплових потоків (KITP) [22].

Взаємодія включень досліджувалася на прикладі періодичної системи співосних [8, 9] та компланарних [17] неоднорідностей. У праці [38] одержано залежність поля напружень і переміщень від функцій стрибка на системі довільно орієнтованих прямолінійних

і викривлених включень у безмежній площині та наведено загальну методику розв'язання задач цього класу, а у праці [35] ці результати перенесено на випадок пружної півплощини.

Взаємодія включення з вільною та міжфазною границею більш детально вивчена на прикладі включення у смугі [7], півплощині [4], шаруватих і клиноподібних композиціях [14]. Особливість розв'язку біля вершини жорсткого включення, яка наближається по нормалі до границі розділу матеріалів, досліджена у праці [16]. Аналіз включення на границі розділу матеріалів зроблено в плоскій задачі у рамках узагальненої моделі стрінгера [8, 36, 40] і моделі пружного включення [9, 32], в антиплоскій задачі [29], задачі теплопровідності [22, 24] та ін.

Ряд досліджень присвячено впливу на КІН та КІТН змінної товщини тонкого прошарку [22, 28, 29, 30, 31, 43, 44].

Основним навантажувачим фактором вважається однорідне поле напружень і тепловий потік на нескінченості. Дія зосереджених факторів вивчена у ряді праць, присвячених плоскій [36], антиплоскій задачі [28], задачі теплопровідності [24, 25, 26].

Метод функцій стрибка виявився простим та ефективним методом аналізу концентрації напружень біля вершини пружного включення. Він відзначається великою універсальністю, дає змогу вивчати різні моделі включення (пружне, гнучке чи у вигляді балки [32], із стисливої рідини [15] тощо), контактну взаємодію [41]. Його ефективність підтверджують збігання результатів з граничними випадками тріщини, жорсткої плівки чи нитки, теплоізовованого включення, застосування до задачі цього класу методу скінчених елементів [42].

До методу функцій стрибка безпосередньо долучається метод лінійного розкладу потенціалів, згідно з яким включення розглядається як об'єкт того ж класу, що й оточуюче середовище і характеризується аналогічними потенціалами [2, 13]. Використовуючи розклад відповідних потенціалів у ряд по степенях малого параметра (півтовщини включення) з утриманням перших двох членів, записують значення потенціалу на границі включення. Різниці компонент вектора зміщення на протилежних берегах включення визначаються деякими комбінаціями невідомих функцій (коефіцієнтів розкладу), що мають, природно, зміст функцій стрибка. Суми відповідних компонент утворюють стійкі сполуки таких комбінацій, а отже, і функцій стрибка. Тому й величини, що характеризують граничні умови на берегах включення, записують

через функції стрибка. Умови ідеального контакту включення з матрицею пов'язують граничні значення потенціалів матриці із введеними у розгляд функціями стрибка, а застосування методів теорії функцій комплексної змінної приводить до системи інтегральних рівнянь.

У рамках цього методу вивчено плоскі задачі для ізолюваного включення в однорідному ізотропному середовищі при моделюванні згину у площині [12, 13], а при дії однорідного поля напружень на нескінченності для випадку тонкого включення по дузі кола [1] та періодичної задачі стосовно системи включень, центри яких лежать на одній прямій [21]. Досліджена також плоска задача стаціонарної термопружності [3], антиплоска задача для ізолюваного [19] та двох взаємодіючих включень [18]. Задача згину пластини Кірхгофа вивчена при наявності ізолюваного лінійного [2, 20] та додаткового кругового [5, 45] включення. Частина цих результатів міститься у праці [11].

Експериментальне дослідження проблеми концентрації напружень біля тонких включень [27] в основному підтвердило правильність вибраних концепцій.

І. Б е р н а р І.И., О п а н а с о в и ч В.К. Напряженное состояние пластинки с тонкостенным включением по дуге окружности // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47. № 2. С. 249-256.
2. Г р и л и ц к и й Д.В., Д р а г а н М.С., О п а н а с о в и ч В.К. Изгиб плиты с прямолинейным тонкостенным включением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 3. С. 83-88. 3. Г р и л и ц к и й Д.В., Д р а г а н М.С., О п а н а с о в и ч В.К. Температурное поле и термоупругое состояние пластин с тонкостенным упругим включением // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44. № 2. С. 338-345. 4. Г р и л и ц к и й Д.В., Е в т у ш е н к о А.А., С у л и м Г.Т. Полуплоскость с произвольно-ориентированным линейным упругим включением // Изв. АН АрмССР. Механика. 1980. Т. 33. № 1. С. 12-20. 5. Г р и л и ц к и й Д.В., О п а н а с о в и ч В.К., Т и с о в с к и й Л.О. Напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной плиты с тонким прямолинейным упругим включением // Физ.-хим. механика материалов. 1984. Т. 20. № 2. С. 77-82. 6. Г р и л и ц к и й Д.В., С о р о к а т и й Ю.І., С у л и м Г.Т. Система сингулярных интегральных уравнений для тонкостенных пружных включений по дузі кола // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1979. Вип. 15. С. 69-75. 7. Г р и л и ц к и й Д.В., С у л и м Г.Т., Е в т у ш е н к о А.А. Распределение напряжений в полосе с упругим тонким включением // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43. № 3. С. 542-549. 8. Г р и л и ц к и й Д.В., С у л и м Г.Т. Периодическая задача для кусочнооднородной плоскости с тонкостенными упругими включениями // Прикл. механика. 1975. Т. II. № 1. С. 74-81. 9. Г р и л и ц к и й Д.В., С у л и м Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39. № 3. С. 520-529. 10. Г р и л и ц к и й Д.В., С у л и м Г.Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1975. Вип. I. С. 41-48. 11. Д р а г а н М.С. Двумерные задачи теории упругости для тел с тонкими упругими прямолинейными включениями:

Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1984. 12. Драган М.С. Згин консольної балки з прямолінійним пружним включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1980. Вип. 16. С. 69-75.
 13. Драган М.С., Опанасович В.К. Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43. № 2. С. 342-348.
 14. Евтушенко А.А. Напряженное состояние упругих пластин с тонкостенным упругим включением: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1981. 15. Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Концентрация напряжений возле полости, заполненной жидкостью // Физ.-хим. механика материалов. 1980. Т. 16. № 6. С. 70-73. 16. Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Концентрация напряжений у вершины жесткого включения на прямой линии раздела материалов полуплоскостей // Физ.-хим. механика материалов. 1985. Т. 21. № 5. С. 71-74.
 17. Мартыняк Р.М., Сулим Г.Т. Периодическая задача для системы линейных компланарных включений в изотропной плоскости // Мат. методы и физ. поля. 1982. Вип. 15. С. 113-117. 18. Опанасович В.К., Драган М.С. Антиплоская деформация тела с системой тонких пружных включений // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С. 71-77. 19. Опанасович В.К., Драган М.С. Антиплоская деформация тела с тонкостенным пружным включением // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1981. Вип. 16. С. 69-73. 20. Опанасович М.С., Драган М.С. Кручения плиты с тонкостенным прямолинейным включением // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1980. Вип. 16. С. 64-69. 21. Опанасович В.К., Драган М.С. Периодична система паралельних тонких пружних включень у пластині // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 23. С. 83-89. 22. Пискозуб И.З. Двумерные задачи теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородных тел с тонкими упругими теплоактивными включениями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1985. 23. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Температурные условия взаимодействия среды с тонким включением // Инж.-физ. журн. 1983. Т. 44. № 6. С. 977-983.
 24. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Температурное поле в кусочно-однородных средах с теплоактивными прослойками. Львов, 1984. 14 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 4735-84 Деп. 25. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Влияние линейного включения на температурное поле від джерела тепла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1980. Вип. 16. С. 80-87. 26. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. Влияние линейного включения на температурное поле від диполя тепла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1981. Вип. 17. С. 82-87.
 27. Сорокатый Ю.И. Теоретико-экспериментальные исследования напряженного состояния упругих пластин с инородными тонкостенными включениями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1985. 28. Сулим Г.Т. Антиплоская деформация изотропной среды с тонкими прослойками под воздействием сил, дислокаций, диполей. Львов, 1985. 20 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 782-85 Деп. 29. Сулим Г.Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45. № 2. С. 308-318. 30. Сулим Г.Т. Влияние формы тонкого включения на распределение температуры в кусочно-однородной плоскости // Инж.-физ. журн. 1979. Т. 37. № 6. С. 1124-1130. 31. Сулим Г.Т. Влияние формы тонкостенного включения на концентрацию напряжений в пластине // Физ.-хим. механика материалов. 1981. Т. 17. № 3. С. 64-68. 32. Сулим Г.Т. Сравнительный анализ моделей изгиба тонких упругих включений. Львов, 1985. 15 с. Рукопись деп. в ВИНТИ № 4487-85 Деп. 33. Сулим Г.Т. Сравнительный анализ моделей изгиба тонких упругих включений. Львов, 1985. 15 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 4487-85 Деп. 34. Сулим Г.Т. Применение формулы

Сомильяно в задачах теории упругости для тел с тонкостенными включениями // Мат. методы и физ. поля. 1983. Вып. 18. С. 48-51.

35. Сулим Г.Т. Упругое равновесие полуплоскости с системой линейных включений // Прикл. мех. 1983. Т. 19. № 2. С. 96-100.

36. Сулим Г.Т. Концентрация напряжений на тонкостенном включении в кусково-однородной плоскости // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1974. Вип. 9. С. 74-80.

37. Сулим Г.Т. Про регулярність деяких систем лінійних алгебраїчних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1975. Вип. 10. С. 76-79.

38. Сулим Г.Т. Система лінійних включень в ізотропному середовищі // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1980. № 7. С. 62-65.

39. Сулим Г.Т. Термопружні умови взаємодії середовища з тонкостінним включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1979. Вип. 15. С. 85-92.

40. Сулим Г.Т., Грилицький Д.В. Напружене состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № II. С. 59-65.

41. Сулим Г.Т., Мартиняк Р.М. Задача нарушения контакта при стиску пружных половин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 23. С. 78-82.

42. Сулим Г.Т., Рокач И.В. Метод конечных элементов в задаче о тонкостенном включении // Материалы 10 конф. молодых ученых физ.-мех. ин-та АН УССР. Львов, 1982. С. 165-167. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 1948-83.

43. Сулим Г.Т., Сулим М.В. Напружене состояние пластинки с тонкостенным включением. Львов, 1982. 20 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 4839-82.

44. Сулим Г.Т., Сулим М.В. Поле напряжений и перемещений в антиплоской задаче для среды с тонкостенной прослойкой. Львов, 1982. 20 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 4838-82.

45. Тисовський Л.О. Згин плити з круглою щайбою і тонкими пружними прямолінійними включеннями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С. 64-70.

46. Хачикян А.С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины // Изв. АН АрмССР. Механика. 1970. Т. 23. № 3. С. 14-22.

47. Шацкий И.П. Напружене состояние пологих оболочек с тонкими упругими включениями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1984.

Стаття надійшла до редколегії 03.03.86

Д.В.Гриліпський, В.П.Баран

ПРО ПОСТАНОВКУ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ
З ВРАХУВАННЯМ ТЕПЛОУТВОРЕННЯ ПРИ
НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ ТІЛ

В аналітичних дослідженнях, присвячених контактним задачам термопружності з врахуванням теплоутворення від сил тертя на ділянці контакту, дана постановка і побудовані розв'язки окремих задач за умови, як правило, ідеального термоконтакту тіл [4]. Але реально між співдотичними тілами контакт існує не по ідеалізованій гладкій поверхні, а по площі контакту, що визначається мікрогеометрією

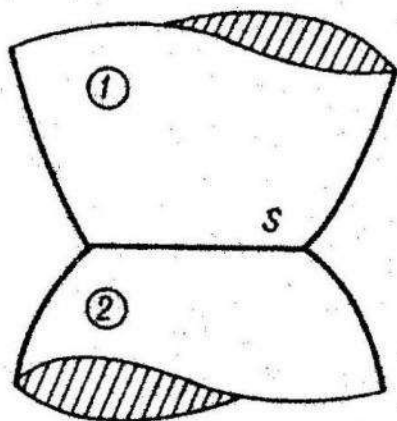


Рис. I

поверхні. Пустоти при фактичному контакті заповнені повітрям і продуктами спрацювання. Відбувається також забруднення поверхонь, що труться, основна частина яких складається з окисних шарів [5]. Отже, між співдотичними тілами наявний неідеальний тепловий контакт.

У працях [1,2] наведені результати, отримані при розв'язанні окремих плоских і осесиметричних контактних задач такого типу та допущенні частинних випадків умов неідеального контакту тіл. Але оскільки тонкі прошарки матеріалів кожного зі співдотичних тіл у межах ділянки контакту набувають нових властивостей (ме-

ханічних, теплофізичних тощо), відмінних від властивостей заданих матеріалів [5], то під час контактування двох тіл можна вважати, що маємо три тіла і кожне зі своїми властивостями. Врахування цього особливо важливе при постановці й побудові розв'язків контактних задач з врахуванням розігрівання [3].

Припустимо, що тепловий контакт двох тіл відбувається через третє тіло — тонкий проміжний шар, який має свої теплофізичні характеристики. Наявність проміжного шару приводить до неідеальності теплового контакту двох заданих тіл, аналітичні умови якого вперше вивів Я.С.Підстригач [6]. На ділянці контакту S

(рис. 1) вони мають вигляд

$$\lambda \Delta(t^{(1)} + t^{(2)}) + 2\left(\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}\right) = c(\dot{t}^{(1)} + \dot{t}^{(2)}) + f \tau_n,$$

$$\lambda \Delta(t^{(1)} - t^{(2)}) + 6\left(\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}\right) - 12h(t^{(1)} - t^{(2)}) = c(\dot{t}^{(1)} - \dot{t}^{(2)}). \quad (1)$$

На контурі L_0 ділянки контакту при нульовій температурі зовнішнього середовища наявні умови теплообміну

$$\lambda \frac{\partial(t^{(1)} + t^{(2)})}{\partial n_0} + \alpha_0(t^{(1)} + t^{(2)}) = 0,$$

$$\lambda \frac{\partial(t^{(1)} - t^{(2)})}{\partial n_0} + \alpha_0(t^{(1)} - t^{(2)}) = 0. \quad (2)$$

В умовах (1) і (2) прийняті такі позначення: c, λ, h і α_0 - відповідно приведена теплоємність, теплопровідність, теплопроники-

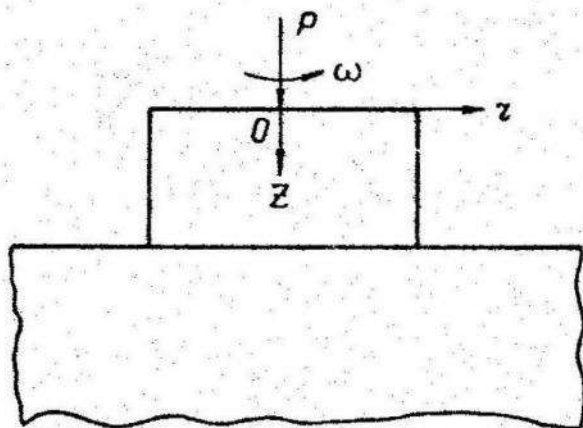


Рис. 2.

вість проміжного шару та коефіцієнт теплообміну між бічною поверхнею проміжного шару та зовнішнім середовищем; $\lambda^{(j)}, t^{(j)}$ ($j=1,2$) - коефіцієнти теплопровідності та температура тіл; Δ - оператор Лапласа; n - нормаль до контактної поверхні тіл; n_0 - нормаль до контуру ділянки контакту; τ_n - дотичне напруження на ділянці контакту; f - коефіцієнт, що залежить від відносної швидкості переміщення тіл та коефіцієнта тертя.

Співвідношення (1) представляють собою найбільш повні умови неідеального теплового контакту двох тіл. Із них при певних допущеннях одержують частинні випадки умов, які використовують в літературі при розв'язанні граничних задач з тепловиділенням на ділянці контакту. Зауважимо, що з допомогою умови (2) знаходять коефіцієнт

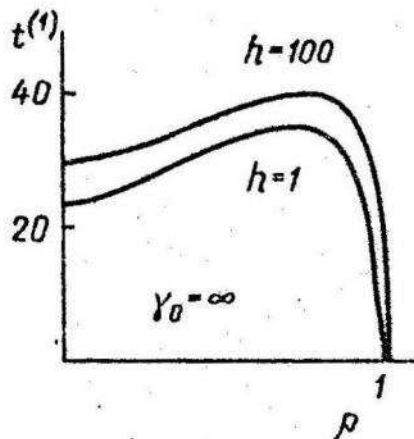


Рис. 3.

теплообміну α_0 з бокової поверхні проміжного шару.

Коефіцієнти λ, h, c залежать від багатьох факторів. Їхні кількісні значення можна одержати на основі використання експериментальних даних і теоретичного аналізу задач, тобто на основі теоретико-експериментальної методики.

Проілюструємо застосування умов (1) на прикладі осесиметричної задачі теплопровідності з врахуванням теплоутворення (рис. 2).

Розглянемо цю задачу припускаючи, що на ділянці контакту нормальні напруження розподілені рівномірно $\sigma_z = P/\pi a^2$ (пружний штамп на жорсткому півпросторі) і наявний стаціонарний режим теплоутворення.

Умови (1), якщо знехтувати теплопровідністю проміжного шару в радіальному напрямі, мають вигляд

$$z=H, \lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} = k\omega z \sigma_z, \quad 0 \leq z < a; \quad (3)$$

$$z=H, \lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} - h(t^{(1)} - t^{(2)}) = 0, \quad 0 \leq z < a. \quad (4)$$

На всіх вільних поверхнях тіл наявний теплообмін за законом Ньютона:

$$z=H, \frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} - \gamma_H t^{(2)} = 0, \quad a < z < \infty; \quad (5)$$

$$z=0, \frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} - \gamma_0 t^{(1)} = 0, \quad 0 \leq z < a; \quad (6)$$

$$z=a, \frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} + \gamma_a t^{(1)} = 0, \quad 0 \leq z \leq H, \quad (7)$$

а $t^{(i)}$ задовольняють рівняння

$$\Delta t^{(i)} = 0 \quad (i=1,2). \quad (8)$$

Для циліндра рівняння теплопровідності (8) розв'язано методом прямих. Для півпростору використовували інтегральне перетворення Ханкеля. Після задоволення граничних умов (3)–(7) одержана система алгебраїчних рівнянь на деякі коефіцієнти, через які знаходили температуру і теплові потоки на ділянці контакту. На рис. 3 зображені температури $t^{(1)}$ і $t^{(2)}$ на ділянці контакту при різних значеннях h . Вплив коефіцієнтів γ_a і γ_n проілюстрований на рис. 4. Матеріал півпростору – сталь ($\lambda^{(2)} = 45.4 \text{ Вт/м.К}$) циліндра – алюміній ($\lambda^{(1)} = 209.3 \text{ Вт/м.К}$).

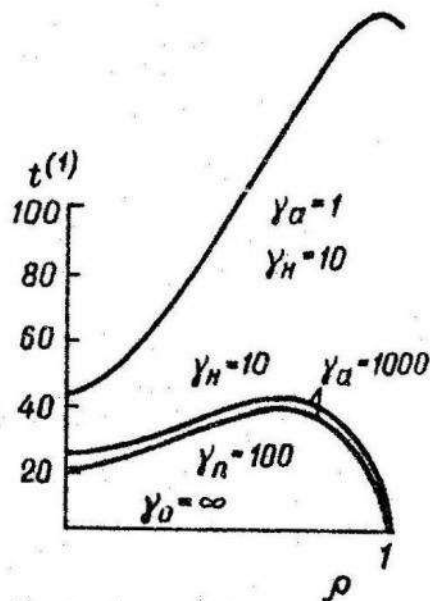


Рис. 4.

І. Г р и л і ц ь к и й Д.В. Система сингулярних інтегральних рівнянь для плоскої контактної задачі термопружності при стаціонарному тепловиділенні на ділянці контакту // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С. 29–33. 2. Г р и л і ц к и й Д.В., О к р е п к и й Б.С. Осесимметричная контактная задача термоупругости о давлении вращающегося штампа на слой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 22–30. 3. Г р и л і ц к и й Д.В., Б а р а н В.П., Е в т у ш е н к о А.А. Задачи трения с тепловыделением для упругих цилиндрических тел // Трение, износ и смазочные материалы: Тр. Международной науч. конф. Ташкент, 22–26 мая 1985 г. М., 1985. С. 24–27. 4. К о р о в ч и н с к и й М.В. Термоупругий локальний контакт високонагружених деталей машин с учетом изнашивания и тепловыделения от трения: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. М., 1983. 5. М у р Д. Основы и применение трибоники. М., 1978. 6. П о д с т р и г а ч Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью промежуточного слоя // Инж.-физ. журн. 1963. Т. 6. № 10. С. 129–136.

Стаття надійшла до редколегії 14.04.86

Р.І. Мокрик, В.В.Балибердін, І.В.Оліярник, О.М.Уханська

НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ СФЕРИ

Розглянемо багат шарову сферу з центром у точці $z=0$. Введемо такі позначення: $z_i (i=\overline{1,4})$ - радіус i -го шару ($z_i < z_{i+1}$); λ_i, a_i - відповідно коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності; $T^{(i)}(z, t)$ - шукана температура i -го шару; T_c - температура зовнішнього середовища. У початковий момент часу температура дорівнює нулю. На границях шарів виконуються умови ідеального теплового контакту, що виражаються в рівності температур і теплових потоків. Між зовнішнім шаром і навколишнім середовищем, температура якого змінюється з часом, відбувається теплообмін за законом Ньютона з коефіцієнтом теплообміну α .

Задача зводиться до розв'язування системи рівнянь [2]

$$\frac{\partial}{\partial t}(zT^{(i)}) = a_i \frac{\partial^2}{\partial z^2}(zT^{(i)}), \quad i=\overline{1,4} \quad (1)$$

при наступних початкових та граничних умовах

$$T^{(i)}|_{t=0} = 0, \quad i=\overline{1,4}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0; \quad (3)$$

$$T^{(i)}|_{z=z_i} = T^{(i+1)}|_{z=z_i}, \quad i=\overline{1,3}; \quad (4)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T^{(i)}}{\partial z}\bigg|_{z=z_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{(i+1)}}{\partial z}\bigg|_{z=z_i}, \quad i=\overline{1,3}; \quad (5)$$

$$\lambda_4 \frac{\partial T^{(4)}}{\partial z}\bigg|_{z=z_4} = -\alpha(T^{(4)}|_{z=z_4} - T_c), \quad (6)$$

де $T_c = T_0(1 - e^{-\alpha_0 t})$ - температура зовнішнього середовища. (7)

Введемо безрозмірні величини

$$\alpha_i = \frac{a_i}{a_1}, \quad H = \frac{\alpha z_4}{\lambda_4}, \quad \gamma_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}, \quad \theta^{(i)} = \frac{T^{(i)}}{T_0},$$

$$\tau = \frac{a_1 t}{z_4^2}, \quad R = \frac{z}{z_4}, \quad f(\tau) = 1 - e^{-\alpha' \tau}. \quad (8)$$

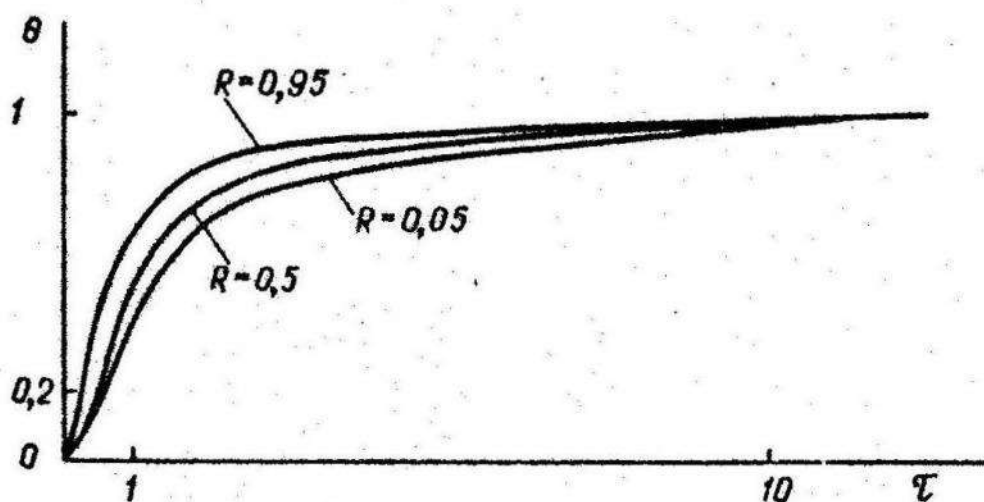


Рис. I.

Тоді зі співвідношень (I)–(6) задача у безрозмірній формі матиме вигляд

$$\alpha_i \frac{\partial(R\theta^{(i)})}{\partial\tau} = \frac{\partial^2(R\theta^{(i)})}{\partial R^2}, \quad i = \overline{1,4},$$

$$\theta^{(i)}|_{\tau=0} = 0, \quad i = \overline{1,4},$$

$$\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial R}\bigg|_{R=0} = 0,$$

$$\theta^{(i)}|_{R=R_i} = \theta^{(i+1)}|_{R=R_i}, \quad i = \overline{1,3},$$

$$\gamma_{i+1} \frac{\partial\theta^{(i)}}{\partial R}\bigg|_{R=R_i} = \frac{\partial\theta^{(i+1)}}{\partial R}\bigg|_{R=R_i}, \quad i = \overline{1,3},$$

$$\frac{\partial\theta^{(4)}}{\partial R}\bigg|_{R=R_4} = -H(\theta^{(4)}|_{R=R_4} - f(\tau)).$$

(9)

Застосуємо до (9) інтегральне перетворення по часу з орто-експоненціальним ядром $\varphi p_n(\tau)$ [1]

$$\varphi p_n(\tau) = \sum_{k=1}^n \delta_{nk} e^{-k\tau}, \quad (10)$$

де δ_{nk} - постійні величини.

Функцію

$$\theta_n(R) = \int_0^{\infty} \theta(R, \tau) \varphi p_n(\tau) d\tau \quad (11)$$

називаємо зображенням шуканої функції $\theta(R, \tau)$. Оригінал від такого зображення визначається як

$$\theta(R, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(R) \varphi p_n(\tau). \quad (12)$$

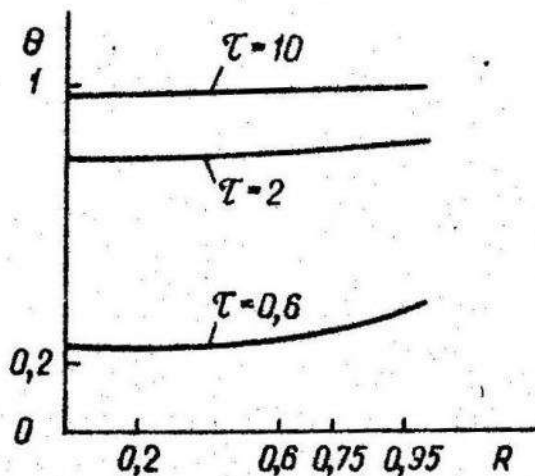


Рис. 2.

Тоді задача (9) в зображеннях набирає вигляду

$$\alpha_i \left[n R \theta_n^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k \theta_k^{(i)} R \right] = \frac{d^2}{dR^2} (R \theta_n^{(i)}), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (13)$$

$$\left. \frac{d\theta_n^{(1)}}{dR} \right|_{R=0} = 0,$$

$$\theta_n^{(i)} \Big|_{R=R_i} = \theta_n^{(i+1)} \Big|_{R=R_i}, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\gamma_{i+1} \frac{d\theta_n^{(i)}}{dR} \Big|_{R=R_i} = \frac{d\theta_n^{(i+1)}}{dR} \Big|_{R=R_i}, \quad i=\overline{1,3},$$

$$\frac{d\theta_n^{(4)}}{dR} \Big|_{R=R_4} = -H(\theta_n^{(4)} \Big|_{R=R_4} - f_n).$$
(I4)

Співвідношення

$$\theta_n^{(i)}(R) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^n [A_{nk}^{(i)} \operatorname{ch}(\sqrt{k} \alpha_i R) + B_{nk}^{(i)} \operatorname{sh}(\sqrt{k} \alpha_i R)], \quad i=\overline{1,4}$$
(I5)

є розв'язками системи рівнянь (I3); для невідомих коефіцієнтів $A_{nk}^{(i)}$ і $B_{nk}^{(i)}$ наявні рекурентні співвідношення

$$A_{nk}^{(i)} = \frac{2}{k-n} \sum_{m=k}^{n-1} m A_{mk}^{(i)}, \quad i=\overline{1,4},$$

$$B_{nk}^{(i)} = \frac{2}{k-n} \sum_{m=k}^{n-1} m B_{mk}^{(i)}, \quad k=\overline{1, n-1}.$$

Підставивши (I5) в граничні умови (I4), знаходимо значення $A_{nn}^{(i)}$ та $B_{nn}^{(i)}$. Числовий аналіз задачі проводився за допомогою складеної *FORTRAN* - програми.

Числові розрахунки проводили для безрозмірних параметрів $0 \leq \tau \leq 20$, $0 \leq R \leq 1$, $R_1 = 0,6$, $R_2 = 0,75$, $R_3 = 0,95$, $R_4 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1,1$, $\alpha_3 = 0,5$, $\alpha_4 = 0,8$, $\gamma_2 = 1,2$, $\gamma_3 = 0,9$, $\gamma_4 = 1$.

На рис. 1 показано розподіл безрозмірної температури $\theta(R, \tau)$ по часу τ при різних значеннях R . У початковий момент часу $\theta(R, 0) = 0$. Розрахунки показують, що з плином часу в інтервалі $0 < \tau < 10$ температура зростає і, починаючи з $\tau = 10$, набирає постійного значення. На рис. 2 зображено розподіл температури по просторовій координаті R при різних значеннях τ .

Таким чином, запропонований метод розрахунку температурних полів дає змогу ефективно аналізувати в розгортці просторових координат і часу зміну температурного поля в багатопаровому сферичному об'єкті в залежності від зовнішніх умов та теплофізичних характеристик матеріалів об'єкта. Даний метод вимагає на порядок менше "машинного" часу в порівнянні з іншими методами.

І. Мокрик Р.И., Олиарник И.В. Нестационарная задача термовязкоупругости для полупространства. К., 1984. 14 с. Рукопись деп. в УКРИНТИ, № 1569. 2. Мучник Г.Ф., Рубашов И.Б. Методы теории теплообмена. М., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.86

УДК 539.3

В.К.Опанасович, А.С.Копець

ПРО ПОБУДОВУ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ
ПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ,
ЯКІЇ МАЄ РОЗРИВ ПО ТВІРНІЙ

Розглянемо замкнуту безмежну циліндричну оболонку радіуса R і товщини $2h$, навантажену поверхневими зусиллями. Серединну поверхню оболонки віднесемо до ортогональної системи безрозмірних координат α, β , які введено таким чином, щоб координатна лінія $\beta = \text{const}$ збігалася з твірною оболонки, а перша квадратична форма поверхні мала вигляд $dS^2 = l^2 d\alpha^2 + l^2 d\beta^2$ (l — деякий лінійний параметр оболонки).

Виходитимемо з рівнянь рівноваги для циліндричної оболонки [3,4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} &= -l q_1, \\ \frac{\partial N_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \frac{2}{R} \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= -l q_2 - \frac{l}{R} m_2, \\ \frac{l}{R} N_2 - \frac{1}{l} \left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial \beta^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} \right) &= l q_n + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial m_2}{\partial \beta}, \\ Q_1^* &= \frac{1}{l} \left(\frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial H}{\partial \beta} \right) + m_1, \\ Q_2^* &= \frac{1}{l} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \beta} + 2 \frac{\partial H}{\partial \alpha} \right) + m_2, \end{aligned}$$

і диференціальних співвідношень між зусиллями N_1, N_2, S (I), моментами M_1, M_2, H та переміщеннями u, v, w і кутами повороту нормалі θ_1, θ_2 у формі [3]

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{B}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu \frac{\partial v}{\partial \beta} + \nu \frac{l}{R} W \right), \quad M_1 = -\frac{B}{l} a^2 R^2 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} + \nu \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} \right), \\
N_2 &= \frac{B}{l} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{l}{R} W \right), \quad M_2 = -\frac{B}{l} a^2 R^2 \left(\nu \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} \right), \\
S &= \frac{B}{l} \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \right), \quad H = -\frac{B}{l} a^2 R^2 (1-\nu) \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha},
\end{aligned} \quad (2)$$

де $\theta_1 = \frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial \alpha}$; $\theta_2 = \frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial \beta} - \frac{\nu}{R}$;

$$B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}; \quad a^2 = \frac{h^2}{3R^2}; \quad (3)$$

E, ν - модуль пружності і коефіцієнт Пуассона оболонки.

Нехай S_0 - область зміни криволінійних координат α, β , а L - координатна лінія $\beta = \beta_0$. Встановимо загальний вигляд розв'язку рівнянь (1), (2), коли переміщення, кути повороту, зусилля та моменти мають розрив першого роду вздовж лінії L . З цією метою дані величини розглядаємо як узагальнені функції $[I]$ в області S_0 . Тоді, перейшовши в співвідношеннях (1)-(3) до узагальнених похідних, дістаємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} N_1 + \frac{\partial}{\partial \beta} S &= -l q_1 + [S] \delta_0(\beta_1), \\
\frac{\partial}{\partial \beta} N_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha} S + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} M_2 + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} H &= -l q_2 - \frac{l}{R} m_2 + [N_2] \delta_0(\beta_1) + \frac{1}{R} [M_2] \delta_0(\beta_1), \\
\frac{l}{R} N_2 - \frac{1}{l} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} M_1 - \frac{\partial}{\partial \beta} Q_2^* &= l q_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} m_1 - [Q_2^*] \delta_0(\beta_1), \\
Q_1^* &= \frac{1}{l} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} M_1 + 2 \frac{\partial}{\partial \beta} H \right) + m_1 + \frac{B}{l^2} a^2 R^2 (1-\nu) \left[\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} \right] \delta_0(\beta_1), \\
Q_2^* &= \frac{1}{l} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} M_2 + 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} H \right) + m_2 - \frac{1}{l} [M_2] \delta_0(\beta_1);
\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{B}{l} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} u + \nu \frac{\partial}{\partial \beta} v + \nu \frac{l}{R} W \right) - \nu [v] \delta_0(\beta_1) \right), \quad M_1 = -\frac{B}{l} a^2 R^2 \left(\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \theta_1 + \nu \frac{\partial}{\partial \beta} \theta_2 \right) - \nu [\theta_2] \delta_0(\beta_1) \right), \\
N_2 &= \frac{B}{l} \left(\left(\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} u + \frac{\partial}{\partial \beta} v + \frac{l}{R} W \right) - [v] \delta_0(\beta_1) \right), \quad M_2 = -\frac{B}{l} a^2 R^2 \left(\left(\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} \theta_1 + \frac{\partial}{\partial \beta} \theta_2 \right) - [\theta_2] \delta_0(\beta_1) \right),
\end{aligned}$$

$$S = \frac{B}{l} \frac{1-\nu}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} v + \frac{\partial}{\partial \beta} u \right) - [u] \delta_0(\beta_1) \right), \quad H = -\frac{B}{l} a^2 R^2 (1-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} \theta_2; \quad (5)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \alpha} w, \quad \theta_2 = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \beta} w - \frac{\nu}{R} - \frac{1}{l} [w] \delta_0(\beta_1). \quad (6)$$

Тут і далі $\frac{\partial}{\partial \alpha} f$, $\frac{\partial}{\partial \beta} f$ - узагальнені похідні функції f по координатах α і β відповідно; $\delta_0(\beta_1) = 2\pi \frac{R}{l}$ - періодична дельта-функція; $\beta_1 = \beta - \beta_0$;

$$[f] = f(\alpha, \beta_0 + 0) - f(\alpha, \beta_0 - 0).$$

Зауважимо, що при отриманні співвідношень (4)-(6) використано правило знаходження узагальнених похідних кусково-однорідних функцій, коли відома звичайна (класична) похідна та величина стрибка у точці розриву [і]. Для випадку функції двох змінних α, β , що має розрив по лінії $\beta = \beta_0$, це правило дає

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} f = \frac{\partial f}{\partial \beta} + [f] \delta_0(\beta - \beta_0).$$

Підставляючи у рівняння (4) вирази для зусиль, моментів кутів повороту (5), (6), приходимо до системи рівнянь у переміщеннях, матричний запис якої має вигляд

$$M \cdot \bar{U}(\alpha, \beta) = \bar{P}(\alpha, \beta), \quad (7)$$

де

$$M = \| m_{ij} \|_{3 \times 3};$$

$$\bar{U} = \| u, v, w \|^T;$$

$$\bar{P} = \| X, Y, Z \|^T;$$

$$m_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \quad m_{12} = m_{21} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta};$$

$$m_{13} = m_{31} = \nu \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha}; \quad m_{22} = \frac{1-\nu}{2} (1 + 4a^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (1 + a^2) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2};$$

$$m_{23} = m_{32} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} - a^2 \frac{R}{l} ((2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{\partial^3}{\partial \beta^3});$$

$$m_{33} = \frac{l^2}{R^2} + a^2 \frac{R^2}{l^2} \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right);$$

$$\begin{aligned}
X &= \frac{l}{B} \left\{ -lq_1 + [S]\delta_0(\beta_1) + \nu \frac{B}{l} \frac{d}{d\alpha} [V]\delta_0(\beta_1) + \frac{B}{l} \frac{1-\nu}{2} [U]\delta_0(\beta_1) \right\}; \\
Y &= \frac{l}{B} \left\{ -lq_2 - \frac{l}{R} m_2 + [N_2]\delta_0(\beta_1) + \frac{1}{R} [M_2]\delta_0(\beta_1) + \frac{B}{l} [V]\delta_0'(\beta_1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{l} \frac{1-\nu}{2} \frac{d}{d\alpha} [U]\delta_0(\beta_1) - \frac{B}{l} a^2 \frac{R}{l} (l[\theta_2]\delta_0'(\beta_1) + [W]\delta_0''(\beta_1) + (2-2\nu) \frac{d^2}{d\alpha^2} [W]\delta_0'(\beta_1)) \right\}, \\
Z &= \frac{l}{B} \left\{ lq_n + \frac{\partial}{\partial \alpha} m_1 + \frac{\partial}{\partial \beta} m_2 - [Q_2^*]\delta_0(\beta_1) - \frac{1}{l} [M_2]\delta_0'(\beta_1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{l} a^2 \frac{R^2}{l^2} (l[\theta_2]\delta_0''(\beta_1) + [W]\delta_0'''(\beta_1) + \nu l \frac{d^2}{d\alpha^2} [\theta_2]\delta_0(\beta_1) + \right. \\
&\quad \left. + (2-\nu) \frac{d^2}{d\alpha^2} [W]\delta_0'(\beta_1)) + \frac{B}{R} [V]\delta_0(\beta_1) \right\}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що в праву частину рівнянь (6) увійшли стрибки лише від функцій $U, V, W, \theta_2, N_2, S, M_2$ та Q_2^* . Приймаючи $[N_2] = [S] = [Q_2^*] = [M_2] = 0, \forall \alpha$ і $[U] = [V] = [W] = [\theta_2] = 0, \forall \alpha: |\alpha| > 1$, отримуємо систему рівнянь у переміщеннях, яка описує деформацію непологої циліндричної оболонки з поведовжнім розрізом [3]. Якщо ж $[U] = [V] = [W] = [\theta_2] = 0, \forall \alpha$, то дістаємо рівняння для знаходження переміщень в оболонці, навантаженій зосередженими силами по твірній. Частковий розв'язок системи рівнянь (6) знаходимо в класі узагальнених функцій методом матриць Гріна [2]

$$\bar{U}(\alpha, \beta) = \frac{l^2}{a^2 R^2} \frac{2}{1-\nu} \iint_{S_0} G(\alpha - \xi, \beta - \eta) \bar{P}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (8)$$

Матрицю Гріна G записуємо у формі

$$G(\alpha, \beta) = \frac{\partial}{\partial \alpha} D \varphi(\alpha, \beta),$$

де $D = \|d_{ij}\|_{3 \times 3}$ - матриця алгебраїчних доповнень до матриці

M ; $\varphi(\alpha, \beta)$ - узагальнений розв'язок скалярного рівняння;

$$\frac{l^2}{a^2 R^2} \frac{2}{1-\nu} \det M \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi(\alpha, \beta) = \delta(\alpha) \delta_0(\beta), \det M - \text{визначник матриці } M.$$

Використавши властивості згортки узагальнених функцій [1], представлення (8) зведемо до вигляду

$$\bar{U}(\alpha, \beta) = \bar{U}_0(\alpha, \beta) + \frac{l^2}{a^2 R^2} \frac{2}{1-\nu} \frac{l}{B} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} R_{1j} \\ R_{2j} \\ R_{3j} \end{bmatrix} \varphi(\alpha - \xi, \beta - \beta_0) f_j(\xi) d\xi, \text{ де } (9)$$

$$f_1 = \frac{B}{l} \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right]; f_2 = \frac{B}{l} \left[\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right]; f_3 = B a^2 \frac{R^2}{l^3} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right]; f_4 = B a^2 \frac{R^2}{l^2} \left[\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} \right];$$

$$f_5 = [N_2]; f_6 = [S]; f_7 = \frac{1}{l} [M_2]; f_8 = \left[\int_{-\infty}^{\alpha} Q_2^* d\alpha \right];$$

$$R_{i1} = \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} d_{i1} + \frac{\partial}{\partial \alpha} d_{i2} \right), R_{i2} = \nu \frac{\partial}{\partial \alpha} d_{i1} + \frac{\partial}{\partial \beta} d_{i2} + \frac{l}{R} d_{i3};$$

$$R_{i3} = (2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} d_{i3} + \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} (d_{i3}) d\alpha + \frac{l}{R} \left((2-2\nu) \frac{\partial}{\partial \alpha} d_{i2} + \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (d_{i2}) d\alpha \right);$$

$$R_{i4} = \nu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} d_{i3} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} d_{i3} - \frac{l}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} d_{i2};$$

$$R_{i5} = \frac{\partial}{\partial \alpha} d_{i2};$$

$$R_{i6} = \frac{\partial}{\partial \alpha} d_{i1};$$

$$R_{i7} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} d_{i3} - \frac{l}{R} d_{i2};$$

$$R_{i8} = -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} d_{i3}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Складова частина розв'язку $\bar{U}_0$ визначається розподіленням навантажень q_1, q_2, q_n, m_1, m_2 , яке діє на оболонку в області $S_0 \setminus L$,

$$\bar{U}_0(\alpha, \beta) = \frac{l^2}{a^2 R^2} \frac{2}{1-\nu} \iint_{S_0} G(\alpha - \xi, \beta - \eta) \begin{bmatrix} -\frac{l^2}{B} q_1 \\ -\frac{l^2}{B} (q_2 + \frac{1}{R} m_2) \\ \frac{l}{B} (l q_n + \frac{\partial m_1}{\partial \xi} + \frac{\partial m_2}{\partial \eta}) \end{bmatrix} d\xi d\eta.$$

Зрозуміло, що для отримання загального розв'язку рівняння до часткового розв'язку (8) або (9) слід додати розв'язок однорідного рівняння $M\bar{U}(\alpha, \beta) = 0$. Маючи розв'язок рівнянь (6)

у переміщеннях, який знайдено в класі узагальнених функцій в області S_0 , легко встановити кути повороту, зусилля та моменти для області $S_0 \setminus L$. Для цього достатньо скористатись співвідношеннями (5).

І. В л а д и м и р о в В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976. 2. Г р и г о л ю к Э.И., Т о л к а ч е в В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М., 1980. 3. О с а д - ч у к В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. К., 1985. 4. П о д с т р и г а ч Я.С., Ш в е ц Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К., 1978.

Стаття надійшла до редколегії 18.12.85

УДК 519.6

Ю.М.Щербіна, Б.М.Голуб

ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ З ПАМ'ЯТТЮ З ВИКОРИСТАННЯМ LDL^T - РОЗКЛАДУ ХОЛЕСЬКОГО ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянемо задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in E^n, \quad (I)$$

де E^n - n - мірний евклідов простір.

Для розв'язування задачі (I) запропоновано ітераційний метод з пам'яттю, порядок збіжності якого $1 + \sqrt{2} \approx 2,41 [3]$. Однак цей метод забезпечує лише локальну збіжність.

Пропонуємо метод з регулюванням кроку, який поряд із збереженням високої швидкості збіжності збігатиметься до розв'язку задачі (I) з довільного початкового наближення.

Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційована і $f''(x)$ - матриця її других похідних. Побудуємо $[I]$ матрицю $F(x)$, пов'язану з $f''(x)$ наступним чином:

$$F(x) = LDL^T = f''(x) + E(x), \quad (2)$$

де L і D - фактори розкладу Холевського матриці $F(x)$; L - нижня одинична трикутна матриця; D - додатна діагональна матриця;

$E(x)$ - діагональна матриця поправок. Матриця $F(x)$ - додатно визначена і відрізняється від $f''(x)$ лише діагональними еле-

ментами. Зауважимо, що коли $f''(x)$ додатно визначена, то $F(x) = f''(x)$.

Дослідимо наступний ітераційний метод для розв'язування задачі (1):

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k F^{-1}(\bar{x}_k) f'(x_k),$$

$$\bar{x}_k = \begin{cases} x_0, & \text{якщо } k=0 \\ x_k - \frac{1}{2} \alpha_{k-1} F^{-1}(\bar{x}_{k-1}) f'(x_k), & \text{якщо } k=1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (3)$$

де $F(x)$ визначається формулою (2) [1], а крок α_k вибирається наступним чином [2]. Прийmemo $\alpha = 1$ і дробимо його шляхом множення на константу γ ($0 < \gamma < 1$) до виконання нерівності

$$f(x_k + \alpha \rho_k) \leq f(x_k) + \varepsilon \alpha \langle f'(x_k), \rho_k \rangle, \quad (4)$$

де $\rho_k = -F^{-1}(\bar{x}_k) f'(x_k)$; $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярний добуток.

Достатні умови збіжності методу (3) дає наступна теорема.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ обмежена знизу і $f(x) \in C^2(E^n)$. Тоді для методу (3) $\|f'(x_k)\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, яка б не була початкова точка x_0 .

Якщо, крім того, $f(x) \in C^3(E^n)$, $\|f'''(x)\| \leq R$,

$$\|f'''(x) - f'''(y)\| \leq K \|x - y\|, \quad x, y \in E^n, \quad R = \text{const} > 0, \quad K = \text{const} > 0$$

і функція $f(x)$ сильно випукла у деякому околі точки x_* , де x_* - єдина точка, в якій виконуються необхідні умови екстремуму, то незалежно від вибору початкової точки x_0 послідовність $\{x_k\}$, визначена умовами (3), збігається до x_* , причому справедлива оцінка

$$\|x_{N+j} - x_*\| \leq C q^{z_{N+j}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

де q, N і C - деякі константи: $0 < q < 1, 0 \leq N < \infty, 0 < C < \infty$ і

$$z_N = 1, z_{N+1} = 2, z_{N+j} = 2z_{N+j-1} + z_{N+j-2}, \quad j = 2, 3, 4, \dots$$

Доведення. Оскільки матриці $F_k = F(\bar{x}_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ симетричні та додатно визначені [1], то вектори $\rho_k = -F_k^{-1} f'_k$, де $f'_k = f'(x_k)$, характеризують напрямки спуску функції $f(x)$. У цьому випадку існує [2] точка $\alpha_k \neq 0$, коли умова (4) виконуватиметься, тобто

$$f_{k+1} - f_k \leq -\varepsilon \alpha_k \langle f'_k, F_k f'_k \rangle < 0, \quad (6)$$

якщо $\|f'_K\| \neq 0$ (тут $f_K = f(x_K)$). З обмеженості знизу функції $f(x)$ і (6) випливає, що при $K \rightarrow \infty$ $(f_{K+1} - f_K) \rightarrow 0$ і $\|f'_K\| \rightarrow 0$. Це й доводить першу частину теореми.

Оскільки точка x_* єдина, в якій виконуються необхідні умови екстремуму, а $\|f'_K\| \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$, то послідовність $\{x_K\}$ збігається до x_* . Внаслідок сильної випуклості функції $f(x)$ в околі точки x_* матриця $f''(x)$ додатно визначена, а тому в цьому околі $F(x) = f''(x)$.

Проводячи такі ж міркування, як і при доведенні теореми про збіжність узагальненого методу Ньютона [2], можна показати, що, починаючи з деякої ітерації, в методі (3) $\alpha_K \equiv 1$.

Далі внаслідок збіжності послідовності $\{x_K\}$ до x_* на деякій ітерації N виконується нерівність

$$l \|f'_N\| \leq m q,$$

де $\frac{m}{2} = \mathcal{H} > 0$ — константа сильної випуклості функції $f(x)$ в околі точки x_* ; $l^2 = \frac{R^2}{m^2} + \frac{2}{3} \frac{K}{m}$, а це означає, що задовольняються всі умови теореми [3] і наявна оцінка (5). Теорема доведена.

Зауважимо, що для побудови LDL^T — розкладу з уточненням при необхідності діагональних елементів матриці D потрібно виконати приблизно $\frac{n^3}{6}$ операцій, а для знаходження векторів $(x_K - x_{K-1})$ і $(\bar{x}_K - x_K)$ необхідно чотири рази розв'язати систему лінійних рівнянь з відомими одиничними трикутними матрицями [1]. Це означає, що кількість обчислень на кожній ітерації у методі (3) без врахування затрат на визначення α_K не перевищує кількості обчислень у методі [3]. Порівняно з узагальненим методом Ньютона [2] збільшення кількості арифметичних операцій на кожній ітерації незначне [3], а швидкість збіжності суттєво більша. Крім того, метод (3) дає змогу знаходити точки x_K , в яких $\|f'_K\| = 0$, без вимоги сильної випуклості на функцію $f(x)$, і, якщо x_K — сідлова точка, то можна визначити напрямок від'ємної кривизни [1] (вектор, що задовольняє нерівність $\rho_K^T F_K \rho_K < 0$) і продовжувати пошук точки мінімуму.

І. Г и л л Ф., М ю р р е й У., Р а й т М. Практическая оптимизация. М., 1985. 2. П ш е н и ч н ы й Б.Н., Д а н и л я н Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., 1975. 3. Щ е р б и н а Ю.М., Г о л у б Б.М. Збіжність ітераційного методу з пам'яттю для мінімізації функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С. 3-7.

Стаття надійшла до редколегії 12.12.85

ОДНА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Розглянемо задачу

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad x \in E^n \quad (I)$$

при обмеженнях $f_i(x) \leq 0, i \in J^-, f_i(x) = 0, i \in J^0$, де E^n — n — мірний евклідов простір; J^0, J^- — скінченні множини індексів.

Не зменшуючи загальності [2], можна розглядати задачу (I) при наявності обмежень лише типу нерівностей

$$f_i(x) \leq 0, \quad i \in J = \{1, 2, \dots, l\}. \quad (2)$$

За умови, що функції $f_i(x), i \in \{0\} \cup J$ сильно випуклі, досліджено [1] варіант методу лінеаризації з надлінійною швидкістю збіжності до точки x_* , в якій задовольняються необхідні умови екстремуму задачі (I)–(2).

Пропонуємо модифікований метод лінеаризації, який поряд зі збереженням високої швидкості збіжності не ставить ніяких вимог щодо випуклості функцій.

На кожній ітерації методу потрібно розв'язувати задачу

$$\min_p \left\{ \langle f'_0(x), p \rangle + \frac{1}{2} \langle p, Ap \rangle : \langle f'_i(x), p \rangle + f_i(x) \leq 0, i \in J_\delta(x) \right\}, \quad (3)$$

де $J_\delta(x) = \{i \in J : f_i(x) \geq F(x) - \delta\}; \delta > 0;$

$$F(x) = \max\{0, f_1(x), \dots, f_l(x)\},$$

а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярний добуток.

Розв'язок задачі (3) і її множники Лагранжа позначимо відповідно через $p(x)$ і $u^i(x), i \in J_\delta(x)$. Позначимо також через $J_\delta^0(x)$ множину індексів активних обмежень задачі (3):

$$J_\delta^0(x) = \{i \in J_\delta(x) : \langle f'_i(x), p(x) \rangle + f_i(x) = 0\}.$$

Матрицю A будемо наступним чином.

Нехай матриця $B(x, u, h)$ складається з елементів

$$h^{-2} [L(x + (e_i + e_j)h, u) - L(x + e_i h, u) - L(x + e_j h, u) + L(x, u)],$$

де $L(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^l u^i f_i(x)$ — функція Лагранжа задачі (I)–(2); e_i — одиничні орти простору E^n . Очевидно, що $B(x, u, h)$ є наближення з точністю до порядку h матриці $L''_{xx}(x, u)$, якщо $f_i \in C^2, i \in \{0\} \cup J$.

Для симетричної матриці $B(x, u, h)$ можна побудувати модифіковане LDL^T - розбиття Холеського [1] і отримати додатно визначену матрицю

$$A = LDL^T = B + E, \quad (4)$$

де L - одинична нижня трикутна матриця; D, E - невід'ємні діагональні матриці; T - транспонування. Всі матриці в (4) залежать від x, u і h .

Для розв'язування задачі (1)-(2) дослідимо наступний алгоритм.

Нехай вибрані [2] числа $N > 0, \delta > 0, h_0 > 0, 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, а також параметр модифікованого розбиття Холеського $\bar{\pi} > 0$ [1] і початкове наближення x_0 . Приймаємо $u_{-1} = 0, u_{-1} \in E^l$.

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка x_k , вектор множників Лагранжа u_{k-1} і число h_k вже побудовані.

1. Обчислюємо матрицю $B_k = B(x_k, u_{k-1}, h_k)$ і будуємо для неї модифікований розклад Холеського. В результаті отримуємо додатно визначену матрицю $A_k = A(x_k, u_{k-1}, h_k)$.

2. Розв'язуючи задачу (3) при $x = x_k, A = A_k$, обчислюємо $p_k = p(x_k), u_k^i = u^i(x_k), i \in J_\delta(x_k)$. Приймаємо $u_k^i = 0, i \notin J_\delta(x_k)$.

3. Вважаємо, що $h_{k+1} = \min(h_k, \|p_k\|)$.

4. Починаючи з $\alpha = 1$, дробимо його шляхом ділення навпіл до першого виконання нерівності

$$f_0(x_k + \alpha p_k) + NF(x_k + \alpha p_k) \leq f_0(x_k) + NF(x_k) - \alpha \varepsilon \langle A_k p_k, p_k \rangle. \quad (5)$$

Приймаємо $x_{k+1} = x_k + \alpha p_k$ і повертаємося до кроку 1.

Процес припиняється, якщо $\|p_k\| \leq \varepsilon_1$, де ε_1 - задана точність.

Достатні умови збіжності алгоритму дає наступна теорема.

Теорема. Нехай виконуються умови:

1) множина $\Omega_0 = \{x: f_0(x) + NF(x) \leq f_0(x_0) + NF(x_0)\}$ компактна;

2) задача (3) має розв'язок відносно $p \in E^n$ при довільному

$x \in \Omega_0$ і існують множники Лагранжа $u^i(x), i \in J_\delta(x)$, що $\sum_{i=1}^l u^i(x) \leq N$;

3) функції $f_i \in C^2, i \in \{0\} \cup J$;

4) градієнти $f'_i(x), i \in J_* = \{i \in J: f_i(x_*) = 0\}$ лінійно незалежні і $u_*^i = u^i(x_*) > 0, i \in J_*$;

5) $\langle L''_{xx}(x_*, u_*)p, p \rangle > 0$ для всіх $p \neq 0$, які задовільняють рівності $\langle f'_i(x_*), p \rangle = 0$, $i \in J_*$, де x_* - єдина точка, в якій виконуються необхідні умови екстремуму.

Тоді послідовність $\{x_k\}$ збігається до x_* швидше будь-якої геометричної прогресії.

Доведення. З алгоритму модифікованого розкладу Холезького випливає [1], що найменше власне число m_k матриці A_k задовольнятиме умову $m_k \geq m > 0$ (m залежить від параметра $\bar{m}$), а тому

$$\langle A_k p, p \rangle \geq m_k \|p\|^2 \geq m \|p\|^2, \quad k=0,1,2,\dots, \quad p \in E^n.$$

Оскільки $f_i \in C^2$, $i \in \{0\} \cup J$, то $\|L''_{xx}(x, u)\| \leq M_1 < \infty$ для всіх $x \in \Omega_0$, при яких $\sum_{i=1}^l u_i \leq N$. Враховуючи, що норма матриці E_k обмежена, якщо обмежена норма матриці B_k [1], можемо записати

$$\begin{aligned} \|A_k\| &= \|B_k + E_k\| \leq \|B_k - L''_{xx}(x_k, u_{k-1})\| + \\ &+ \|L''_{xx}(x_k, u_{k-1})\| + \|E_k\| \leq M_2 h_k + M_1 + M_3 \leq M < \infty. \end{aligned}$$

Звідси $\langle A_k p, p \rangle \leq M \|p\|^2$, $k=0,1,2,\dots, p \in E^n$.

Тепер виконуються всі умови теореми збіжності для модифікованого методу лінеаризації [2], тому $F_k = F(x_k) \rightarrow 0$ і довільна гранична точка послідовності $\{x_k\}$ задовольняє обмеження (2) і необхідні умови екстремуму.

Оскільки x_* - єдина точка, в якій виконуються необхідні умови екстремуму, то

$$x_k \rightarrow x_*, u_k \rightarrow u_*, p_k \rightarrow 0, F_k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (6)$$

З врахуванням (6) для достатньо великих k [2]

$$J_\delta^0(x_k) = J_*, u_k^i > 0, i \in J_*, u_k^j = 0, j \notin J_*. \quad (7)$$

Звідси, а також з умови 5 теореми випливає, що в деякому околі точки x_* матриці $L''_{xx}(x_k, u_{k-1})$ і $B(x_k, u_{k-1}, h_k)$ додатно визначені, а тому $A_k = B_k$. Множину індексів K , для яких виконується ця умова і (7), позначимо через K .

Аналогічно [2] можна показати, що $B(x_k, u_{k-1}, h_k) \rightarrow L''_{xx}(x_*, u_*)$ при $k \rightarrow \infty, k \in K$.

Нехай $C_0 = L''_{xx}(x_*, u_*)$, $p_0(x)$ - розв'язок задачі (3) при $A = C_0$, $u_0(x)$ - відповідні множники Лагранжа. Мають місце співвідношення [2]

$$\rho_0(x) = -(x - x_*) + \omega(x - x_*),$$

$$\|\omega(x - x_*)\| \leq \lambda(x) \|x - x_*\|, \quad \lim_{x \rightarrow x_*} \lambda(x) = 0, \quad (8)$$

$$\|\rho_K - \rho_0(x_K)\| \leq R \|C_0 - A_K\| \cdot \|\rho_0(x_K)\|, \quad K \in K, \quad R > 0. \quad (9)$$

Покажемо, що послідовність $\{x_K\}$ збігається до x_* із швидкістю щонайменше геометричної прогресії.

З (8) випливає

$$\begin{aligned} x_{K+1} &= x_K + \alpha_K \rho_K = x_K + \rho_0(x_K) + \alpha_K \rho_K - \rho_0(x_K) + \alpha_K \rho_0(x_K) - \alpha_K \rho_0(x_K) = \\ &= x_* + \omega(x - x_*) + \alpha_K (\rho_K - \rho_0(x_K)) - (1 - \alpha_K) \rho_0(x_K). \end{aligned}$$

Далі з врахуванням (8) і (9)

$$\begin{aligned} \|x_{K+1} - x_*\| &\leq \|\omega(x_K - x_*)\| + \alpha_K \|\rho_K - \rho_0(x_K)\| + (1 - \alpha_K) \|\rho_0(x_K)\| \leq \\ &\leq \|\omega(x_K - x_*)\| + [\alpha_K R \|C_0 - A_K\| + 1 - \alpha_K] \|\rho_0(x_K)\| \leq \\ &\leq [2 + \alpha_K (R \|C_0 - A_K\| - 1)] \|\omega(x_K - x_*)\| + [1 + \alpha_K (R \|C_0 - A_K\| - 1)] \|x_K - x_*\| \leq \\ &\leq [R_1 \lambda(x_K) + \alpha_K \|C_0 - A_K\| + (1 - \alpha_K)] \|x_K - x_*\|. \end{aligned}$$

Оскільки $0 < \alpha_K \leq 1$ і $\lim_{K \rightarrow \infty} \alpha_K \neq 0$ [2], то існує таке число $\varepsilon > 0$, що $\alpha_K > \varepsilon$ для всіх K . Враховуючи (6) і (8), легко бачити, що $R_1 \lambda(x_K) + \alpha_K \|C_0 - A_K\| \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$, а тому, починаючи з деякого K_0 ,

$$\|x_{K+1} - x_*\| \leq (\varepsilon + 1 - \alpha_K) \|x_K - x_*\| \leq q \|x_K - x_*\|, \quad (10)$$

де $0 < q < 1$.

Покажемо тепер, що існує нескінченна підпослідовність $\{x_{K_j}\}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, для якої

$$\|x_{K_j+1} - x_*\| \leq q_{K_j} \|x_{K_j} - x_*\|, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} q_{K_j} = 0.$$

Нехай $i \in J_*$. Тоді з неперервності функції $f_i(x)$ випливає, що в деякому околі точки x_* необхідно $f_i(x) \leq \eta < 0$. Оскільки $x_K \rightarrow x_*$, то при достатньо великих K

$$f_i(x_K) \leq \eta < 0, \quad i \in J_*. \quad (11)$$

Враховуючи, що $F_K \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$, нескінченну кількість разів $F_{K+1} \leq F_K$. Позначимо множину індексів $K \in K$, що задовольняють цю нерівність і (11), через K_0 .

Нехай $K \in K_0$. З огляду на необхідні умови екстремуму для задачі (3) наявна [2] рівність

$$\langle f'_0(x_K), \rho_K \rangle = \sum_{i \in J_*} u_K^i f_i(x_K) - \langle \rho_K, A_K \rho_K \rangle. \quad (I2)$$

Оцінімо зміну функцій $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ при зсуві з точки x_K у напрямку ρ_K з кроком $\alpha_K = 1$.

Для $i \notin J_*$ наявна нерівність (II).

Для $i \in J_*$, використовуючи формулу Тейлора, отримаємо

$$f_i(x_K + \rho_K) = f_i(x_K) + \langle f'_i(x_K), \rho_K \rangle + \frac{1}{2} \langle f''_i(\theta_K^i) \rho_K, \rho_K \rangle, \quad (I3)$$

де $\theta_K^i = x_K + \xi_i \rho_K$, $0 \leq \xi_i \leq 1$. Оскільки ρ_K є розв'язком задачі (3), то $\langle f'_i(x_K), \rho_K \rangle + f_i(x_K) = 0$ для $i \in J_*$. Тому (I3) можна переписати у вигляді

$$f_i(x_K + \rho_K) = \frac{1}{2} \langle f''_i(\theta_K^i) \rho_K, \rho_K \rangle. \quad (I4)$$

Розкладаючи в ряд Тейлора функцію $f_0(x_K + \rho_K)$ і використовуючи (I2), аналогічно до попереднього одержуємо

$$f_0(x_K + \rho_K) = f_0(x_K) + \sum_{i \in J_*} u_K^i f_i(x_K) + \frac{1}{2} \langle f''_0(\theta_K^0) \rho_K, \rho_K \rangle - \langle \rho_K, A_K \rho_K \rangle,$$

де $\theta_K^0 = x_K + \xi_0 \rho_K$, $0 \leq \xi_0 \leq 1$.

Звідси і з (I4) випливає, що

$$f_0(x_K + \rho_K) + \sum_{i \in J_*} u_K^i f_i(x_K + \rho_K) = f_0(x_K) + \sum_{i \in J_*} u_K^i f_i(x_K) + \frac{1}{2} \langle f''_0(\theta_K^0) \rho_K, \rho_K \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i \in J_*} u_K^i \langle f''_i(\theta_K^i) \rho_K, \rho_K \rangle - \langle \rho_K, A_K \rho_K \rangle.$$

Далі, тому що $K \in K_0$, отримуємо

$$f_0(x_K + \rho_K) + NF(x_K + \rho_K) \leq f_0(x_K) + NF(x_K) + \frac{1}{2} \langle [f''_0(\theta_K^0) + \sum_{i \in J_*} u_K^i f''_i(\theta_K^i)] \rho_K, \rho_K \rangle - \langle \rho_K, A_K \rho_K \rangle.$$

Очевидно, що при $K \rightarrow \infty$ $\langle \rho_K, A_K \rho_K \rangle \rightarrow \langle \rho_K, C_0 \rho_K \rangle$, $\theta_K^i \rightarrow x_*$, $i \in \{0\} \cup J_*$, а також $\frac{1}{2} \langle [f''_0(\theta_K^0) + \sum_{i \in J_*} u_K^i f''_i(\theta_K^i)] \rho_K, \rho_K \rangle \rightarrow \frac{1}{2} \langle C_0 \rho_K, \rho_K \rangle$. Тому для достатньо великих $K \in K_0$ нерівність (5) виконується при $\alpha = 1$ і $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Використовуючи цей результат, аналогічно [2] можна показати, що, починаючи з деякого $K_1 \in K_0$,

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq q_k \|x_k - x_*\|, \quad q_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, k \in K_0. \quad (15)$$

Об'єднуючи (10) і (15) і враховуючи нескінченність множини K_0 , отримуємо, що послідовність $\{x_k\}$ збігається до x_* швидше довільної геометричної прогресії.

Розглянемо тепер деякі обчислювальні аспекти методу. Всі міркування відносно розв'язування задачі квадратичного програмування (3), вибору числа δ і контролю вибору константи N , викладені в праці [2], доцільно враховувати і при практичній реалізації розглянутого алгоритму.

Цільова функція двоїстої задачі для задачі (3) має вигляд

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2} \langle Cu, u \rangle - \langle d, u \rangle - \|R^{-1}f'_0(x)\|^2,$$

де $R = LD^{1/2}$ - нижня трикутна матриця; C - симетрична матриця, яка складається з елементів

$$\{C_{ij}\} = \{\langle R^{-1}f'_i(x), R^{-1}f'_j(x) \rangle\}, \quad i, j \in J_\delta(x),$$

а i -та компонента вектора d дорівнює $\langle R^{-1}f'_0(x), R^{-1}f'_i(x) \rangle - f_i(x)$, $i \in J_\delta(x)$. Відзначимо, що оскільки матриці L і D вже побудовані в ході розбиття Холевського, то розрахунок матриці R^{-1} не є складною обчислювальною процедурою.

Основний обсяг пам'яті ЕОМ при реалізації описаного алгоритму йде на збереження $n(n+1)/2$ елементів матриці A (або R^{-1}) і $l(l+1)/2$ елементів матриці C , причому обчислення елементів C_{ij} можна організувати так, що запам'ятовувати вектори $R^{-1}f'_i(x)$, $i \in J_\delta(x)$ немає потреби. При цьому кількість обчислень не збільшиться.

Кількість обчислень на одній ітерації описаного алгоритму і методу лінеаризації для сильно випуклих функцій [2] однакова. Проте під час реалізації запропонованої модифікації відсутня можливість робити невдалі кроки [2].

Відзначимо, що для побудови матриці $B(x, u, h)$ достатньо $n(n+3)/2$ звертань до обчислень функцій.

Маючи в наявності LDL^T - розбиття матриці A , можна контролювати її зумовленість [1], а отже керувати чисельною стійкістю методу.

І. Г и л л Ф., М у р р е й У., Р а й т М. Практическая оптимизация. М., 1985. 2. П ш е н и ч н ы й Б.Н. Метод линеаризации. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.85

УДК 517.946

М.М.Притула, В.М.Цимбал

ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО
ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Рівняння другого порядку гіперболічного типу з малим параметром при старшій похідній по часу, що вироджується у параболічне рівняння другого порядку при нульовому значенні параметра, трапляється у багатьох прикладних задачах [1, 3]. Відомі праці, у яких одержана асимптотика по малому параметру розв'язку задачі Коші та змішаної задачі. Однак подекуди, наприклад [5], одержується асимптотика, а питання обґрунтування асимптотичної коректності, тобто оцінки залишкового члена, не береться до уваги.

В області $D = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ розглядається рівняння

$$\varepsilon a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + d(x, t) u = f(x, t, \varepsilon) \quad (1)$$

з початковими

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

і граничними умовами вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \gamma u(0, t) - \alpha u(l, t) - \delta \frac{\partial u(0, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} &= \alpha u(0, t) + \beta u(l, t) + \delta \frac{\partial u(l, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3)$$

або

$$u(l, t) = \rho u(0, t),$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \tau u(0,t).$$

(4)

Асимптотику розв'язку задач (I)–(3) або (I), (2), (4) у багатьох випадках можна легко побудувати і ми на цьому зупинятися не будемо. Наша мета – одержання оцінки розв'язку наведених задач, з якої випливає коректність цих асимптотик.

Вважаємо виконаними умови

$$1) \quad a(x,t), d(x,t) \in C^1(D); \quad b(x,t), c(x,t), f(x,t) \in C(D)$$

(зауважимо, що для побудови асимптотики необхідно вимагати більшу гладкість функцій, які входять у (I); вона залежить від порядку асимптотики);

$$2) \quad a(x,t) > 0, \quad b(x,t) > 0, \quad d(x,t) > 0 \quad \text{для } (x,t) \in D;$$

3) сталі $\delta \leq 0$, $\kappa \leq 0$, сталі $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \tau$ у граничних випадках можуть обертатися у нуль або нескінченність і задовольняють умови

$$\beta \leq 0, \quad \gamma \leq 0, \quad \alpha^2 + \beta\gamma \leq 0,$$

причому знаку рівності в одному з цих перших двох співвідношень повинен відповідати знак рівності у третьому, а в умовах (4) нерівності $\rho\tau \leq 0$.

Теорема. Нехай виконуються умови I–4, тоді розв'язок задачі (I)–(3) або (I), (2), (4) допускає оцінку

$$\sqrt{\iint_D (\varepsilon u_t^2 + u_x^2 + u) dD} \leq C \sqrt{\iint_D f^2 dD}, \quad (5)$$

де константа C не залежить від ε .

Доведення. При доведенні використовуємо метод інтегралів енергії [2,4]. Після домноження (I) на $2 \frac{\partial u}{\partial t}$ і елементарних перетворень, одержимо основні співвідношення

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \varepsilon a(x,t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + d(x,t) u^2 \right\} - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ & + 2b(x,t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \varepsilon a_t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - 2c(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + d_t u^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial t} f(x,t). \end{aligned} \quad (6)$$

Позначимо D_τ область $D_\tau = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq \tau\}$, де τ - довільне $0 \leq \tau \leq T$.

Після інтегрування (6) по D_τ з використанням формули Гауса-Остроградського і початкових умов (2) дописуємо

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[\varepsilon a(x, \tau) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + d(x, \tau) u^2 \right] dx - 2 \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l} dt + \\ & + 2 \iint_{D_\tau} b(x, t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dD_\tau = \varepsilon \iint_{D_\tau} a_t(x, t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dD_\tau - \\ & - 2 \iint_{D_\tau} c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} dD_\tau + \iint_{D_\tau} d_t(x, t) u^2 dD_\tau + 2 \iint_{D_\tau} \frac{\partial u}{\partial t} f dD_\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Введемо позначення $I = -2 \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l} dt$. Міркуючи так само як і в праці [4] і використовуючи граничні умови (3), (4) і припущення 3, неважко переконатися, що $I \geq 0$.

Застосовуючи нерівність Коші з параметром, одержуємо

$$2 \iint_{D_\tau} \left| c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right| dD_\tau \leq c\mu \iint_{D_\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dD_\tau + \frac{c}{\mu} \iint_{D_\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dD_\tau, \quad (8)$$

$$2 \iint_{D_\tau} \left| \frac{\partial u}{\partial t} f \right| dD_\tau \leq \nu \iint_{D_\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dD_\tau + \frac{1}{\nu} \iint_{D_\tau} f^2 dD_\tau, \quad (9)$$

де $C = \max_{(x, t) \in D} |c(x, t)|$, $\mu > 0$, $\nu > 0$ - параметри, які вибираємо так, що $2B - \nu - c\mu \geq 0$, $B = \min_{(x, t) \in D_\tau} b(x, t)$.

Тоді (7) можна оцінити наступним чином.

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 + u^2(x, \tau) \right\} dx \leq \\ & \leq \frac{K}{N} \iint_{D_\tau} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u^2 \right\} dD_\tau + \\ & + \frac{1}{\nu N} \iint_D f^2 dD, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$N = \min \left\{ 1, \min_{(x,t) \in D} a(x,t), \min_{(x,t) \in D} d(x,t) \right\};$$
$$K = \max \left\{ \max_{(x,t) \in D} |a_t(x,t)|, \max_{(x,t) \in D} |d_t(x,t)|, \frac{c}{\mu} \right\}.$$

Звідси вже легко одержувати потрібну оцінку (5), при цьому необхідно використати лему Гронуолла-Беллмана.

Теорема доведена.

На закінчення відзначимо, що подібні оцінки розв'язків задачі Коші і змішаної задачі одержані у працях [6, 7].

І. З л а м а л М.О. Смешанная задача для гиперболических уравнений с малым параметром // Чехосл. мат. журн. 1960. Т. 10. № 1. С. 83-102. 2. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 3. Л ы к о в А.В. Применение метода термодинамики необратимых процессов к исследованию масс и теплообмена // Инж. физ. журн. 1965. Т. 9. № 3. С. 711-714. 4. С т е к л о в В.А. Основные задачи математической физики. М., 1983. 5. Ф и н к е л ь-ш т е й н А.В. Решение гиперболического уравнения теплопроводности методом малого параметра // Инж. физ. журн. 1983. Т. 44. № 5. С. 809-814. 6. Ц и м б а л В.М. Оцінки розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1983. Вип. 21. С. 54-59. 7. Ц и м б а л В.М. Застосування методу інтегралів енергії в одній сингулярно збуреній задачі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 24. С. 7-11.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.85

П.С.Сеньо, В.М.Цимбал

ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО
ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

В області $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ розглянемо
рівняння

$$a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t) u = f(x, t, \varepsilon) \quad (1)$$

з початковою

$$u|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

і граничними умовами вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} - \alpha u(0, t) - \beta u(l, t) + \rho \int_0^t u(l, \tau) d\tau &= 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \gamma u(0, t) + \alpha u(l, t) + \varrho \int_0^t u(0, \tau) d\tau &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

або ж

$$\begin{aligned} u(l, t) &= \rho u(0, t), \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \kappa u(0, t), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Асимптотику розв'язку задачі (1)-(3) або (1), (2), (4) у багатьох випадках можна легко побудувати методом примежового шару [2, 3]. Наша мета - одержання оцінки розв'язків задач, існування класичних розв'язків яких припускаємо, із чого випливає коректність цих асимптотик. Підкреслимо важливість цього етапу побудови асимптотики, хоч він часто відсутній у роботах прикладного характеру.

Вважаємо виконаними такі умови:

$$I) a(x, t), b(x, t) \in C^1(D); c(x, t), f(x, t) \in C(D)$$

(Відзначимо, що для побудови асимптотики необхідно вимагати біль-

шої гладкості функцій, що входять в (1), яка залежить від порядку асимптотики);

2) $a(x,t) > 0, (x,t) \in D$; $b(l,t) \geq 0, b(0,t) \leq 0$ ($0 \leq t \leq T$), зокрема може бути $b(x,t) \equiv 0$, тобто розглядається випадок, коли примежовий шар з'являється в околі обох бічних сторін прямокутника

D . Нам невідомі роботи, де б розглядався цей випадок. Звичайно розглядають випадок, коли коефіцієнт $b(x,t)$ зберігає знак у всій області D , що відповідає випадку появи примежового шару в околі одної з бічних сторін прямокутника D ; 3) константи $\rho > 0, q \leq 0$, константи $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \kappa$ у граничних випадках можуть перетворюватися в нуль або нескінченність і задовольняють нерівності $\beta \leq 0, \gamma \geq 0, \alpha^2 + \beta\gamma \leq 0$, причому знаку рівності в одному з перших двох з цих співвідношень повинен відповідати знак рівності у третьому, а в умовах (4) нерівність $\rho\kappa \leq 0$. Тоді існує така теорема.

Теорема. Нехай виконуються умови 1-3. Тоді для розв'язків задачі (1)-(3) або (1), (2), (4) справедлива оцінка

$$\|u\|_{L_2(D)} \leq C \|f\|_{L_2(D)}, \quad (5)$$

де константа C не залежить від ε .

Доведення. Оцінку (5) доводять методом інтегралів енергії [4, 5]. Після домноження (1) на $2u$ і очевидних перетворень, одержуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (a(x,t)u^2) + \frac{\partial}{\partial x} (b(x,t)u^2 - 2\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x}) + 2\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \\ = (a_t(x,t) + b_x(x,t) - 2c(x,t))u^2 + 2f(x,t,\varepsilon)u. \end{aligned} \quad (6)$$

Позначимо через D_τ область $D_\tau = \{(x,t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq \tau\}$, де τ - довільне $0 \leq \tau \leq T$. Інтегруючи (6) по D_τ , використовуючи формулу Гауса-Остроградського і початкові умови (2), одержуємо

$$\int_0^l a(x,\tau)u^2 dx - 2\varepsilon \int_0^\tau \left. \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=l} dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\tau [\beta(l,t)u^2(l,t) - \beta(0,t)u^2(0,t)] dt + 2\varepsilon \iint_{D_\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dt = \\
& = \iint_{D_\tau} (a_t(x,t) + \beta_x(x,t) - 2c(x,t))u^2 dx dt + 2 \iint_{D_\tau} f u dx dt.
\end{aligned}$$

Введемо позначення $J = -2\varepsilon \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l} dt$. (7)

Далі міркуємо як і в праці [5], використовуючи граничні умови і припущення 3. При цьому слід мати на увазі, що

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau [-qu(0,t) \int_0^t u(0,\xi) d\xi + pu(l,t) \int_0^t u(l,\xi) d\xi] dt = \\
& = -\frac{q}{2} \left(\int_0^\tau u(0,\xi) d\xi \right)^2 + \frac{p}{2} \left(\int_0^\tau u(l,\xi) d\xi \right)^2.
\end{aligned}$$

Тоді легко отримуємо $J \geq 0$. Нерівність Коші

$$2 \iint_{D_\tau} |f u| dD_\tau \leq \iint_{D_\tau} u^2 dD_\tau + \iint_{D_\tau} f^2 dD_\tau. \quad (8)$$

З огляду на припущення 3 третій доданок в (7) невід'ємний. Тоді з (7) остаточно запишемо

$$\int_0^l u^2(x,\tau) dx \leq \frac{K}{N} \iint_{D_\tau} u^2 dD_\tau + \frac{1}{N} \iint_D f^2 dD,$$

$$K = \max_D |a_t(x,t) + \beta_x(x,t) - 2c(x,t) + 1|; N = \min_D a(x,t). \quad (9)$$

Застосування леми Гропуолла-Беллмана до (9) дає потрібну оцінку (5).

Теорема доведена.

І. Б о м б а А.Я. Асимптотический метод решения задач массопереноса растворимых веществ при плановой фильтрации подземных вод: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. К., 1984. 2. В а с и л ь е в а А.Б., Б у т у з о в В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. 3. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и ограниченный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Усп. мат. наук. 1957. № 5. С. 3-122. 4. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 5. С т е к л о в В.А. Основные задачи математической физики. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 18.12.85

М.М.Притула, Т.М.Грица

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО
РІВНЯННЯ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Розглянемо коливну систему, яка описується квазілінійним диференціальним рівнянням з випадковим відхиленням аргументу вигляду

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 x(t) + k_2 x(t - \Delta_0 - \sqrt{\varepsilon} \mu \dot{\xi}(t)) = \varepsilon [1 - \beta x^2(t)] \frac{dx(t - \Delta_0 - \sqrt{\varepsilon} \mu \dot{\xi}(t))}{dt} \quad (1)$$

при додатковій умові

$$\Delta \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x_0} = \frac{dx(\bar{t}+0)}{dt} - \frac{dx(\bar{t}-0)}{dt} \Big|_{x(\bar{t})=x_0} = \varepsilon \frac{\alpha}{x(t) \frac{dx(\bar{t}-0)}{dt}} \Big|_{x(\bar{t})=x_0}, \quad (2)$$

де k_1, k_2 - деякі постійні параметри системи, $\varepsilon > 0$ - малий параметр; α, β, μ - деякі постійні величини; $\Delta_0 + \sqrt{\varepsilon} \mu \dot{\xi}(t)$ - випадкове відхилення по часу в системі; $\dot{\xi}(t)$ - процес "білого шуму" ($M \dot{\xi}(t) = 0$, $M \dot{\xi}(t) \dot{\xi}(t + \tau) = \delta(\tau)$); M - оператор математичного сподівання; $\delta(\tau)$ - дельта-функція Дірака.

Рівняння (1) - це рівняння типу Ван-дер-Поля з випадковим запізненням зворотного зв'язку та відновлювальної сили. При деякій схематизації воно описує динамічні процеси в автогенераторах електричних коливальних [1]. Коливання в системі збуджується імпульсами вигляду (2).

Для дослідження коливних процесів в системі (1), (2) використовують асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського [1] і апарат теорії марковських процесів [2].

Як випливає з праці [3], періодичний рух в системі з частотою $\omega = 2\pi/\Delta_0 = \sqrt{k_1 + k_2}$ можливий при виконанні умов

$$k_1 + k_2 > 0, \quad \Delta_0 = 2\pi/\sqrt{k_1 + k_2}.$$

Використовуючи формалізм узагальнених функцій, систему (1), (2) запишемо у зручному для дослідження вигляді

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 x(t) + k_2 x(t - \Delta_0 - \sqrt{\varepsilon} \mu \dot{\xi}(t)) = \varepsilon [1 - \beta x^2(t)] x$$

$$\times \frac{dx(t-\Delta_0 - \sqrt{\varepsilon} \mu \dot{\xi}(t))}{dt} + \frac{\alpha}{x_0} \frac{dx(t)}{dt} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| \delta(x-x_0) \}. \quad (3)$$

Розв'язок рівняння (3) шукаємо у вигляді

$$x(t) = a(t) \cos(\omega t + \theta(t)),$$

де $a(t)$, $\theta(t)$ - амплітуда і фаза коливань; ω - частота коливань. Функції $a(t)$, $\theta(t)$ повинні задовольняти рівняння

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a), \quad \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B(a). \quad (4)$$

Конкретний вигляд функцій $A(a)$ і $B(a)$ знайдено в праці [3]. Для знаходження амплітуди та фази коливань системи (3) отримаємо наступну систему стохастичних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & \varepsilon \frac{a\omega}{4\omega^2 + 4\omega\Delta_0 k_2 \sin\omega\Delta_0 + k_2^2 \Delta_0^2} \left[\left(-\frac{1}{2} \omega \beta \cos\omega\Delta_0 + \frac{1}{4} k_2 \Delta_0 \sin 2\omega\Delta_0 \right) a^2 + \right. \\ & \left. + 2\omega \cos\omega\Delta_0 + \frac{2\alpha}{\pi a^2 x_0} \left(2 + \frac{k_2 \Delta_0}{\omega} \sin\omega\Delta_0 \right) + \frac{2\mu \omega k_2}{\sqrt{\varepsilon}} \cos\omega\Delta_0 \dot{\xi}(t) \right], \\ \frac{d\theta}{dt} = & \varepsilon \frac{\omega}{4\omega^2 + 4\omega\Delta_0 k_2 \sin\omega\Delta_0 + k_2^2 \Delta_0^2} \left[\left(\frac{3}{2} \omega \beta \sin\omega\Delta_0 + \frac{1}{4} k_2 \Delta_0 \beta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} k_2 \Delta_0 \beta \sin^2\omega\Delta_0 \right) a^2 - 2(\omega \sin\omega\Delta_0 + k_2 \Delta_0) - \frac{2\alpha k_2 \Delta_0}{\pi a^2 \omega x_0} \cos\omega\Delta_0 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mu (2\omega k_2 \sin\omega\Delta_0 - k_2^2 \Delta_0^2) \dot{\xi}(t) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язком системи стохастичних диференціальних рівнянь К.Іто (5) є двовірний марковський дифузійний процес $\{a(t), \theta(t)\}$ [2,3]. Нас головним чином цікавитиме перше рівняння системи. Для знаходження стаціонарної густини розподілу ймовірностей амплітуди використовують аналітичний метод рівняння Колмогорова-Фоккера-Планка [3].

Визначивши з першого рівняння системи (5) коефіцієнти спрацювання та дифузії амплітуди, підставивши їх в рівняння Колмогорова-Фоккера-Планка і проінтегрувавши це диференціальне рівняння-

ня, отримаємо функцію стаціонарної густини $W_{CT}(a)$ розподілу амплітуди в аналітичному вигляді:

$$W_{CT}(a) = C a^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_4^2} - 2} e^{\frac{\gamma_1}{\gamma_4^2} a^2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_4^2} a^2}, \quad (6)$$

де

$$\gamma_1 = \frac{-\frac{1}{2} \cos^2 \beta \cos \omega \Delta_0 + \frac{1}{4} k_2 \Delta_0 \beta \sin 2\omega \Delta_0}{4\omega^2 + 4\omega \Delta_0 k_2 \sin \omega \Delta_0 + k_2^2 \Delta_0^2};$$

$$\gamma_2 = \frac{2\omega^2 \cos \omega \Delta_0}{4\omega^2 + 4\omega \Delta_0 k_2 \sin \omega \Delta_0 + k_2^2 \Delta_0^2};$$

$$\gamma_3 = \frac{4\alpha\omega + 2\alpha k_2 \Delta_0 \sin \omega \Delta_0}{\pi x_0 (4\omega^2 + 4\omega \Delta_0 k_2 \sin \omega \Delta_0 + k_2^2 \Delta_0^2)};$$

$$\gamma_4 = \frac{2\mu\omega^2 k_2 \cos \omega \Delta_0}{4\omega^2 + 4\omega \Delta_0 k_2 \sin \omega \Delta_0 + k_2^2 \Delta_0^2}.$$

Константу інтегрування C знаходимо з умови нормування $W_{CT}(a)$.

Функція (6) має єдиний максимум у точці

$$a_0 = \left[\frac{\gamma_4^2 - \gamma_2 - \sqrt{(\gamma_4^2 - \gamma_2)^2 - 4\gamma_1\gamma_3}}{2\gamma_1} \right]^{1/2} \quad (7)$$

при виконанні певних умов [3]. Таким чином, в системі (I), (2) можливі стійкі стаціонарні коливання з амплітудою (7).

Для чисельного розв'язку на проміжку часу $[t_0, t]$ першого стохастичного диференціального рівняння системи (5), яке має вигляд

$$\frac{da}{dt} = F(a) + G(a)\xi(t),$$

використовують метод Рунге-Кутта четвертого порядку [4]. Тоді рекурентне рівняння для амплітуди

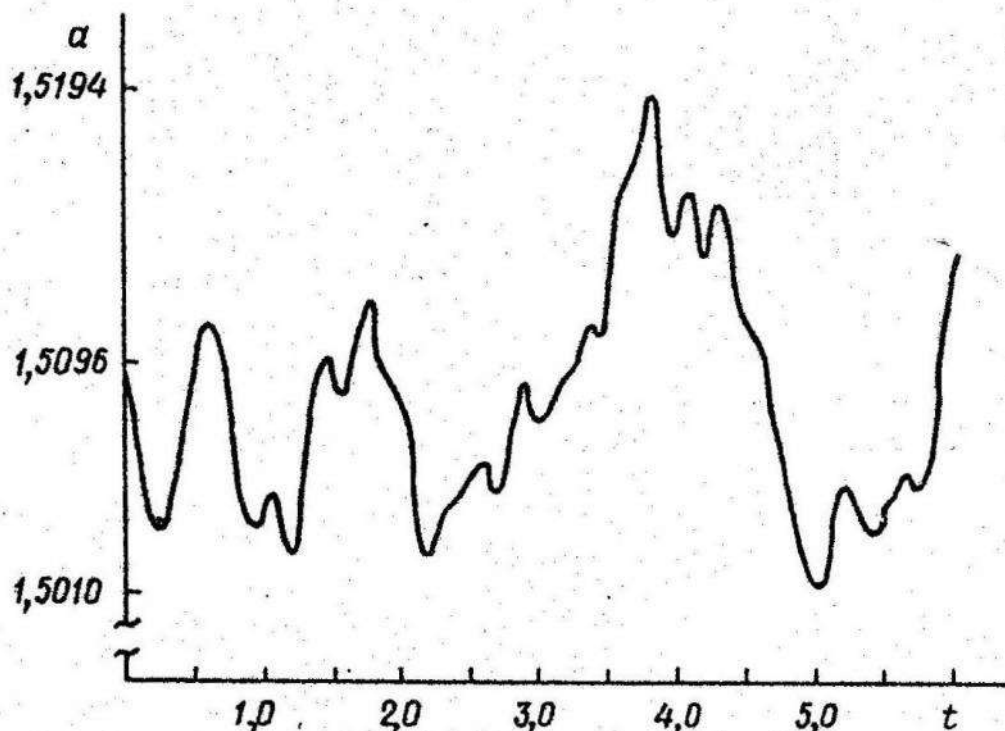
$$a_{i+1} = a_i + \frac{1}{6}(d_1 + 2d_2 + 2d_3 + d_4) + G(a_i)\Delta \xi_i(t) \quad (8)$$

$$i = 0, 1, \dots, N,$$

де N - число точок розбиття відрізка $[t_0, t]$; $h = \frac{t-t_0}{N}$ - крок розбиття:

$$\begin{aligned} d_1 &= F(a_i)h; & d_3 &= F(a_i + \frac{d_2}{2})h; \\ d_2 &= F(a_i + \frac{d_1}{2})h; & d_4 &= F(a_i + d_3)h; \end{aligned}$$

$\Delta \xi_i$ - прирости процесу Вінера $\xi(t)$. Математичне сподівання приростів $M\Delta \xi_i = 0$, а дисперсія приростів визначається виразом $D\Delta \xi_i = S_0 h$, S_0 - спектральна густина віннеровського процесу $\xi(t)$. Значення $\Delta \xi_i$ і $\Delta \xi_j$ незалежні при $i \neq j$, закон розподілу випадкових чисел $\Delta \xi_i$ нормальний. За початкове наближення амплітуди a_0 в схемі (8) природньо взяти найбільш



ймовірну амплітуду стійких стаціонарних коливань, що визначається формулою (7).

Для реалізації обчислювальної схеми (8) на проміжку часу $[0, 6]$ з кроком $h = 0,1$ написана програма на мові PL/1. Параметрам надані числові значення, які трапляються в практиці:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,001; & k_1 &= 13,86; & k_2 &= 1,0; & \Delta_0 &= 1,6; & x_0 &= 1,0; \\ \alpha &= 0,7; & \mu &= 1,0. \end{aligned}$$

Наведемо результати обчислень на ЕОМ:

t	$a(t)$	t	$a(t)$
0,0	1,5096	3,5	1,5155
0,5	1,5114	4,0	1,5162
1,0	1,5063	4,5	1,5118
1,5	1,5075	5,0	1,5010
2,0	1,5069	5,5	1,5049
2,5	1,5060	6,0	1,5130
3,0	1,5071		

Найбільш ймовірна амплітуда стійких стаціонарних коливань
 $a_0 = 1,5096$.

Залежність амплітуди від часу, що одержана в результаті обробки масиву значень амплітуди, показана на рисунку. З рисунка видно, що амплітуда коливань флукутує з часом близько найбільш ймовірного значення амплітуди стаціонарного режиму.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974.
 2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., 1968. 3. Коломиец В.Г., При-
 тула Н.Н., Грица Т.М. Случайные колебания в квазилинейных системах со случайными отклонениями аргумента и импульсным воздействием // Приближенные методы анализа нелинейных колебаний. 1984. С. 44-54. 4. Никитин Н.Н., Первачев С.В., Разев-
 вич В.Д. О решении на ЦВМ стохастических дифференциальных сле-
 дящих систем // Автоматика и телемеханика. 1975. № 4. С. 133-137.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.85

М.В.Жук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + z(x,y)u = f(x,y) \quad (1)$$

при однорідній крайовій умові

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \left[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\nu, x) + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} \cos(\nu, y) \right]_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

де Γ - межа області D , обмеженої по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x) < h(x)$; ν - зовнішня нормаль до Γ .

Відносно заданих функцій припускаємо, що $f(x,y)$ належить діїсному простору $H=L_2(D)$ з нормою $\|f\|^2 = \iint_D f^2(x,y) dx dy$; функції $p(x,y)$, $q(x,y)$, $z(x,y)$ додатні обмежені, тобто

$$0 < \alpha_1 \leq p(x,y) \leq \beta_1, \quad 0 < \alpha_2 \leq q(x,y) \leq \beta_2, \quad 0 < \alpha_3 \leq z(x,y) \leq \beta_3.$$

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x,y)$ в області $\bar{D}$, що задовольняють крайові умови (2).

Введемо оператор T , який визначається формулами

$$Tu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u, \quad (3)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\nu, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\nu, y) \right]_{\Gamma} = 0. \quad (4)$$

За область $D(T)$ оператора T приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x,y)$ в $\bar{D}$, що задовольняють крайову умову (4). При цьому оператор T на $D(T)$ додатно визначений. Дійсно, для симетричного оператора T при довільному $u \in D(T)$ маємо

$$(Tu, u) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2 \right] dx dy \geq \|u\|^2. \quad (5)$$

Позначимо через $H_T \subset H$ енергетичний простір оператора T , тобто замикання множини $D(T)$ в метриці

$$[u, v] = (Tu, v) = \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + uv \right] dx dy, |u|^2 = [u, u].$$

З нерівності (5) у результаті граничного переходу для довільного $u \in H_T$ отримуємо

$$\|u\| \leq |u|. \quad (6)$$

Відзначимо, що при цьому $H_T = W_2^1(D)$.

Для довільних елементів $u, v \in H_T$ формально введемо білінійну форму

$$L(u, v) = \iint_D \left[\rho(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + z(x, y) uv \right] dx dy. \quad (7)$$

Для довільного u з H_T виконуються нерівності

$$\mu |u|^2 \leq L(u, u) \leq \eta |u|^2, \quad (8)$$

де $\mu = \min \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$; $\eta = \max \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Узагальненням розв'язком задачі (1)–(2) називається функція $u(x, y) \in H_T$, для якої виконується тотожність

$$L(u, v) \equiv \iint_D \left[\rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + zuv \right] dx dy = \iint_D f v dx dy \quad (9)$$

при довільній $v(x, y) \in H_T$, що при зроблених припущеннях існує і єдиний $[1]$.

До задачі (1)–(2) застосуємо метод Канторовича, згідно з яким наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \varphi_k(x, y), \quad (10)$$

де лінійно незалежні у проміжку $[g(x), h(x)]$ функції $\varphi_k(x, y)$ вибираємо таким чином, щоб система функцій $\{X_e(x) \varphi_k(x, y)\} \in H_T$ була повною системою лінійно незалежних функцій у H_T .

Невідомі коефіцієнти $c_k(x)$ визначаємо з системи

$$\int_{g(x)}^{h(x)} (Lu_n - f) \varphi_i dy + \varphi_i \sqrt{1+y'^2} \frac{\partial u_n}{\partial v} \Big|_{y=g(x)} + \varphi_i \sqrt{1+y'^2} \frac{\partial u_n}{\partial v} \Big|_{y=h(x)} = 0 \quad (11)$$

при умовах

$$\int_{g(a)}^{h(a)} \frac{\partial u_n}{\partial v} \varphi_i \Big|_{x=a} dy = 0, \quad \int_{g(b)}^{h(b)} \frac{\partial u_n}{\partial v} \varphi_i \Big|_{x=b} dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Введемо поняття узагальненого розв'язку для системи методу Канторовича (I1)-(I2). Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду $u_n(x,y) = \sum_{k=0}^n a_k(x) \varphi_k(x,y)$. Нехай для деякої функції $u_n(x,y) \in H_n \cap H_T$ справедлива тотожність

$$L(u_n, v_n) = \iint_D \left[p \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial x} + q \frac{\partial u_n}{\partial y} \frac{\partial v_n}{\partial y} + z u_n v_n \right] dx dy - \iint_D f v_n dx dy \quad (I3)$$

при довільній функції $v_n(x,y) \in H_n \cap H_T$. Тоді функція $u_n(x,y)$ називається узагальненим розв'язком системи (I1)-(I2).

Аналогічно, як і в праці [2], доводиться наступна теорема.

Теорема. Якщо обмеження на вихідні дані задачі (1)-(2) такі, що виконується співвідношення (8), то для довільної функції $f(x,y) \in H$ задача (1)-(2) має єдиний узагальнений розв'язок $u(x,y) \in H$, при довільному n системи методу Канторовича (I1)-(I2) має єдиний узагальнений розв'язок $u_n(x,y) \in H_n \cap H_T$, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$|u - u_n| \leq c |u - v_n|, \quad (I4)$$

де $c = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$, а елемент $v_n \in H_n \cap H_T$ реалізує мінімум функціонала $|u - v_n|$.

Зауважимо, що повною лінійно незалежною системою функцій $\{\chi_k(x) \varphi_k(x,y)\}$ в H_T буде, наприклад, система $x^k y^l, k=0,1,2,\dots$. Таким чином, розв'язок можна шукати у вигляді $u_n(x,y) = \sum_{k=0}^n c_k(x) y^k$.

І. В а р г а Р. Функціональний аналіз и теория аппроксимаций в гильбертовом пространстве. М., 1974. 2. Л у ч к а А.К., Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1975. С. 84-98.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.86

І.Д.Квіт

ЕМПІРИЧНИЙ І ГІПОТЕТИЧНИЙ
ЗРІЗАНИ ВАРІАЦІЙНІ РЯДИ

Розглянемо незалежні напрацювання n однотипних пристроїв, K з яких працювали до відмови F , а решта $n-K$ зупинені S , хоч і могли ще працювати. Треба перевірити гіпотезу про те, що дана вибірка напрацювань взята з популяції, яка має абсолютно неперервну функцію розподілу ймовірностей $F(t)$.

Варіаційний ряд даної зрізаної вибірки напрацювань запишемо у вигляді

$$t(\bar{1}, n) \leq \dots \leq t(\bar{j}, n) \leq \dots \leq t(\bar{n}, n), \quad (1)$$

де $\bar{j}$ - те за величиною $t(\bar{j}, n)$ позначає напрацювання до відмови F або зупинки S . Якщо $t(\bar{j}, n)$ позначає напрацювання до відмови F , то $\bar{j}$ виражає середній ранг цієї відмови. Метод обчислення сподіваних рангів відмов у зрізаному емпіричному варіаційному ряді описано, наприклад, у праці [1]. Надалі в ряді / 1 / нас цікавитимуть лише $t(\bar{j}, n)$, що відповідають K напрацюванням до відмови.

За означенням медіаною статистики $t(\bar{j}, n)$ називається число $t(\bar{j}, n; 0,5)$, що задовольняє співвідношення

$$P\{t(\bar{j}, n) \leq t(\bar{j}, n; 0,5)\} = 0,5.$$

Але відомо [2], що коли наша гіпотеза про напрацювання до відмови істинна, то

$$F(t(\bar{j}, n; 0,5)) = \frac{\bar{j}}{\bar{j} + (n+1-\bar{j}) F_{0,5}(2(n+1-\bar{j}), 2\bar{j})} \approx \frac{\bar{j}-0,3}{n+0,4}, \quad (2)$$

де $F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2)$ - процентні точки розподілу Фішера зі ступенями вільності (ν_1, ν_2) , як правило, дробовими. Співвідношення (2) визначає медіану $t(\bar{j}, n; 0,5)$ статистики $t(\bar{j}, n)$. Звідси

$$P\{t(\bar{j}, n) < t(\bar{j}, n; 0,5)\} = P\{t(\bar{j}, n) > t(\bar{j}, n; 0,5)\} = 0,5.$$

Тому за статистику критерію перевірки гіпотези приймаємо число $\mathcal{X}(+)$ додатних різниць $t(\bar{j}, n) - t(\bar{j}, n; 0,5)$.

Статистика $\mathcal{X}(+)$ має біномний розподіл

$$P\{\mathcal{X}(+) = i\} = \frac{C_K^i}{2^K}, \quad (i = 0, 1, \dots, K).$$

На основі цього розподілу, при заданому рівні значущості α , визначаємо область прийому гіпотези (m, M) , де m - найбільше, а M - найменше з чисел, що задовольняють нерівність

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{C_K^i}{2^K} \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \sum_{i=M+1}^K \frac{C_K^i}{2^K} \leq \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Наприклад, при $\alpha = 0,05$ для різних K маємо:

K	m	M	K	m	M	K	m	M
5	0	5	9	2	7	13	3	10
6	1	5	10	2	8	14	3	11
7	1	6	11	2	9	15	4	11
8	1	7	12	3	9	16	4	12

При $K \geq 16$ суми в нерівностях (3) досить добре наближаються за допомогою інтегральної асимптотики Муавра-Лапласа. Звідси при

$$\alpha = 0,05 \quad m = \left[\frac{K}{2} - 0,98 \sqrt{K} \right], \quad M = \left\{ \frac{K}{2} + 0,98 \sqrt{K} \right\},$$

де $[x]$ позначає цілу частину числа x , а $\{x\}$ - число з доповненням до найближчого цілого. Наприклад, при $K = 16$

$$m = [8 - 3,92] = 4, \quad M = \{8 + 3,92\} = 12.$$

Зазначимо, що при $\alpha = 0,05$ і $K \leq 5$ область прийому гіпотези збігається з областю всіх значень статистики $\mathcal{H}(+)$; критерій знаків не може відкинути ніякої гіпотези (навіть якщо вона хибна). Тому при $\alpha = 0,05$ критерій знаків тим гнучкіший, чим K більше від шістьох.

Якщо емпіричне значення статистики $\mathcal{H}(+)$ потрапляє зовні області прийому гіпотези (m, M) , то гіпотезу відхиляємо.

Зауважимо, що при $K = n$ варіаційний ряд (I) стає повним рядом порядкових статистик $t(j, n)$, $(j = 1, \dots, n)$.

Приклад 1. Дано емпіричний варіаційний ряд незалежних напрацювань до відмов повної вибірки обсягу 16 у відповідних одиницях:

0,045	0,100	0,185	0,250	0,340	0,430
0,500	0,600	0,880	0,890	1,000	1,100
1,200	1,300	2,100	3,200		

Слід перевірити гіпотезу про те, що популяція, з якої взято вибірку, має функцію розподілу $F(t) = 1 - e^{-t^2}$, $t > 0$.

За формулою (2) знаходимо гіпотетичний варіаційний ряд:

0,209	0,331	0,424	0,506	0,581	0,653
0,725	0,796	0,870	0,946	1,028	1,118
1,220	1,343	1,506	1,776		

Число додатних різниць відповідних елементів емпіричного та гіпотетичного варіаційних рядів $\mathcal{H}(+) = 3$. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ і $K = n = 16$ область прийому гіпотези $(m, M) = (4, 12)$. Отже, гіпотезу відхиляємо.

Перевіримо тепер гіпотезу про те, що вибірку взято з популяції керованої функцією розподілу $F(t) = 1 - e^{-t}$, $t > 0$.

За формулою (2) знаходимо новий гіпотетичний варіаційний ряд:

0,044	0,109	0,180	0,256	0,338	0,427
0,525	0,634	0,756	0,895	1,057	1,250
1,489	1,804	2,267	3,154		

Тепер $\mathcal{H}(+) = 6$. Гіпотезу приймаємо.

Приклад 2. На основі багатократно зрізаної вибірки незалежних напрацювань до відмови F і зупинки S дано багатократно зрізаний емпіричний варіаційний ряд у відповідних одиницях:

0,100 S	0,130 F	0,150 S	0,160 S	0,190 F
0,200 S	0,220 S	0,240 F	0,320 F	0,340 F
0,420 F	0,430 S	0,450 S	0,460 F	0,480 F
0,560 F	0,570 F	0,620 F	0,660 F	0,700 S
0,800 F	0,810 F	0,930 F	0,950 S	1,010 F

Тут $n = 25$, $K = 16$. Слід перевірити гіпотезу про те, що популяція, з якої взято зрізану вибірку, має функцію розподілу $F(t) = 1 - e^{-2t^2}$, $t > 0$.

Сподівані ранги відмов такі:

1,04	2,174545	3,428516	4,682487	5,936458	7,190430
8,637319	10,08420	11,53109	12,97798	14,42487	15,87176
17,55980	19,24784	20,93588	23,46794		

За формулою (2) знаходимо зрізаний гіпотетичний варіаційний ряд:

0,122	0,196	0,256	0,308	0,354	0,398
0,446	0,493	0,540	0,588	0,637	0,689
0,754	0,828	0,915	1,103		

Число додатних різниць відповідних елементів емпіричного та гіпотетичного зрізаних варіаційних рядів $\mathcal{H}(+) = 7$. Отже, гіпотезу приймаємо.

1. К в і т І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності". Львів, 1982. 2. К в і т І.Д. Довірчі інтервали для порядкових статистик // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 23. С. 94-98.

Стаття надійшла до редколегії 28.10.85

УДК 519.21

І.Д.Квіт, Є.В.Москвяк

ПОРІВНЯННЯ ДВОХ ЗРІЗАНИХ ВИБІРОК

Розглянемо дві незалежні вибірки (x) та (y) незалежних напрацювань до відмови F або зупинки S з абсолютно неперервних популяцій. Потрібно перевірити гіпотезу про те, що вибірки однорідні, тобто популяції, з яких взято вибірки, однаково абсолютно неперервно розподілені.

Упорядкуємо за значенням елементи кожної вибірки від найменшого напрацювання до найбільшого, вказуючи сподівані ранги відмов. Метод обчислення сподіваних рангів відмов у зрізаній вибірці описано, наприклад, у праці [1]. Сподівані ранги напрацювань до відмови у зрізаній вибірці, як правило, дробові. Ранг найбільшого напрацювання до відмови в упорядкованій вибірці, збільшений до найближчого цілого числа, назвемо обсягом варіаційного ряду. Позначимо через m і n відповідно обсяги варіаційних рядів для вибірок (x) та (y) . За допомогою інтерполяції та екстраполяції запишемо два нові варіаційні ряди $(\tilde{x})$ та $(\tilde{y})$ з елементами, відповідними рангам від 1 до m для вибірки (x) , і від 1 до n для вибірки (y) . Тепер можемо застосувати один з довільних критеріїв порівняння двох повних незалежних вибірок.

На основі двох одержаних варіаційних рядів $(\tilde{x})$ та $(\tilde{y})$ запишемо один спільний варіаційний ряд обсягу $m+n$. Якщо гіпотеза однорідності вибірок істинна, то на кожному відрізку спільного варіаційного ряду зі заданою пропорцією $\tilde{x}$ повинна трапитися в середньому така ж пропорція $\tilde{y}$. Якщо ж на якомусь відрізку спільного варіаційного ряду пропорція $\tilde{x}$ значно більша, або значно менша, ніж пропорція $\tilde{y}$, то це свідчить проти гіпотези. Тому за статистику критерію перевірки гіпотези приймаємо число $W(\tilde{y}/\tilde{x})$ інверсій $\tilde{y}$ відносно $\tilde{x}$ у спільному

варіаційному ряду. Зауважимо, що $W(\tilde{y}/\tilde{x}) + W(\tilde{x}/\tilde{y}) = mn$; статистики $W(\tilde{y}/\tilde{x})$ і $W(\tilde{x}/\tilde{y})$ виступають симетрично.

Відомо [2], що статистика W має розподіл Вілкоксона. З таблиць цього розподілу бачимо, що при рівні значущості $\alpha = 0,01$ і $m \leq n \leq 4$ критерій Вілкоксона ніколи не може відхилити гіпотези (навіть якщо вона хибна). Відомо також, що за умови

$$m \geq 4, n \geq 4, m + n \geq 20 \quad (1)$$

статистика W наближено нормально розподілена зі сподіванням a та дисперсією σ^2

$$a = \frac{mn}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{mn(m+n+1)}{12} \quad (2)$$

У даному випадку, наприклад, при рівні значущості $\alpha = 0,05$, область прийому гіпотези задається інтервалом

$$(a - 1,96\sigma; a + 1,96\sigma) \quad (3)$$

Якщо емпіричне значення W не потрапляє в область (3), то гіпотезу однорідності двох початкових зрізаних вибірок (x) та (y) відхиляємо.

Таким чином, якщо зрізані вибірки (x) та (y) задовольняють умову (1), то при рівні значущості $\alpha = 0,05$ область прийому гіпотези задається інтервалом (3).

Проілюструємо методику порівняння двох зрізаних вибірок на прикладі, коли одна вибірка повна, а друга - зрізана.

На основі двох незалежних вибірок (x) та (y) незалежних напрацювань до відмови F або зупинки S одержано наступні варіаційні ряди [1]. Для повної вибірки

$(x): 22 \quad 37 \quad 47 \quad 57 \quad 67 \quad 74 \quad 83 \quad 92 \quad 102 \quad 113 \quad 127$
 $144 \quad 172;$

для зрізаної вибірки

$(y): 20 \quad 23 \quad 36 \quad 46 \quad 55 \quad 60 \quad 60 \quad 60 \quad 66 \quad 77 \quad 88 \quad 90 \quad 100$
 $S \quad F \quad F \quad F \quad F \quad S \quad S \quad S \quad F \quad F \quad F \quad S \quad S$
 $110 \quad 140$
 $F \quad F$

Перевірити гіпотезу однорідності вибірок.

Сподівані ранги відмов у зрізаному варіаційному ряду

$F: 23 \quad 36 \quad 46 \quad 55 \quad 66 \quad 77 \quad 88 \quad 110 \quad 140$
 $1,07 \quad 2,13 \quad 3,20 \quad 4,27 \quad 5,73 \quad 7,20 \quad 8,66 \quad 11,11 \quad 13,55$

Обсяги $m = 13$ повного варіаційного (X) та $n = 14$ зрізаного варіаційного ряду (y) задовольняють умову (1). Тому при рівні значущості $\alpha = 0,05$ за формулами (2) і (3) знаходимо $Q = 91$, $\sigma^2 = 424,66$ та область прийому гіпотези $(50, 61; 131,39)$.

Для зрізаної вибірки (y) утворимо новий варіаційний ряд $(\tilde{y})$ з елементами відповідними рангам від 1 до 14

$(\tilde{y})$:	21,5	34,4	44,1	52,7	60,5	68,0	75,5	83,02
	91,0	100	109	120	133	144,6		

Спільний варіаційний ряд для (X) та $(\tilde{y})$ набуває вигляду

(X) :	22	37	47	57	67	74	83	92
$(\tilde{y})$:	21,5	34,4	44,1	52,7	60,5	68,0	75,5	83,02
(X) :	102	113	127	144	172			
$(\tilde{y})$:	100	109	120	133	144,6			

Емпіричне значення статистики $W(\tilde{y}/X)$ дорівнює $1+2+3+4+5+6+7+9+10+11+12+13+14 = 97$ і потрапляє в область прийому гіпотези.

Отже, приймаємо гіпотезу однорідності вибірок (X) та (y) .
Зазначимо, що $W(X/\tilde{y}) = 1+2+3+4+5+6+7+7+8+9+10+11+12 = 85$ та $W(\tilde{y}/X) + W(X/\tilde{y}) = 97 + 85 = 182 = 13 \cdot 14 = mn$.

1. К в і т І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності". Львів, 1982. 2. К в і т І.Д. Статистична змінна. Львів, 1974.

Стаття надійшла до редколегії 28.10.85

О.П.Гнатишин

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ
ОПТИМАЛЬНОЇ ТАКТИКИ
ПОПЕРЕДЖУВАЛЬНИХ ЗАМІН
ПРИ ВЕЙБУЛІВСЬКИМ НАПРАЦЮВАННІ

Попереджувальні заміни в напрацюванні полягають у заміні елемента на новий при умові, що працюючий до цього елемент або відмовив, або вже має напрацювання T . Розглядаємо задачу визначення правила попереджувальних заміन елементів складних технічних систем для описаної нижче моделі.

Заміна елемента проводиться після $(k-1)$ ремонту. Елемент після $(i-1)$ ремонту підлягає ремонту (або замінюється новим, якщо $i = k$) при відмові або в момент T_i (T_i годин після останнього ремонту чи заміни) залежно від того, що швидше відбудеться.

У досліджуваній моделі C_n - вартість планового ремонту елемента; C_H - вартість ремонту відмовленого елемента; C_3 - вартість заміни.

Сподівані вартість і тривалість ремонтного циклу відповідно дорівнюють

$$M[k, \{T_i\}] = (k-1)C_n + C_3 + C_H \sum_{i=1}^k F_i(T_i), \quad (1)$$

$$L[k, \{T_i\}] = \sum_{i=1}^k \int_0^{T_i} (1 - F_i(t)) dt, \quad (2)$$

де $F(t)$ - функція розподілу ймовірностей виходу елемента з ладу.

Сподівана питома вартість ремонтного циклу

$$C[k, \{T_i\}] = \frac{M[k, \{T_i\}]}{L[k, \{T_i\}]} \quad (3)$$

Оптимальна тактика полягає у визначенні кількості попереджувальних замін k і моментів проведення попереджувальних замін $\{T_i(k)\}$, при яких функція (3) набуває мінімального значення.

Диференціюючи (3) по T_i і прирівнюючи похідну до нуля, отримуємо необхідну умову мінімуму сподіваних витрат

$$z_i(T_i^*) = C[k, \{T_i^*\}] / C_H, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (4)$$

де $z(t)$ - інтенсивність відмов елемента за час t .

Таким чином, періоди проведення попереджувальних заміन такі, що інтенсивності відмов за ці періоди однакові.

У праці [2] доведено, що для будь-якого $k \geq 1$, $\{T_i^*(k)\}$ існує $\{T_i^*(k)\}$, $1 \leq i \leq k$ скінчене, єдине і спадне по i .

Ймовірність виходу з ладу більшості елементів складних технічних систем підпорядкована розподілу Вейбуля

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^\delta}, \quad t \geq 0, \quad (a > 0, \delta > 0). \quad (5)$$

Параметр форми δ , як правило, залишається незмінним на всьому періоді експлуатації системи.

Для визначення оптимальної тактики попереджувальних заміन у випадку розподілу (5) рівняння (4) запишемо у вигляді

$$T_i = T_1 \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}}, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^k \left\{ \frac{\delta}{a_i^\delta} T_1^{\delta-1} \int_0^{T_i} e^{-\left(\frac{t}{a_i}\right)^\delta} dt + e^{-\left(\frac{T_i}{a_i}\right)^\delta} - 1 \right\} = \frac{(k-1)C_n + C_3}{C_n}. \quad (7)$$

Рівняння (6)–(7) розв'язуємо методом послідовних наближень.

Проведені числові експерименти на ЕОМ показали, що при сталих C_n , C_3 зі зростанням параметра форми δ розподілу (5) оптимальні періоди $\{T_i^*\}$ попереджувальних замін зменшуються. Виявлено також, що при збільшенні вартості ремонту відмовленого елемента C_n питомі витрати на експлуатацію системи зростають.

І. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М., 1969. 2. Nguen D.G., Murthy D.N.P. Optimal Preventive Maintenance Policies for Repairable Systems // Operation Research. 1981. Vol. 29. P. 1181–1194.

Марія Д. Мартиненко, Михайло Д. Мартиненко

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ
ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО
ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(y)b(x) + c(x), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

у припущенні, що функції $a(x)$, $b(x)$, $f(y)$ неперервні, а $f(y)$, крім того, задовольняє умову Ліпшица в деякій області D площини (x, y) , що містить в середині точку (x_0, y_0) . При цих припущеннях задача Коші (1)–(2) має єдиний неперервно-диференційований в D розв'язок [5].

Аналітичний розв'язок задачі (1)–(2) – задача важка навіть у випадку рівняння Рікатті, коли $f(y) = y^2$, $a(x)$ та $b(x)$ довільні функції [5]. Найпростішою лінеаризацією, яка використовується для наближеного розв'язку задачі (1)–(2), є нехтування нелінійними членами*. Це виправдовується здебільшого, коли $f(y)$ – безмежно мала величина більш високого порядку порівняно з y . Проте така лінеаризація досить груба, оскільки отримувані при цьому наближені розв'язки можуть дуже швидко віддалятися від точних при віддаленні від початкової точки (x_0, y_0) .

Запропонований нижче модифікований метод еквівалентної лінеаризації розв'язку задачі Коші (1)–(2) аналогічний методу статистичної лінеаризації [3] і полягає в заміні функції $f(y)$ у рівнянні (1) на лінійну функцію Ky , де стала K визначається з формули

$$K^2 = 4\alpha \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{\infty} f^2(y) e^{-\alpha y^2} dy, \quad (3)$$

Тут α – поки що довільна додатна стала (у методі статистичної лінеаризації α пов'язується з дисперсією випадкового вихідного процесу і визначається із статистичних міркувань [3]).

За наближений розв'язок $\tilde{y}(x)$ задачі (1)–(2) виберемо розв'язок такої лінійної задачі Коші

* Виклад інших методів лінеаризації наведений у працях [2, 6].

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} + a(x)\tilde{y} = \kappa b(x)\tilde{y} + c(x), \quad (4)$$

$$\tilde{y}(x_0) = y_0, \quad (5)$$

де знак сталої κ зумовлений наближеною рівністю $f(y) \approx \kappa y$. Цей наближений розв'язок можна безпосередньо записати за добре відомою формулою [5]. Фігуруючу у (3) сталу α слід визначати з такої додаткової умови:

$$\left. \frac{d\tilde{y}}{dx} \right|_{x=x_0} = f(y_0)b(x_0) - a(x_0)y_0 + c(x_0), \quad (6)$$

що випливає з рівності похідних розв'язків задач (1)–(2) та (4)–(5), коли $x = x_0$. При такому визначенні сталої α (а разом з нею і κ) для гладких функцій $a(x)$, $b(x)$, $f(y)$ можна стверджувати існування наступної рівномірної оцінки

$$\max_{|x-x_0| \leq h} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq Ah^2,$$

де A – деяка додатна стала; $y(x)$ – точний розв'язок задачі (1)–(2).

З формул (3)–(6) випливає, що рівняння (6) для визначення сталої A є, взагалі кажучи, нелінійним. Тому з можливих розв'язків цього рівняння необхідно вибрати такий, що є додатним та задовольняє умови збіжності фігуруючих у (3) інтегралів. Остання умова істотна, оскільки розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку можуть експоненціально зростати [1]. Для функцій обмеженого росту формула (3) дає змогу через наявність під знаком інтегралу швидко спадної експоненти визначити еквівалентність функцій $f(y)$ та κy при малих значеннях y .

Фігуруючий у (3) інтеграл легко обчислити для досить широкого набору функцій $f(y)$ [4, 7], тому запропонований метод можна ефективно реалізувати на практиці.

Для того, щоб визначити точніше наближений розв'язок вихідної задачі (1)–(2), можна розглядати розв'язки лінеаризованої задачі (4)–(5) як нульове наближення у методі Пікара послідовних наближень [5]. Конкретні приклади показують більш швидку (порівняно з використанням класичної лінеаризації $f(y) = 0$ або $f(y) = \text{const}$ для визначення нульового наближення) збіжність процесу послідовних наближень у цьому випадку.

На закінчення відзначимо, що модифікований метод еквівалентної лінеаризації може бути поширений без істотних труднощів і на задачу Коші для системи рівнянь першого порядку

$$\frac{dy_i}{dx} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(x)y_k = \sum_{k=1}^n b_{ik}(x)f_k(y_k) + c_i(x),$$

а також на нелінійні рівняння другого порядку виду

$$y'' + f(y') + g(y) = h(x).$$

І. Б е л л м а н Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954. 2. Б о г о л ю б о в Н.Н., М и т р о п о л ь с к и й Е.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1958. 3. Б о л о т и н В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., 1971. 4. Г р о д ш т е й н И.С., Р и ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962. 5. Л о п а т и н с к и й Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. К., 1984. 6. М о и с е е в Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1969. 7. П р у д н и к о в А.П., Б р и ч к о в Ю.А., М а р и ч е в О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.

Стаття надійшла до редколегії 26.09.85

УДК 517.949:517.956

А.М.Кузик

ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ЛОКАЛЬНО-ОДНОВИМІРНОЇ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ У ВИПАДКУ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Одним з найбільш ефективних методів побудови економічних різницьових схем є метод сумарної апроксимації (МСА). Він дає змогу будувати різницьові локально-одновимірні схеми (ЛОС) для нестационарних задач математичної фізики у випадку довільної області Π - вимірного простору [4]. У працях [2,3] досліджена збіжність аддитивних моделей і різницьових ЛОС МСА при мінімальних вимогах на гладкість розв'язку вихідної диференціальної задачі. Одержимо оцінку швидкості збіжності для однієї різницьової

ЛОС в нормі більш сильній, ніж у праці [3]. Для спрощення розглядаємо двовимірний евклідов простір, однак отримані результати характерні і для простору довільного числа вимірів.

Розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) + q(x,t)u(x,t) = f(x,t); \quad (1)$$

$$x = (x_1, x_2), \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_T, \quad (2)$$

де $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, Γ - границя області Ω , $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \Gamma \times [0, T]$.

На відрізку $[0, T]$ і в області $\bar{\Omega}$ введемо рівномірні сітки

$$\bar{\omega}_T = \{t = t_j = j\tau : j = 0, 1, \dots, K, \tau = \frac{T}{K}\},$$

$$\bar{\omega}_h = \{x = (x_1, x_2) = (i_1 h_1, i_2 h_2), i_{\alpha} = 0, 1, \dots, N_{\alpha}, N_{\alpha} h_{\alpha} = 1, \alpha = 1, 2\}.$$

Введемо позначення: $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$; ω_h - множина внутрішніх вузлів сітки $\bar{\omega}_h$, $\gamma = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$.

Взявши за основу адитивну модель МСА з розпаралелюванням [1], побудуємо різницеву ЛОС

$$\eta_{\alpha} \frac{y_{\alpha}^{j+1} - \bar{y}^j}{\tau} + \Lambda_{\alpha, j+1} y_{\alpha}^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 h_2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_1 - \frac{h_1}{2}}^{x_1 + \frac{h_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} f_{\alpha}(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_2 d\xi_1 dt, \quad / 3/$$

$$(x_1, x_2) \in \omega_h, \quad j = 0, 1, \dots, K-1, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$y_{\alpha}^0 = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_1 - \frac{h_1}{2}}^{x_1 + \frac{h_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} u_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1, \quad \bar{y}^j = \sum_{\alpha=1}^2 \eta_{\alpha} y_{\alpha}^j,$$

$$y_{\alpha}^j|_{\gamma} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, K,$$

(4)

де

$$\Lambda_{\alpha, j+1} v = -(a_{\alpha}^{j+1} v_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}} + d_{\alpha}^{j+1} v, \quad \Lambda_{j+1} = \Lambda_{1, j+1} + \Lambda_{2, j+1};$$

$$\alpha = 1, 2,$$

$$a_{\alpha}^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 h_2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{\alpha} - \frac{h_1}{2}}^{x_{\alpha}} \int_{x_{3-\alpha} - \frac{h_2}{2}}^{x_{3-\alpha} + \frac{h_2}{2}} k_{\alpha}(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_2 d\xi_1 dt;$$

$$d_{\alpha}^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 h_2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_1 - \frac{h_1}{2}}^{x_1 + \frac{h_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} q_{\alpha}(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_2 d\xi_1 dt;$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \eta_{\alpha} = 1, \sum_{\alpha=1}^2 f_{\alpha}(x, t) = f(x, t), \sum_{\alpha=1}^2 q_{\alpha}(x, t) = q(x, t).$$

Існує така теорема.

Теорема. Нехай $u_0(x) \in W_2^{0,1}(\Omega)$, $f_{\alpha}(x, t) \in L_2(Q_T)$, $\alpha=1,2$
і виконуються умови

$$k_{\alpha}(x, t) \in W_{\infty}^{1,1}(Q_T), \quad k_{\alpha}(x, t) \geq \nu > 0,$$

$$q_{\alpha}(x, t), \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial t} \in L_{\infty}(Q_T), \quad q_{\alpha}(x, t) \geq \nu > 0, \quad \alpha=1,2,$$

тоді, якщо

$$\frac{\tau}{|h|^2} \leq C_1 < \infty, \quad \frac{h_1}{h_2} = C_2 < \infty,$$

розв'язок різницевої ЛОС (3), (4) збігається до розв'язку задачі (I), (2) і наявна оцінка швидкості збіжності

$$\left[\tau \sum_{j=0}^{K-1} \left(\| \bar{y}^{j+1} - \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u(., t) dt \|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{\alpha=1}^2 \| y_{\alpha}^{j+1} - \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u(., t) dt \|_{W_{2,\alpha}^1(\omega_h)}^2 \right) \right]^{1/2} \leq \\ \leq M c |h| (\| u \|_{W_2^{2,1}(Q_T)} + \sum_{\alpha=1}^2 \| f_{\alpha} \|_{L_2(Q_T)}),$$

де $C = \max \{c_1, c_2, \frac{1}{c_2}\}$; M - константа, яка не залежить від τ, h та u .

1. Гордєзiani Д.Г., Самарський А.А. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации // Комплексный анализ и его приложения. М., 1978. С. 173-186. 2. Кузык А.М., Макаров В.Л. Скорость сходимости метода суммарной аппроксимации для обобщенных решений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 2. С. 297-301. 3. Макаров В.Л., Кузык А.М. Сходимость метода суммарной аппроксимации для обобщенных решений. Львов, 1984. 34 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ, № 2096 Ук-Д84. 4. Самарський А.А. Теория разностных схем. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 26.02.86

УДК 681.3.06

О.О.Євтушенко, В.В.Черняхівський

ДО ВЕРИФІКАЦІЇ ЦИКЛІВ ТИПУ *FOR*

Одержання якісного програмного продукту - основна мета системи КАПРИ [1]. Ряд її підсистем з різних позицій підходить до розв'язання цієї проблеми. Наприклад, згенеровані користувачем у діалозі з КАПРИ і структуровані ФОРТРАН-програми можуть налагоджуватися системою КАПКАН методом пошуку конкретних помилок [2], системою тестування, а також системою СИНВЕР (система інтерактивної верифікації). У результаті (після обробки кожною з указаних систем) якість налагодженої програми неодмінно повинна підвищитись.

Кожна програма, якщо вона нормально завершується, сама по собі не будучи ні правильною, ні неправильною, виконує деяку функцію у широкому розумінні цього слова. Визначення відповідності вказаної функції і тієї, реалізацію якої передбачає технічне завдання на дану програму, стає можливим при роботі користувача з інтерактивною системою верифікації СИНВЕР. При розробці цієї системи враховували спеціальну архітектуру поступаючих на її вхід програм, кожна з яких складена на підмножині мови ФОРТРАН ОС ЕС згідно з рекомендаціями [3]. Відзначимо, що СИНВЕР орієнтується на дослідження програм, які реалізують обчислювальні задачі. Суттєво використовується і те, що доведення коректності ієрархічно збудованої програми можна розкласти на доведення коректності елементарних програм, розміщених на відповідних рівнях ієрархії.

Цілий ряд обчислювальних ФОРТРАН-програм, як показує практика, має досить примітивну структуру, включаючи використання тільки таких програмних конструкцій, як послідовність, розвилка і частковий випадок циклу `while` - ітеративний цикл типу `for` (для ФОРТРАНа - цикл `DO`). У зв'язку з цим для деяких комбінацій таких програмних структур у системі СИНВЕР реалізовані алгоритми автоматичної генерації відповідних програмних функцій. При цьому, якщо X - деякий початковий стан даних програми P , а Y - відповідний вихідний стан даних програми P після нормального завершення її роботи, то множина всіх можливих впорядкованих пар $\{(X, Y)\}$ визначає програмну функцію P . Для побудови програмної функції ділянок програми вказаного виду від програміста не вимагається задання жодних специфікацій. Він виконує роль контролера, визначаючи в діалозі відповідність інформації, яку видала система, технічному завданню.

Розглянемо більш детально завдання генерації програмної функції для ітеративного циклу, керованого оператором ФОРТРАНа `DO`; тіло циклу - арифметичні оператори присвоєння, що означає розміщення в структурованій програмі на найнижчому рівні ієрархії. Нехай вказаний цикл має такий вигляд:

```

DO      X  I =  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 
   $q_1$ 
   $\vdots$ 
   $q_k$ 
X      CONTINUE,

```

(I)

де $q_1, \dots, q_k$ - арифметичні оператори присвоєння. Введемо ряд понять. Вектором стану даних $\bar{X}$ програми P назвемо вектор, компонентами якого є всі ідентифікатори змінних, що містяться у тексті P . Область допустимих значень кожної змінної за припущенням - множина або дійсних, або цілих, або комплексних машинних чисел. Розширимо цю область елементом ω , що означає "не визначено". Тоді початковим вектором стану даних програми P назвемо вектор $\bar{X}^0$, який отримується з $\bar{X}$ відповідною заміною всіх ідентифікаторів змінних на значення цих змінних до початку роботи програми, а вихідним вектором стану даних $\bar{Y}$ вектор, побудований аналогічно зі значень цих змінних після нормального завершення програми. У результаті програмна функція $[P]$

програми P визначається як

$$[P] = \{(\vec{X}^0, \vec{Y})\}.$$

Кожний арифметичний оператор присвоєння можна вважати деякою програмою, яка перетворює початковий вектор стану даних у вихідний. Тобто, якщо програма P складається з одного оператора присвоєння φ , то $\varphi = \{(\vec{X}^0, \vec{Y})\}$ і $[P] = \{(\vec{X}^0, \vec{Y}) \mid \vec{Y} = \varphi(\vec{X}^0)\}$. Розглянемо послідовність операторів

$$\varphi_1, \dots, \varphi_K.$$

Вони відповідно мають вигляд: $\rho_i = f_i(\eta_1^i, \dots, \eta_{z_i}^i)$, $(1 \leq i \leq K)$, де $\rho_i, \eta_j^i, (1 \leq i \leq K, 1 \leq j \leq z_i)$ - ідентифікатори змінних; $f_i, (i = \overline{1, K})$ - позначення для правих частин операторів присвоєння, що містять ці змінні. Саме $f_1, \dots, f_K$ змінюють стан даних програми (2). Тому $[P] = \{(\vec{X}^0, \vec{Y}) \mid \vec{Y} = f_K(f_{K-1}(\dots f_1(\vec{X}^0) \dots))\}$, де P - програма (2). Для дослідження коректності такої програми розглянемо ті компоненти $\vec{X}^0$, які після її завершення відрізняються від відповідних компонент $\vec{Y}$. Очевидно, що таких компонент може бути d , де $1 \leq d \leq K$ і $d = K$, якщо $\rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_K$. Позначимо множину змінних, що знаходяться в лівих частинах операторів присвоєння, через M :

$$M = \{\rho_{l_i}, \dots, \rho_{l_d}\}, (1 \leq l_i \leq K, 1 \leq i \leq d). \quad (3)$$

Змінні (3) назовемо частковими результуючими змінними (ЧРЗ) послідовності операторів (2).

Нехай $\rho_j \in M$. Тоді зрозуміло, що існує така підпослідовність послідовності (2) (навіть коли вона складається з одного елемента) $\varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}, \dots, \varphi_{t_s}$, що $\rho_j = \rho_{t_1} = \rho_{t_2} = \dots = \rho_{t_s}$, $t_1 < t_2 < \dots < t_s, (1 \leq s \leq K)$. Тоді після виконання оператора φ_{t_s} значення змінної ρ_j не зміниться, тобто φ_{t_s} формує вихідне значення ЧРЗ ρ_j . Назвемо оператор φ_{t_s} послідовності (3) частковим результуючим оператором (ЧРО) часткової результуючої змінної ρ_j , якщо жоден із операторів (2) з порядковим номером, більшим за t_s , не містить у лівій частині ρ_j . Часткову результуючу змінну ρ_j назовемо результуючою змінною (РЗ) послідовності операторів $\varphi_1, \dots, \varphi_K$, якщо ЧРО змінної ρ_j - це оператор φ_K або φ_{j_0} - ЧРО змінної $\rho_j \in M$, де $(1 \leq j_0 \leq K)$ і $(\forall l) (j_0 < l \leq K), \varphi_l$ не містить у правій частині ідентифікатор ρ_j . Результуючим

оператором (Р0) послідовності (2) назовемо оператор, порядковий номер якого найбільший серед тих, що містять РЗ P_j .

Нехай $\vec{X} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $\vec{X}^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_m^0)$, $\vec{Y} = (\xi_1^*, \dots, \xi_m^*)$ відповідно вектор стану даних програми, початковий вектор і вихідний вектор стану даних програми (1). Припустимо, що (1) працює нормально, тобто обов'язково завершується, виконавши тіло циклу NN разів. Тоді, замінивши (1) послідовністю

$$\underbrace{q_1, \dots, q_k}_{1\text{-й РАЗ}}, \underbrace{q_1, \dots, q_k}_{2\text{-й РАЗ}}, \dots, \underbrace{q_1, \dots, q_k}_{NN\text{-й РАЗ}}, \quad (4)$$

вихідний вектор програмної функції циклу визначимо за формулою:

$$\underbrace{q_k^0 q_{k-1}^0 \dots q_1^0}_{NN\text{-й РАЗ}} \dots \underbrace{q_k^0 \dots q_1^0}_{2\text{-й РАЗ}} \underbrace{q_k^0 \dots q_1^0}_{1\text{-й РАЗ}} (\vec{X}^0) = \vec{Y}.$$

Зрозуміло, що (4) має ті ж ЧРЗ, що і (2). Тому очевидно, що цикл змінює у процесі роботи значення ЧРЗ послідовності (2) і тільки їх (не беручи до уваги (1)), тобто

$$\xi_j^* = \xi_j^0, \quad (5)$$

якщо ξ_j не є ЧРЗ (2). Нехай без зменшення загальності компоненти вектора $\vec{X}$, $\xi_1, \dots, \xi_d$ — ідентифікатори змінних, що утворюють множину M . Введемо d функцій:

$$(V_i) (1 \leq i \leq d) \varphi_i: U_i \rightarrow V_i, \varphi_i(\xi_i, \vec{X}^0) = \xi_i^*, \quad (6)$$

де U_i — множина впорядкованих пар виду $(\xi_i, \vec{X}^0)$, $\xi_i \in \vec{X}$; V_i — множина допустимих значень змінної з ідентифікатором ξ_i . Тоді, якщо відомі початкові значення компонент вектора $\vec{X}^0$ $\xi_1^0, \dots, \xi_m^0$ і функції φ_i , то значення компонент вектора $\vec{Y}$ для програмної функції циклу (1) визначається за формулами (5)–(6).

Для автоматичної генерації аналітичного виду функцій φ_i в системі СИНВЕР розроблені алгоритми, які використовують символічне виконання, семантичний аналіз ЧРЗ послідовності (2), а також (в окремих випадках) метод математичної індукції по NN — числу раз виконання циклу (1).

І. Архангельский Б.В. Разработка промышленных методов и систем создания качественных программных изделий. Проект

КАПРИ-І // Надійність і якість програмного забезпечення: Тез. докл. Всесоюз. конф. Львов, 27-29 января 1985 г. С.9-11.
 2. Архангельский Б.В., Черняховский В.В. КАШКАН-ФОРТРАН-система отладки программ методом поиска конкретных ошибок // Программирование. 1984. № 6. С. 30-40. 3. Дзер-ж и н с к и й Ф.Я. ПСЕВДОКОД (язык проектирования программ и правила структурного программирования). М., 1979.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.86

УДК 519.34:532.516

В.М.Зубов, Г.А.Шинкаренко

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ ДЛЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З РІВНЯННЯМИ НАВ"Є-СТОКСА

Узагальнимо оцінки збіжності методу регуляризації для задачі Стокса, отриманні у праці [1], на випадок стаціонарних рівнянь Нав"є-Стокса.

1. Розглянемо крайову задачу для системи рівнянь Нав"є-Стокса в обмеженій області $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ або 3) з кусково-неперервною границею Γ :

$$\rho(\bar{u} \bar{v}) - \mu \Delta \bar{u} + \text{grad } p = \rho \bar{f} \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\text{div } \bar{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2)$$

$$\bar{u} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (3)$$

Ця задача, як відомо, описує в області Ω рух в'язкої нестисливої рідини з постійними в'язкістю $\mu > 0$ і густиною $\rho > 0$ під дією масових сил, заданих вектором $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$. Треба знайти вектор швидкостей рідини $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$, а також тиск p , які б задовольняли рівняння руху (1), умову нестисливості (2) і однорідну крайову умову Діріхле (3).

2. У варіаційній постановці задача (1)-(3) має наступний вигляд [3]:

$$a(\bar{u}, \bar{v}) - b(p, \bar{v}) + a_1(\bar{u}, \bar{u}, \bar{v}) = \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle \quad \forall \bar{v} \in V, \quad (4)$$

$$b(q, \bar{u}) = 0 \quad \forall q \in Q, \quad (5)$$

$$\text{де } a(\bar{u}, \bar{v}) = \mu \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right); \quad b(q, \bar{v}) = (q, \operatorname{div} \bar{v});$$

$$a_1(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \sum_{i,j=1}^n \left(u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, w_i \right); \quad \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle = \sum_{i=1}^n (f_i, v_i);$$

$$(p, q) = \int_{\Omega} p q \, dx; \quad \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V; \quad \forall p, q \in Q;$$

$$V = [H_0^1(\Omega)]^n; \quad Q = L^2_0(\Omega).$$

Можна переконатись [3], що

$$1) \quad |a(\bar{u}, \bar{v})| \leq \mu |\bar{u}|_1 |\bar{v}|_1, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V; \quad (6)$$

$$2) \quad a(\bar{v}, \bar{v}) = \mu |\bar{v}|_1^2, \quad \forall \bar{v} \in V; \quad (7)$$

$$3) \quad |a_1(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})| \leq N |\bar{u}|_1 |\bar{v}|_1 |\bar{w}|_1, \quad \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V, \quad (8)$$

$$\text{де } N = \sup_{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V} \frac{|a_1(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})|}{|\bar{u}|_1 |\bar{v}|_1 |\bar{w}|_1};$$

4) Існує стала $L > 0$ така, що

$$\sup_{\bar{v} \in V} \frac{b(q, \bar{v})}{|\bar{v}|_1} \geq L \|q\|_0, \quad \forall q \in Q. \quad (9)$$

3. Для розв'язування задачі (4), (5) застосуємо метод регуляризації, який приводить до задачі [3]

$$a(\bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) - b(p, \bar{v}) + a_1(\bar{u}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) = \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle \quad \forall \bar{v} \in V, \quad (10)$$

$$\varepsilon(p^\varepsilon, q) + b(q, \bar{u}^\varepsilon) = 0 \quad \forall q \in Q, \quad (11)$$

з якої необхідно знайти пару $(\bar{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ для заданого $\varepsilon > 0$.

З рівняння (11) виразимо функцію p^ε в явному вигляді

$$p^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \bar{u}^\varepsilon \quad (12)$$

і підставимо отриманий вираз у рівняння (10). В результаті приходимо до такої задачі

$$a(\bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) + \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div} \bar{u}^\varepsilon, \operatorname{div} \bar{v}) + a_1(\bar{u}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) = \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle \quad \forall \bar{v} \in V. \quad (13)$$

Надалі вважаємо, що задача (4), (5) має єдиний розв'язок $(\bar{u}, \rho) \in V \times Q$, а задача (I3) єдиний розв'язок $\bar{u}^\varepsilon \in V$.

Теорема 1. Нехай виконуються такі умови:

1) пара $(\bar{u}, \rho) \in V \times Q$ є розв'язком задачі (4), (5), причому

$$|\bar{u}|_1 \leq \dot{I}, \quad \dot{I} = \text{const} > 0;$$

2) Існують сталі $\varepsilon_0 > 0, j > 0$ такі, що

$$|\bar{u}^\varepsilon|_1 \leq j, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \varepsilon > 0,$$

де $\bar{u}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (I3) при фіксованому ε ;

3) $\mu > N(\dot{I} + j)$.

Тоді послідовність $\{(\bar{u}^\varepsilon, \rho^\varepsilon)\}$, де функція ρ^ε визначається формулою (I2), при $\varepsilon \rightarrow 0$ збігається до розв'язку $(\bar{u}, \rho)$, причому $|\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_1 + \|\rho^\varepsilon - \rho\|_0 = O(\varepsilon)$.

Доведення. Віднімемо рівняння (I3) і (4) з врахуванням (I2):

$$a(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}, \bar{v}) + a_1(\bar{u}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \bar{v}) - a_1(\bar{u}, \bar{u}, \bar{v}) = b(\rho^\varepsilon - \rho, \bar{v}) \quad \forall \bar{v} \in V. \quad (I4)$$

Завдяки властивості (9) існують такі $\bar{w} \in V, \bar{w} \neq 0, L > 0$,

$$\text{що } L \|\rho^\varepsilon - \rho\|_0 |\bar{w}|_1 \leq a(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}, \bar{w}) + a_1(\bar{u}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \bar{w}) - a_1(\bar{u}, \bar{u}, \bar{w}).$$

Враховуючи співвідношення (6), (8) і тотожність

$$a_1(\bar{u}, \bar{u}, \bar{w}) - a_1(\bar{v}, \bar{v}, \bar{w}) = a_1(\bar{u} - \bar{v}, \bar{u}, \bar{w}) + a_1(\bar{v}, \bar{u} - \bar{v}, \bar{w}) \quad \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V,$$

одержуємо

$$\|\rho^\varepsilon - \rho\|_0 \leq \frac{\mu + N(\dot{I} + j)}{L} |\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_1, \quad (I5)$$

Прийемо в (I4) $\bar{v} = \bar{u}^\varepsilon - \bar{u}$; використовуючи нерівність Буняковського – Шварца, (7), (8), (I5), приходимо до нерівності

$$(\mu - N(\dot{I} + j)) |\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_1^2 \leq \varepsilon \frac{\mu + N(\dot{I} + j)}{L} |\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}|_1 \|\rho\|_0.$$

Оскільки константа $\mu - N(\dot{I} + j)$ строго додатна, то, застосовуючи ще раз нерівність (I5), дістаємо твердження теореми.

4. Нехай V_h – підпростір простору V з базою $\bar{\phi}_1', \dots, \bar{\phi}_N'$. Розв'язок $\bar{u}_h^\varepsilon \in V_h$ задачі

$$a(\bar{u}_h^\varepsilon, \bar{v}) + \frac{1}{\varepsilon} (\text{div} \bar{u}_h^\varepsilon, \text{div} \bar{v}) + a_1(\bar{u}_h^\varepsilon, \bar{u}_h^\varepsilon, \bar{v}) = \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle \quad \forall \bar{v} \in V_h \quad (I6)$$

називається апроксимацією Бубнова - Гальоркіна розв'язку $\bar{u}_h^\varepsilon$ задачі (13). Оскільки $\bar{u}_h^\varepsilon \in V_h$, то наявний розклад

$$\bar{u}_h^\varepsilon = \sum_{i=1}^N U_i \bar{\Phi}^i. \quad (17)$$

Невідомі коефіцієнти U_i знаходимо з системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^N U_i [a(\bar{\Phi}^i, \bar{\Phi}^j) + \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div} \bar{\Phi}^i, \operatorname{div} \bar{\Phi}^j)] + \sum_{i,j=1}^N U_i U_j a_1(\bar{\Phi}^i, \bar{\Phi}^j, \bar{\Phi}^j) = \langle \bar{f}, \bar{\Phi}^j \rangle, \quad j=1, \dots, N,$$

яку отримуємо підстановкою (17) в (16) з $\bar{V} = \bar{\Phi}^i, i=1, \dots, N$.

Теорема 2. Нехай виконуються такі умови:

- 1) пара $(\bar{u}, \rho) \in V \times Q$ є розв'язком задачі (4), (5), причому $|\bar{u}|_1 \leq j, j = \text{const} > 0$;
- 2) Існують сталі $\varepsilon_0 > 0, h_0 > 0, j > 0$ такі, що розв'язок $\bar{u}_h^\varepsilon$ задачі (16) задовольняє нерівність $|\bar{u}_h^\varepsilon|_1 \leq j \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \forall h < h_0$;
- 3) $\mu > 3N(j + j)$.

Тоді при достатньо малих ε справедлива нерівність

$$|\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}|_1 \leq (C_1 \varepsilon + \frac{C_2}{\varepsilon} \inf_{\bar{v} \in V_h} |\bar{v} - \bar{u}|_1)^{1/2}, \quad C_1, C_2 = \text{const} > 0. \quad (18)$$

Якщо додатково виконується наступна умова:

- 4) Існує стала $L > 0$ така, що

$$\sup_{\bar{v} \in V_h} \frac{\theta(q, \bar{v})}{|\bar{v}|_1} \geq L \|q\|_0 \quad \forall q \in Q,$$

тоді послідовність $\{(\bar{u}_h^\varepsilon, \rho_h^\varepsilon)\}$, де

$$\rho_h^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \bar{u}_h^\varepsilon, \quad (19)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ збігається до розв'язку $(\bar{u}, \rho)$. При цьому справедлива оцінка

$$|\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}|_1 + \|\rho_h^\varepsilon - \rho\|_0 \leq C_3 \varepsilon + C_4 \inf_{\bar{v} \in V_h} |\bar{v} - \bar{u}|_1, \quad C_3, C_4 = \text{const} > 0. \quad (20)$$

Доведення. З рівнянь (4) і (16) випливає

$$a(\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}, \bar{v}) + \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div} \bar{u}_h^\varepsilon, \operatorname{div} \bar{v}) + \theta(\rho, \bar{v}) + a_1(\bar{u}_h^\varepsilon, \bar{u}_h^\varepsilon, \bar{v}) - a_1(\bar{u}, \bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in V_h. \quad (21)$$

На основі останнього рівняння приходимо до рівності

$$\begin{aligned} \mu |\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}|_1^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\operatorname{div}(\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u})\|_0^2 = & -\beta(\rho, \bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}) + a(\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}, \bar{v} - \bar{u}) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div}(\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}), \operatorname{div}(\bar{v} - \bar{u})) + \beta(\rho, \bar{v} - \bar{u}) + a_1(\bar{u}, \bar{u}, \bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}) - \\ & - a_1(\bar{u}_h^\varepsilon, \bar{u}_h^\varepsilon, \bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}) + a_1(\bar{u}_h^\varepsilon, \bar{u}_h^\varepsilon, \bar{v} - \bar{u}) - a_1(\bar{u}, \bar{u}, \bar{v} - \bar{u}) \quad \forall \bar{v} \in V_h. \end{aligned} \quad (22)$$

Оцінюючи зверху праву частину (22), одержуємо нерівність

$$(\mu - 3N(I+j)) |\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}|_1^2 \leq 2\varepsilon \|\rho\|_0^2 + (\mu + \frac{2\eta}{\varepsilon} + N(I+j)) |\bar{v} - \bar{u}|_1^2, \quad \forall \bar{v} \in V_h,$$

звідки, внаслідок умови 3 теореми, для достатньо малих ε приходимо до оцінки (18).

Підставимо формулу (19) в рівність (21), тоді

$$a(\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}, \bar{v}) + a_1(\bar{u}_h^\varepsilon, \bar{u}_h^\varepsilon, \bar{v}) - a_1(\bar{u}, \bar{u}, \bar{v}) = \beta(\rho_h^\varepsilon - \rho, \bar{v}) \quad \forall \bar{v} \in V. \quad (23)$$

Звідси

$$\begin{aligned} \mu |\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}|_1^2 + \varepsilon \|\rho_h^\varepsilon - \rho\|_0^2 = & a(\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}, \bar{v} - \bar{u}) - \beta(\rho_h^\varepsilon - \rho, \bar{v} - \bar{u}) - \\ & - \varepsilon(\rho_h^\varepsilon - \rho, \rho) + a_1(\bar{u}, \bar{u}, \bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}) - a_1(\bar{u}_h^\varepsilon, \bar{u}_h^\varepsilon, \bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}) + \\ & + a_1(\bar{u}_h^\varepsilon, \bar{u}_h^\varepsilon, \bar{v} - \bar{u}) - a_1(\bar{u}, \bar{u}, \bar{v} - \bar{u}) \quad \forall \bar{v} \in V_h. \end{aligned} \quad (24)$$

Внаслідок умови 4

$$\|\rho_h^\varepsilon - \rho\|_0 \leq \frac{\mu + N(I+j)}{L} |\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}|_1. \quad (25)$$

Врешті, оцінюючи зверху праву частину (24) з використанням (25), з огляду на умову 3 приходимо до оцінки (20).

5. Нехай базисні функції $\bar{\omega}^i$ є скінченноелементними сплайнами такими, що простори апроксимацій V_h характеризуються наступною інтерполяційною властивістю [2]:

Для довільного $\bar{v} \in V \cap [H^{k+1}(\Omega)]^n, k \geq 1$ існує $\bar{v}_h \in V_h$ такий, що

$$\|\bar{v} - \bar{v}_h\|_1 \leq M h^k \|\bar{v}\|_{k+1}, \quad (26)$$

де h - параметр дискретизації, а $M = \text{const} > 0$ не залежить від вибору h і $\bar{V}$.

Наслідок (з теореми 2). Нехай виконуються умови 1-3 теореми 2, а також умова (26). Тоді, якщо $\varepsilon \sim h^k$, послідовність $\{\bar{u}_h^\varepsilon\}$ при $h \rightarrow 0$ збігається до вектора $\bar{u}$. При цьому справедлива оцінка

$$|\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}|_1 = O(h^{k/2}).$$

Якщо ж додатково виконується умова 4 теореми 2, то при $\varepsilon \sim h^k$ виконується оцінка

$$|\bar{u}_h^\varepsilon - \bar{u}|_1 + \|p_h^\varepsilon - p\|_0 = O(h^k).$$

1. Зубов В.Н., Шинкаренко Г.А. Сходимость конечноэлементных аппроксимаций для регуляризованной задачи Стокса. Львов, 1985. 23 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ, № 2142-Ук85.
2. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. - Львов: Редакционно-издательская группа Львов. ун-та. 1981. 88 с. 3. Girault V., Raviart P.A. Finite element approximations of the Navier-Stokes equations // Lect. Notes Math. 1979. Vol. 749. 200 p.

Стаття надійшла до редколегії 27.01.86

УДК 539.3

Л.Й.Ощипко, Л.М.Журавчак

ОПТИМИЗАЦІЯ КОНСТРУКЦІЇ З УМОВ МІЦНОСТІ І СТІЙКОСТІ

Розглядаємо задачу оптимального проектування за вагою на міцність і стійкість конструкції, що складається з кругової циліндричної оболонки радіуса R , товщини h_2 і довжини L , спряженої з пластинкою товщини h_1 . Конструкція знаходиться під дією рівномірного зовнішнього тиску $q = \text{const}$. Мінімум маси (об'єму) конструкції шукаємо на підпросторі проектування, що визначається обмеженнями на максимальні еквівалентні напруження, які виникають в пластинці й оболонці, і верхнє критичне на-

вантаження на оболонку. Тобто задача оптимального проектування за масою на міцність і стійкість формулюється так: мінімізувати

$$V(h_1, h_2, R, L) = \pi \left[\left(R + \frac{h_2}{2} \right)^2 \left(L + \frac{h_1}{2} \right) - \left(R - \frac{h_2}{2} \right)^2 \left(L - \frac{h_1}{2} \right) \right] \quad (1)$$

при обмеженнях

$$\max_z \sigma_{\text{екв}}^{\text{пл}} \leq [\sigma],$$

$$\max_x \sigma_{\text{екв}}^{\text{об}} \leq [\sigma],$$

$$\min \hat{q}_{\text{кр}} \geq \hat{q};$$

$$h_1 \geq 0, h_2 \geq 0, R \geq 0, L \geq 0, \quad (2)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження; $\hat{q} = \frac{q}{E} \left(\frac{R}{h_2} \right)^2$; E – модуль Юнга. (3)

При пружному розрахунку конструкцій розбиваємо на круглу пластинку [3] і безмежну циліндричну оболонку [4].

Еквівалентні напруження на зовнішній і внутрішній поверхнях елементів конструкції визначаються за формулами

$$\sigma_{\text{екв}} = \max \{ \sigma_{\text{екв}}^+, \sigma_{\text{екв}}^- \},$$

$$\sigma_{\text{екв}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1^{\pm})^2 + (\sigma_2^{\pm})^2 + (\sigma_1^{\pm} - \sigma_2^{\pm})^2},$$

де

$$\sigma_1^{\pm} = \pm \frac{6M_z}{h_1^2} + \frac{N_z}{h_1}, \quad \sigma_2^{\pm} = \pm \frac{6M_\theta}{h_1^2} + \frac{N_\theta}{h_1}; \quad (4)$$

M_z, M_θ – згинні моменти; N_z, N_θ – розтягуючі зусилля, що виникають у пластинці;

$$\sigma_1^{\pm} = \pm \frac{6M_x}{h_2^2} + \frac{N_x}{h_2}; \quad \sigma_2^{\pm} = \pm \frac{6M_\varphi}{h_2^2} + \frac{N_\varphi}{h_2};$$

M_x, M_φ – згинні моменти; N_x, N_φ – розтягуючі зусилля, які виникають в оболонці.

Верхнє критичне навантаження на оболонку у вигляді всестороннього стиску при умові, що $R/h_2 \gg 1$ мало відрізняється від критичного навантаження при чистому поперечному тиску. Тому розв'язок задачі про стійкість циліндричної оболонки у лінійній постановці [1] зводиться до мінімізації

$$q = \frac{n^2}{12(1-\nu^2)} \frac{h_2}{R} \left(1 + \frac{\pi^2 R^2}{n^2 L^2}\right)^2 + \frac{\pi^4 R^5}{n^6 L^4 h_2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2 R^2}{n^2 L^2}\right)^2} \quad (5)$$

по n (кількості повних хвиль по колу).

Диференціюючи (5) по n^2 , отримуємо рівняння

$$B\left(1 + \frac{A}{n^2}\right)^5 - \frac{2BA}{n^4} \left(1 + \frac{A}{n^2}\right)^4 - \frac{3A_1}{n^2} \left(1 + \frac{A}{n^2}\right) + \frac{2AA_1}{n^{10}} = 0 \quad (6)$$

де

$$A = \left(\frac{\pi R}{L}\right)^2; \quad A_1 = A^2 \frac{R}{h_2};$$

$$B = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{h_2}{R};$$

ν - коефіцієнт Пуассона.

Значення $\hat{q}_{кр}$ знаходимо зі співвідношення

$$\hat{q}_{кр} = B \frac{(n^2 + A)^2}{n^2} + A_1 \frac{1}{n^2(n^2 + A)^2} \quad (7)$$

Рівняння (6) розв'язуємо, використовуючи метод ділення відрізка пополам.

Задачу оптимального проектування (1)-(3) з допомогою числових методів зводимо до задачі геометричного програмування з нульовим ступенем важкості, пряма програма якого формулюється так: мінімізувати

$$g_0(\bar{h}) = C_1 h_1^{a_{11}} h_2^{a_{21}} h_3^{a_{31}} h_4^{a_{41}} + C_2 h_1^{a_{12}} h_2^{a_{22}} h_3^{a_{32}} h_4^{a_{42}} \quad (8)$$

при обмеженнях

$$\frac{\max_z \sigma_{\text{екв}}^{\text{пл}} \max}{[\sigma]} = C_3 h_1^{a_{13}} h_2^{a_{23}} h_3^{a_{33}} h_4^{a_{43}} \leq 1,$$

$$\frac{\max_x \sigma_{\text{екв}}^{\text{об}} \max}{[\sigma]} = C_4 h_1^{a_{14}} h_2^{a_{24}} h_3^{a_{34}} h_4^{a_{44}} \leq 1,$$

$$\frac{\hat{q}}{\min \hat{q}_{\text{кр}}} = C_5 h_1^{a_{15}} h_2^{a_{25}} h_3^{a_{35}} h_4^{a_{45}} \leq 1,$$

(4)

де $h_3 = R$; $h_4 = L$.

На алгоритмічній мові ФОРТРАН складена програма, з допомогою якої проводять пружний розрахунок конструкції, знаходять критичне навантаження на оболонку, зводять задачу оптимального проектування до задачі геометричного програмування і розв'язують двоїсту програму задачі геометричного програмування.

При розв'язку задачі геометричного програмування використовуємо ітераційний процес, який полягає в тому, що при апроксимації функцій одночленими поліномами за вихідну точку послідовно беремо значення оптимальних параметрів, отриманих на попередньому кроці, аж поки не досягається задана точність на максимальні еквівалентні напруження і критичне навантаження

$$| \max_z \sigma_{\text{екв}}^{\text{пл}} \max - [\sigma] | < \varepsilon,$$

$$| \max_x \sigma_{\text{екв}}^{\text{об}} \max - [\sigma] | < \varepsilon,$$

$$| \hat{q} - \min \hat{q}_{\text{кр}} | < \varepsilon.$$

При фіксованих параметрах

$$E = 1,96 \cdot 10^7 \frac{\text{МН}}{\text{М}^2}; \nu = 0,3; q = 0,98 \frac{\text{МН}}{\text{М}^2}; [\sigma] = 39,2 \frac{\text{МН}}{\text{М}^2}$$

і вихідній точці

$$h_1 = 0,012 \text{ м}; h_2 = 0,012 \text{ м}; R = 0,2 \text{ м}; L = 0,3 \text{ м}$$

отримано такі результати:

$\hat{q}$	h_1	h_2	R	L	V
0,06	$0,776 \cdot 10^{-2}$	$0,764 \cdot 10^{-2}$	0,194	0,639	$0,687 \cdot 10^{-2}$
0,08	$0,847 \cdot 10^{-2}$	$0,833 \cdot 10^{-2}$	0,212	0,530	$0,713 \cdot 10^{-2}$
0,10	$0,904 \cdot 10^{-2}$	$0,899 \cdot 10^{-2}$	0,226	0,469	$0,738 \cdot 10^{-2}$

Як і слід було чекати зі збільшенням q при постійному $[\sigma]$ зменшується довжина циліндричної оболонки, а її радіус і товщина, а також товщина пластинки зростають.

1. В о л ь м и р А.С. Устойчивость упругих систем. М., 1972.
 2. Д а ф ф и н Р., П и т е р с о н Э., З е н е р К. Геометрическое программирование. М., 1972. 3. О щ и п к о Л.И., І в а н к і в К.С. Застосування геометричного програмування до оптимізації по вазі тонкостінних конструкцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1976. Вип. 11. С. 81-75. 4. Т и м о ш е н к о С.П., В о й н о в с к и й - К р и г е р С. Пластинки и оболочки. М., 1963.

Стаття надійшла до редколегії 02.12.85

З М І С Т

Гриліцький Д.В., Сулим Г.Т. Розвиток теорії тонкостінних включень у Львівському державному університеті	3
Гриліцький Д.В., Баран В.П. Про постановку контактних задач термопружності з врахуванням теплоутворення при неідеальному тепловому контакті тіл	10
Мокрик Р.І., Балибердін В.В., Оліярник І.В., Уханська О.М. Нестационарна задача теплопровідності для багатошарової сфери	14
Опанасович В.К., Копець А.С. Про побудову розв'язку задачі для пружної циліндричної оболонки, який має розрив по твірній	18
Щербина Ю.М., Голуб Б.М. Збіжність ітераційного методу з пам'яттю з використанням LDL^T - розкладу Холеського для мінімізації функцій	23
Голуб Б.М. Одна модифікація методу лінеаризації	26
Припула М.М., Цимбал В.М. Оцінка розв'язку змішаної задачі для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння	32
Сеньо П.С., Цимбал В.М. Оцінка розв'язку змішаної задачі для сингулярно збуреного параболічного рівняння	36
Припула М.М., Грица Т.М. Чисельний розв'язок стохастичного диференціального рівняння з імпульсною дією	39
Жук М.В. Застосування методу Канторовича для розв'язування задачі Неймана	44
Квіт І.Д. Емпіричний і гіпотетичний зрізні варіаційні ряди	47
Квіт І.Д., Москвяк Є.В. Порівняння двох зрізаних вибірок	50
Гнатишин О.П. Чисельне дослідження оптимальної тактики попереджувальних заміन при вейбулівським напруженні	53
Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Модифікований метод еквівалентної лінеаризації для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку	55

Кузик А.М. Про швидкість збіжності локаль- но-одновимірної різницевої схеми у випадку узагальнених розв'язків	57
Євтушенко О.О., Черняхівсь- кий В.В. До верифікації циклів типу <i>FOR</i>	60
Зубов В.М., Шинкаренко Г.А. Збіж- ність методу регуляризації для крайової задачі з рівняннями Нав'є-Стокса	64
Ощипко Л.І., Еуравчак Л.М. Оптимізація конструкції з умов міцності і стійкості	69

УДК 539.3

Развитие теории тонкостенных включений в Львовском государственном университете. Г р и л и ц к и й Д.В., С у л и м Г.Г. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 3-9 . - На укр. яз.

Представлен краткий обзор исследований упругого и термоупругого равновесия однородных изотропных сред с тонкостенными прослойками и линейными включениями, выполненных на кафедре механики Львовского государственного университета с помощью методов функций скачка и линейного разложения потенциалов. Библиогр.: 47 назв.

УДК 539.3

О постановке контактных задач термоупругости с учетом теплообразования при неидеальном тепловом контакте тел. Г р и л и ц к и й Д.В., Б а р а н Б.П. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 10-13 . - На укр. яз.

На основании условий неидеального теплового контакта тел через тонкий промежуточный слой, выведенных Я.С.Подстригачем, осуществляется постановка задач термоупругости с контактным тепловыделением. В качестве примера использования этих условий приводятся результаты решения осесимметричной задачи теплопроводности для пары тел - вращающийся сплошной круговой конечной длины цилиндр с плоским основанием и полупространство. Приведены графики, иллюстрирующие влияние входных параметров задачи на распределение температур тел на площадке контакта. Ил. 4. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517:536.21

Нестационарная задача теплопроводности для многослойной сферы. - М о к р и к Р.И., Б а л ы б е р д и н Б.В., О л и я р - н и к И.В., У х а н с к а я О.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 14-18 . - На укр. яз.

Исследуется изменение температуры в многослойной сфере. На границах слоев выполняются условия идеального теплового контакта, между внешним слоем и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. К решению задачи применяется метод ортогональных полиномов. Задача исследуется численно на машине ЕС 10-45. Ил. 2. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.3

О построении решения задачи для упругой цилиндрической оболочки, имеющего разрыв по образующей. О п а н а с о в и ч Б.К., К о п е ц А.С. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 18-23 . - На укр. яз.

Используя аппарат теории обобщенных функций, построено решение задачи для оболочки Кирхгофа-Лява, которое допускает наличие разрывов первого рода в полях перемещений, усилий и моментов по образующей цилиндра. Библиогр.: 4 назв.

УДК 519.6

LDL^T - разложения Холецкого для минимизации функций. Щербина Ю.Н., Голуб Б.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 23-25. - На укр. яз.

Для решения задачи безусловной минимизации функции исследуется модификация итерационного метода с памятью, порядок сходимости которого $1 + \sqrt{2} \approx 2.41$. Предложенная модификация, сохраняя высокий порядок сходимости, сходится к точке минимума из произвольного начального приближения благодаря регулировке шага и применению модифицированного LDL^T - разложения Холецкого. Последнее разрешает использовать алгоритм для минимизации невыпуклых функций. Доказана теорема, которая дает достаточные условия сходимости метода. Приведены численные характеристики метода. Библиогр.: 3 назв.

УДК 519.6

Одна модификация метода линеаризации. Голуб Б.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 26-32. - На укр. яз.

Для решения общей задачи нелинейного программирования исследуется модификация метода линеаризации, на каждой итерации которой матрица вторых производных функций Лагранжа аппроксимируется при помощи разностей второго порядка, а для обеспечения ее положительной определенности используется LDL^T - разложение с корректировкой диагональных элементов матрицы D . При определенных предположениях доказана сверхлинейная скорость сходимости метода. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.946

Оценка решения смешанной задачи для сингулярно возмущенного гиперболического уравнения. Пригула Н.Н., Цымбал В.Н. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 32-35. - На укр. яз.

Методом интегралов энергии получена оценка решения достаточно общей смешанной задачи для сингулярно возмущенного гиперболического уравнения второго порядка в двухмерном случае, вырождающегося в параболическое уравнение. Библиогр.: 7 назв.

УДК 518:517.946

Оценка решения смешанной задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения. Сенько П.С., Цымбал В.Н. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 36-38. - На укр. яз.

Методом интегралов энергии получена оценка решения сингулярно возмущенной смешанной задачи (граничные условия достаточно общие) для параболического уравнения второго порядка, вырождающегося в уравнение первого порядка, которая доказывает асимптотическую корректность разложения решения этой задачи. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.946

Численное решение стохастического дифференциального уравнения с импульсным воздействием. Пригула Н.Н., Грица Т.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 39-43. - На укр. яз.

Методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности решено стохастическое дифференциальное уравнение относительно амплитуды. Построен график зависимости амплитуды от времени. Ил. 1. Библиогр.: 4 назв.

УДК 518:517.9

Применение метода Канторовича для решения задачи Неймана.
Ж у к М.В. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. -
Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 44-46. - На
укр. яз.

Метод Канторовича применен для решения задачи Неймана. Уста-
новлена теорема существования и единственности решения исходной
задачи и соответствующей системы метода Канторовича. Библиогр.:
2 назв.

УДК 519.21

Эмпирический и гипотетический усеченные вариационные ряды.
К в и т И.Д. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. -
Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 47-50. -
На укр. яз.

Указано метод построения полного или усеченного гипотетичес-
кого вариационного ряда с целью проверки гипотезы о распределе-
нии популяции, для которой имеется эмпирический вариационный ряд
независимых наблюдений. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.21

Сравнение двух усеченных выборок. К в и т И.Д., М о с к -
в я к Е.В. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. -
Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 50-52. -
На укр. яз.

Сравнение двух усеченных выборок сводится к сравнению двух
соответственно построенных вариационных рядов с натуральными ран-
гами. Это разрешает применять любой критерий проверки однороднос-
ти двух полных независимых выборок. Библиогр.: 2 назв.

УДК 621.3

Численное исследование оптимальной тактики предупредительных
замен при вейбулловской наработке. Г н а т и ш и н А.П. // Вестн.
Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной
математики и механики. - С. 53-54. - На укр. яз.

Рассматривается задача определения оптимальной тактики пре-
дупредительных замен в случае вейбулловской наработки на отказ.
Исследуется характер изменения функции удельных затрат при varia-
ции стоимости ремонта отказавшего элемента и параметра формы рас-
пределения Вейбулла. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.944:947

Модифицированный метод эквивалентной линеаризации для нели-
нейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.
М а р т ы н е н к о М а р и я Д., М а р т ы н е н к о М и х а и л Д. //
Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи
прикладной математики и механики. - С. 55-57. - На укр. яз.

Предложен метод приближенного решения задачи Коши для одного
класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений I-го
порядка, основанный на эквивалентной линеаризации входящего в
уравнение нелинейного члена. Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.949:517.956

О скорости сходимости локально-одномерной разностной схемы в случае обобщенных решений. К у з ь к А.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 57-60. - На укр. яз.

В классе обобщенных функций построена локально-одномерная разностная схема метода суммарной аппроксимации решения первой начально-краевой задачи для уравнения параболического типа. Получена оценка скорости сходимости разностной схемы при естественных ограничениях на гладкость решения исходной задачи. Библиогр.: 4 назв.

УДК 681.3.06

К верификации циклов типа *FOR*. Е в т у ш е н к о Е.А., Ч е р н я х о в с к и й В.В. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 60-64. - На укр. яз.

Предложен подход к разработке системы интерактивной верификации вычислительных ФОРТРАН-программ. Основное внимание уделяется построению алгоритма нахождения программной функции участка программы, управляемого оператором *FOR*. При этом используется символическое выполнение и метод математической индукции по числу раз выполнения цикла. Библиогр.: 3 назв.

УДК 519.34:532.516

Сходимость метода регуляризации для краевой задачи с уравнениями Навье-Стокса. З у б о в В.Н., Ш и н к а р е н к о Г.А. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 64-69. - На укр. яз.

Описана численная схема решения задачи Дирихле для стационарной системы уравнений Навье-Стокса, основанная на регуляризации соответствующей вариационной задачи. Исследована сходимость последовательностей приближенных решений к точному решению. Получены оценки погрешностей конечноэлементных аппроксимаций регуляризованной задачи. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3

Оптимизация конструкции из условий прочности и устойчивости. О щ и п к о Л.М., Ж у р а в ч а к Л.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 27: Задачи прикладной математики и механики. - С. 69-73. - На укр. яз.

Рассматривается задача оптимального проектирования конструкции, состоящей из круглой пластинки и цилиндрической оболочки. Ищется минимум веса конструкции при ограничениях, наложенных на максимальные эквивалентные напряжения и критическую нагрузку оболочки. Задача решается методами геометрического программирования. Библиогр.: 4 назв.

Сборник научных трудов
Министерство высшего и среднего
специального образования
УССР

Вестник Львовского университета
Серия механико-математическая
Издается с 1965 г.

ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ
Вып. 27

Львов. Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения
"Вища школа"

Адрес редакционной коллегии:

290000 Львов-центр, ул. Университетская, 1. Университет,
кафедра прикладной математики.

Львовская областная книжная типография.

290000 Львов, ул. Стефаника, 11.

(На украинском языке)

Редактор В.В.В о й т о в и ч
Технічний редактор С.Д.Д о в б а
Коректор М.Ю.Г о р б а л ь

Н/К

Підп. до друку 01.12.86 . БГ 04100 . Формат 60x84/16.
Папір офсетн. Офс. друк. Умовн. друк. арк. 4,65 .
Умовн. фарб.-відб. 4,88 . Обл.-вид. арк. 4,58 . Тираж 600
прим. Вид. № 1624 . Зам. 4067 . Ціна 65 коп.
Замовне.

Львівська обласна книжкова друкарня. 290000
Львів, вул. Стефаника, 11

65 к.

