УДК 539.377

М.І.Бугрій

ПРО ОПТИМІЗАЦІЮ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ МОМЕНТНИХ ОБМЕЖЕННЯХ НА ТЕМПЕРАТУРУ

Розглянемо віднесену до змішаної ортогональної криволінійної системи координат (α, β, γ) [3] вільну від зовнішнього силового навантаження тонкостінну ізотропну оболонку постійної товщини $2h$, яка знаходиться під дією стаціонарного температурного поля $t(\alpha, \beta, \gamma)$, що задовольняє інтегральні обмеження

$$\int_{(V)} t(\alpha,\beta,\gamma)\,\psi_m(\alpha,\beta,\gamma)\,dV = P_m^*,\quad (m=\overline{0,m_0}), \qquad /1/$$

де (V) - область, яку займає оболонка; ψ_m утворюють повну ортонормовану систему функцій; P_m^* - задані параметри.

Ставимо задачу про відшукання такого температурного поля t, що задовольняє умови /1/, яке викликає оптимально низький рівень напружень в оболонці.

За критерій оптимізації вибираємо функціонал енергії пружної деформації оболонки [1]

$$\mathcal{W}[\vec{U},t] = \int_{(V)} \mathcal{W}_0(\vec{U},t)\,dV, \qquad /2/$$

де $\vec{U}$ - вектор переміщень, викликаних температурним полем t, з компонентами $U_k(\alpha,\beta,\gamma)$, $(k=\overline{1,3})$;

$$\mathcal{W}_0 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_{\alpha\alpha}^2+\sigma_{\beta\beta}^2+\sigma_{\gamma\gamma}^2-2\nu(\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta}+\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\gamma\gamma}+\sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\alpha})+2(1+\nu)(\sigma_{\alpha\beta}^2+\sigma_{\beta\gamma}^2+\sigma_{\gamma\alpha}^2)\right]-$$

питома енергія пружної деформації; σ_{pq} $(p,q=\alpha,\beta,\gamma)$ - компоненти симетричного тензора напружень, представлені через компоненти вектора переміщень $\vec{U}$ і температуру t; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона.

Зауважимо, що $\mathcal{W}_0$ - додатно визначена квадратична форма змінних σ_{pq}, тому функціонал /2/ - строго опуклий.

Відомо, що вектор переміщень $\vec{U}$ і стаціонарне температурне поле t у випадку відсутності масових сил задовольняють векторне рівняння Ляме в області (V) [1]

$$\Delta\vec{U} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{U} = \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,t \qquad /3/$$

і умови

$$\vec{\sigma}_n\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0} \qquad /4/$$

на поверхні (Σ) оболонки. Тут $\vec{\sigma}_n$ – вектор напружень, який діє на довільно орієнтованій у просторі поверхні з зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ [3]; α_t – коефіцієнт лінійного теплового розширення; умова /4/ записана з врахуванням відсутності зовнішнього силового навантаження оболонки.

Таким чином, поставлену задачу оптимізації термопружного стану оболонки можна сформулювати так: в класі $C^2(V) \cup C^1(\Sigma)$ двічі неперервно диференційованих в області (V) і один раз неперервно диференційованих на поверхні (Σ) функцій знайти екстремалі функціоналу /2/, що задовольняють рівняння /3/ і умови /1/, /4/.

Використовуючи правило множників Лагранжа [2], можна показати, що оптимальне температурне t і відповідне йому векторне поле переміщень $\vec{U}$ задовольняють наступну систему рівнянь в області (V)

$$\Delta\vec{U} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{U} = \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,t,$$

$$\Delta\vec{\lambda}^* + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{\lambda}^* = \vec{0}, \qquad /5/$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{U} - \vec{\lambda}^*) = 3\alpha_t t + f,$$

а також граничні умови на поверхні (Σ) оболонки

$$\vec{\sigma}_n\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0},\quad \vec{\lambda}_n\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0},\quad \vec{\lambda}^*\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0}. \qquad /6/$$

Тут $f = \sum\limits_{m=0} \tilde{\lambda}_m \Psi_m$; $\vec{\lambda}^*(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$, $\tilde{\lambda}_m$ – зведені множники Лагранжа; $\vec{\lambda}_n$ – вектор, що виражається через λ_1^*, λ_2^*, λ_3^* так, як вектор $\vec{\sigma}_n$ через переміщення U_1, U_2, U_3 при $t = 0$.

Рівняння /5/, умови /1/ і /6/ дають змогу однозначно відшукати оптимальне температурне поле t і відповідне йому $\vec{U}$ при заданій функції $f(\alpha, \beta, \gamma)$.

Справді, покажемо, що розв"язок задачі /5/–/6/ єдиний у класі $C^2(V) \cup C^1(\Sigma)$ при заданих множниках Лагранжа $\tilde{\lambda}_m$.

Розглянемо задачу

$$\Delta\vec{\lambda}^* + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{\lambda}^* = \vec{0}, \qquad /7/$$

$$\vec{\lambda}_n\Big|_{(\Sigma)} = \vec{\lambda}^*\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0}. \qquad /8/$$

Граничній задачі /7/-/8/ можна поставити у відповідність варіаційну задачу про знаходження екстремалей функціоналу

$$\mathcal{M}^*[\vec{\lambda}^*] = \mathcal{M}[\vec{\lambda}^*, 0] = \int_{(V)} \mathcal{M}_0(\vec{\lambda}^*, 0)\, dV \qquad /9/$$

при додаткових обмеженнях

$$\vec{\lambda}^*\big|_{(\Sigma)} = \vec{0}. \qquad /10/$$

Оскільки функціонал /9/ - строго опуклий, умови /10/ - лінійні, то розв"язок задачі /7/-/8/ - єдиний, і це є, як легко бачити, нульовий розв"язок.

Таким чином, гранична задача /5/-/6/ зводиться до вигляду

$$\Delta\vec{U} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{U} = \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,t,$$

$$\mathrm{div}\,\vec{U} = 3\alpha_t t + f, \qquad /11/$$

$$\vec{\sigma}_n\big|_{(\Sigma)} = \vec{0}. \qquad /12/$$

Цій задачі можна поставити у відповідність варіаційну задачу про відшукання екстремалей функціоналу

$$\mathcal{M}_2[\vec{U}, t] = \mathcal{M}[\vec{U}, t] + \mathcal{M}_1[t], \qquad /13/$$

де

$$\mathcal{M}_1[t] = \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}\int_{(V)} f t\, dV. \qquad /14/$$

Тому що функціонал /2/ - строго опуклий, /14/ - лінійний, то /13/ - строго опуклий. Отже, гранична задача /11/-/12/ має єдиний розв"язок, а тому і розв"язок задачі /5/-/6/ єдиний.

Зауважимо, що побудову розв"язку задачі /11/-/12/ можна провести у два етапи: спочатку визначити вектор $\vec{U}$, а потім - оптимальне температурне поле t . Справді, з другого рівняння /11/ маємо

$$t = \frac{1}{3\alpha_t}(\mathrm{div}\,\vec{U} - f). \qquad /15/$$

Тоді перше рівняння /11/ і умову /12/ з врахуванням /15/ запишемо у вигляді

$$\Delta\vec{U} + \frac{1}{3}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{U} + \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\,\mathrm{grad}\,f = \vec{0}, \qquad /16/$$

$$\vec{\sigma}_n^{(t)}\big|_{(\Sigma)} = \vec{0}. \qquad /17/$$

Тут $\vec{\sigma}_n^{(t)}$ - вектор, який отримують з $\vec{\sigma}_n$ при врахуванні /15/.

Таким чином, сформульована вище задача оптимізації зводиться до граничної задачі /16/-/17/ відносно вектора переміщень $\vec{U}$

з наступним використанням /15/ для визначення оптимального температурного поля t .

Зауважимо, що граничній задачі /16/-/17/ можна поставити у відповідність варіаційну задачу про відшукання екстремалей функціоналу, який отримується з /13/ шляхом виключення функції t за допомогою /15/.

На закінчення відзначимо, що функціонал /13/ можна використати для отримання двовимірного аналогу задачі /16/-/17/, якщо задати закон зміни переміщень по товщині оболонки у вигляді скінченного розкладу, наприклад, по системі поліномів Лежандра $P_n\left(\frac{\gamma}{h}\right)$

$$U_1=\sum_{n=0}^{n_0}u_n(\alpha,\beta)P_n\left(\frac{\gamma}{h}\right),\quad U_2=\sum_{n=0}^{n_0}v_n(\alpha,\beta)P_n\left(\frac{\gamma}{h}\right),$$
$$U_3=\sum_{n=0}^{n_0}w_n(\alpha,\beta)P_n\left(\frac{\gamma}{h}\right). \qquad /18/$$

З врахуванням /15/, /18/ функціонал /13/ після інтегрування по γ можна звести до вигляду

$$\mathcal{M}_3[u_n,v_n,w_n]=\int_{(\Sigma_0)}F_1(u_n,v_n,w_n)\,d\Sigma, \qquad /19/$$

де (Σ_0) - серединна поверхня оболонки з контуром (Γ_0); F_1 - квадратична функція відносно u_n , v_n , w_n та їх похідних першого порядку.

З необхідної умови екстремуму для функціоналу /19/ отримуємо наближену систему рівнянь в області (Σ_0) і граничні умови на контурі (Γ_0) відносно функцій u_n , v_n , w_n , що відповідає задачі /16/-/17/.

1. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. К., 1979. 2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976. 3. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К., 1978.

Стаття надійшла до редколегії 04.02.86