УДК 517.946

С.П.Лавренюк

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ З НЕВІД"ЄМНОЮ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЮ ФОРМОЮ

Розглянемо задачу

$$u_{tt}+\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D_x^{\alpha}\left(a_{\alpha\beta}(t)D_x^{\beta}u\right)+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_x^{\alpha}\left(b_{\alpha\beta}(t)D_x^{\beta}u\right)+$$

$$+c_0(x,t)u_t+c_1(x,t)u=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \qquad /1/$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in R^n, \qquad /2/$$

де $Q_T=\{x\in R^n,\ 0<t<T\}$.

Позначимо $Q_\tau=\{x\in R^n,\ 0<t<\tau\},\ D_\tau=Q_T\cap\{t=\tau\}$.

Поряд з /1/, /2/ розглянемо задачу

$$u_{tt}+\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D_x^{\alpha}\left(a^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(t)D_x^{\beta}u\right)+\varepsilon\Delta^2 u+$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_x^{\alpha}\left(b^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(t)D_x^{\beta}u\right)+c_0^{\varepsilon}(x,t)u_t+$$

$$+c_1^{\varepsilon}(x,t)u=f^{\varepsilon}(x,t),\ (x,t)\in Q_T^{\varepsilon}, \qquad /3/$$

$$u(x,0)=\varphi^{\varepsilon}(x),\quad u_t(x,0)=\psi^{\varepsilon}(x), \qquad /4/$$

де $Q_T^{\varepsilon}=\{x\in R^n,\ 0<t<T-\varepsilon\},\ 0<\varepsilon\le\min\{T;1\}$.

Припускаємо, що $a^{\varepsilon}_{\alpha\beta}=a^{\varepsilon}_{\beta\alpha},\ b^{\varepsilon}_{\alpha\beta}=b^{\varepsilon}_{\beta\alpha}$. Користуючись методикою праці [1], а також результатами праці [2], можемо довести лему.

Лема. Нехай коефіцієнти рівняння /3/ і функції $f^{\varepsilon},\varphi^{\varepsilon},\psi^{\varepsilon}$ нескінченно диференційовані по всіх змінних, функції $c_0^{\varepsilon},c_1^{\varepsilon}$, $f^{\varepsilon},\varphi^{\varepsilon},\psi^{\varepsilon}$ мають компактні носії і існують такі сталі: $p\ge -1$ - ціле, $\delta>0$, $A>0$, що справедлива нерівність

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\left(Aa^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(t)+\frac{\partial a^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(t)}{\partial t}\right)\xi_\alpha\xi_\beta\ge\delta t\left(\sum_{|\alpha|=2} b^{\varepsilon}_{\alpha}(t)\xi_\alpha\right)^2$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $t \in [0, T-\varepsilon]$ і для $\delta > (2p+6)^{-1}$.
Тоді існує нескінченно диференційований розв"язок $u^{\varepsilon}(x,t)$ задачі /3/, /4/, для якого справедлива оцінка

$$\sum_{2m+|\alpha|\le 2l} \int_{D_\tau} (D_x^{\alpha} D_t^{m} u^{\varepsilon})^2 dx \le C \Big[\sum_{|\alpha|\le 2l+4[\frac{p}{2}]+8} \int_{D_0} (D_x^{\alpha} \varphi^{\varepsilon})^2 dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\le 2l+4[\frac{p+1}{2}]+4} \int_{D_0} (D_x^{\alpha} \psi^{\varepsilon})^2 dx + \sum_{|\alpha|\le 2l-2} \int_{Q_\tau} (D_x^{\alpha} f^{\varepsilon})^2 dx dt +$$

$$+ \sum_{m=0}^{l-2} \sum_{|\alpha|\le 2l-2m-4} \int_{D_\tau} (D_x^{\alpha} D_t^{m} f^{\varepsilon})^2 dx + \sup_{0\le\xi\le T-\varepsilon} \sum_{|\alpha|\le 2l} \int_{D_\xi} (D_x^{\alpha} D_t^{p+1} f)^2 dx +$$

$$+ \sum_{j=0}^{p} \sum_{|\alpha|\le 2l+4[\frac{p-j}{2}]+4} \int_{D_0} (D_x^{\alpha} D_t^{j} f^{\varepsilon}(x,0))^2 dx \Big], \ l \ge 2, \qquad /5/$$

де стала C не залежить від ε і функції u^{ε}. /Коли $p = -1$, то останній доданок в /5/ відсутній/.

Якщо тепер у задачі /3/, /4/ взяти в якості коефіцієнтів, вільного члена і початкових умов усереднені коефіцієнти, вільний член і початкові умови задачі /1/, /2/, то можна довести теорему існування розв"язку задачі /1/, /2/.

Теорема. Нехай виконуються умови: 1/ $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$; 2/ функції $D_t^{j} a_{\alpha\beta}$, $D_t^{j} b_{\alpha\beta}$, $j = 0, \ldots, \max\{p+1; l-1\}$,

$D_t^{m} D_x^{\gamma} c_0$, $D_t^{m} D_x^{\gamma} c_1$, $m = 0, \ldots, p+1$, $|\gamma| \le 2l+6$;

$D_t^{k} D_x^{\gamma} c_0$, $D_t^{k} D_x^{\gamma} c_1$, $|\gamma| + 2k \le 2l-2$; $D_t D_x^{\gamma} c_0$, $D_t D_x^{\gamma} c_1$, $|\gamma| \le 2l$

обмежені в Q_T; 3/ $f \in H_{2(l-1),0}(Q_T) \cap H_{2l-4,l-2}(Q_T)$,

$D_t^{m+1} f \in H_{2l,0}(Q_T)$, $m = 0, \ldots, p$; $D_t^{m} f(x,0) \in H_{2l+4[\frac{p-m}{2}]+4}(D_0)$, якщо $m=0,\dots,p;\ p>-1$; 4/ $\varphi\in H_{2\ell+4\left[\frac{p}{2}\right]+8}(D_0)$, $\psi\in H_{2\ell+4\left[\frac{p+1}{2}\right]+4}(D_0)$;

5/ $$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\left(Aa_{\alpha\beta}(t)+\frac{\partial a_{\alpha\beta}(t)}{\partial t}\right)\xi_\alpha\xi_\beta\geq\delta t\left(\sum_{|\alpha|=2}b_\alpha(t)\xi_\alpha\right)^2$$

для всіх $\xi\in R^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $t\in[0,T]$, де A,δ – додатні сталі, причому $\delta>(2p+6)^{-1}$, $p\geq-1$ – ціле.

Тоді існує єдиний розв"язок задачі /1/, /2/ $u(x,t)\in H_{2\ell\ell}(Q_T)$, $\ell\geq 2$, який задовольняє нерівність

$$\|u\|_{H_{2\ell,\ell}(Q_T)}\leq C\Big[\|\varphi\|_{H_{2\ell+4\left[\frac{p}{2}\right]+8}(D_0)}+\|\psi\|_{H_{2\ell+4\left[\frac{p+1}{2}\right]+4}(D_0)}+$$

$$+\|f\|_{H_{2\ell-4,\ell-2}(Q_T)}+\|f\|_{H_{2\ell-2,0}(Q_T)}+\|D_t^{p+1}f\|_{H_{2\ell,0}(Q_T)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{p}\|D_t^j f(x,0)\|_{H_{2\ell+4\left[\frac{p-j}{2}\right]+4}(D_0)}\Big]. \qquad /6/$$

Тут C – додатна стала, що не залежить від u. У випадку, коли $p=-1$, останній доданок у /6/ відсутній.

1. О л е й н и к О.А. О гиперболических уравнениях второго порядка, вырождающихся внутри области и на ее границе // Успехи мат.наук. 1969. Т. 24. Вып. 2. С. 229-230. 2. У р о е в В.М. О гладкости решений нестационарных уравнений типа колебаний пластины // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 10. С. 1835-1842.

Стаття надійшла до редколегії 04.02.86