УДК 517.946

М.І.Іванчов

ПРО СПРЯЖЕННЯ ДВОХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо задачу спряження розв"язків двох параболічних систем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\lambda_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+\sum_{j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_{ij}u_j\right)+f_i,\quad (i=1,2), \qquad /1/$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=\mu_i\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}+\sum_{j=1}^{2}\left(c_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x}+d_{ij}v_j\right)+g_i,\quad (i=1,2), \qquad /2/$$

заданих відповідно в областях $\Omega_1=\{(x,t): x>0, 0<t<T\}$ та $\Omega_2=\{(x,t): x<0,\ 0<t<T\}$. Початкові умови для систем /1/ і /2/ вважаємо нульовими, а умови спряження при $x=0$ задамо у вигляді

$$u_i(0,t)=v_i(0,t), \qquad /3/$$

$$\lambda_i\frac{\partial u_i(0,t)}{\partial x}=\mu_i\frac{\partial v_i(0,t)}{\partial x}. \qquad /4/$$

Припускаємо, що коефіцієнти систем /1/ і /2/ сталі, $\lambda_i>0$ $\mu_i>0$, $f_i(x,t)$ та $g_i(x,t)$ неперервні разом з похідними по x відповідно в областях Ω_1 і Ω_2.

Позначимо

$$u_i(0,t)=v_i(0,t)=\varphi_i(t). \qquad /5/$$

Вважаючи функцію $\varphi_i(t)$ відомою і використовуючи функцію Гріна [2], зведемо задачі /1/, /5/ і /2/, /5/ з нульовими початковими умовами до систем інтегродиференціальних рівнянь:

$$u_i(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^t\frac{\varphi_i(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}d\tau+\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}\right)\sum_{j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+b_{ij}u_j(\xi,\tau)\right)d\xi+\mathcal{F}_i(x,t),\ x\geq 0, \qquad /6/$$

$$v_i(x,t)=-\frac{x}{2\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^t\frac{\varphi_i(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4\mu_i(t-\tau)}}d\tau+\frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^0\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}\right)\sum_{j=1}^2\left(c_{ij}\frac{\partial v_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+d_{ij}v_j(\xi,\tau)\right)d\xi+G_i(x,t),\ x<0,$$

$$(i=1,2), \qquad /7/$$

де

$$\mathcal{F}_i(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty f_i(\xi,\tau)\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}\right)d\xi;$$

$$G_i(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^0 g_i(\xi,\tau)\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}\right)d\xi.$$

Задовольнимо умову спряження /4/. Перетворюючи отриману рівність, одержуємо

$$\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{\varphi_i(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i}}\left(\frac{\partial\mathcal{F}_i(0,t)}{\partial x}-\frac{\partial G_i(0,t)}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\int_0^\infty\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}\sum_{j=1}^2\left(a_{ij}\frac{\partial u_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+b_{ij}u_j(\xi,\tau)\right)d\xi-$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\int_{-\infty}^0\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\mu_i(t-\tau)}}\sum_{j=1}^2\left(c_{ij}\frac{\partial v_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+d_{ij}v_j(\xi,\tau)\right)d\xi. \qquad /8/$$

Розглядаючи /8/ як рівняння Абеля, знаходимо [1]

$$\varphi_i(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})}\int_0^t\left(\frac{\partial\mathcal{F}_i(0,\tau)}{\partial x}-\frac{\partial G_i(0,\tau)}{\partial x}+\frac{1}{4\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^\tau d\sigma\int_0^\infty\frac{\xi}{(\tau-\sigma)^{3/2}}\times\right.$$

$$\times e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda_i(\tau-\sigma)}}\sum_{j=1}^2\left(a_{ij}\frac{\partial u_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+b_{ij}u_j(\xi,\tau)\right)d\xi-\frac{1}{4\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^\tau d\sigma\int_{-\infty}^0\frac{\xi}{(\tau-\sigma)^{3/2}}\times$$

$$\times e^{-\frac{\xi^2}{4\mu_i(\tau-\sigma)}} \sum_{j=1}^{2}\left(c_{ij}\frac{\partial v_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+d_{ij}v_j(\xi,\tau)\right)d\xi\right)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Підставимо знайдений вираз $\varphi_i(t)$ у системи рівнянь /6/ і /7/. Після нескладних перетворень одержуємо систему інтегродиференціальних рівнянь відносно u_i та v_i :

$$u_i(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}-\frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i}}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}\right)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+b_{ij}u_j(\xi,\tau)\right)d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^0 e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda_i}}-\frac{\xi}{\sqrt{\mu_i}}\right)^2\frac{1}{4(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{2}\left(c_{ij}\frac{\partial v_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+d_{ij}v_j(\xi,\tau)\right)d\xi+\tilde{F}_i(x,t),\quad x\geq 0,$$

$$v_i(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\mu_i}}-\frac{\xi}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^2\frac{1}{4(t-\tau)}}\sum_{j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+\right.$$

$$\left.+b_{ij}u_j(\xi,\tau)\right)d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^0\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}-\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i}}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}\right)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{2}\left(c_{ij}\frac{\partial v_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+d_{ij}v_j(\xi,\tau)\right)d\xi+\tilde{G}_i(x,t),\quad x\leq 0,$$

/9/

де

$$\tilde{F}_i(x,t)=F_i(x,t)+\frac{x}{2\pi\sqrt{\lambda_i}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}(\tau-\sigma)^{1/2}}\times$$

$$e^{-\frac{x^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}d\tau\int_0^\tau\left(\frac{\partial F_i(0,\sigma)}{\partial x}-\frac{\partial G_i(0,\sigma)}{\partial x}\right)d\sigma,$$

$$\tilde{G}_i(x,t) = G_i(x,t) - \frac{x}{2\pi\sqrt{\mu_i}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}(\tau-\sigma)^{1/2}} \times$$

$$\times e^{-\frac{x^2}{4\mu_i(t-\tau)}} d\tau \int_0^\tau \left(\frac{\partial \tilde{F}_i(0,\sigma)}{\partial x} - \frac{\partial G_i(0,\sigma)}{\partial x} \right) d\sigma .$$

Систему /9/ розв"язуємо методом послідовних наближень, приймаючи

$$u_i^{(0)}(x,t) = \tilde{F}_i(x,t), \quad v_i^{(0)}(x,t) = \tilde{G}_i(x,t),$$

$$u_i^{(n+1)}(x,t) = \tilde{F}_i(x,t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}} - \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}} \right) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} \left(a_{ij} \frac{\partial u_j^{(n)}(\xi,\tau)}{\partial \xi} + b_{ij} u_j^{(n)}(\xi,\tau) \right) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})} \times$$

$$\times \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^0 e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda_i}} - \frac{\xi}{\sqrt{\mu_i}}\right)^2 \frac{1}{4(t-\tau)}} \sum_{j=1}^{2} \left(c_{ij} \frac{\partial v_j^{(n)}(\xi,\tau)}{\partial \xi} + d_{ij} v_j^{(n)}(\xi,\tau) \right) d\xi, \quad x \geq 0,$$

$$v_i^{(n+1)}(x,t) = \tilde{G}_i(x,t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\mu_i}} - \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^2 \frac{1}{4(t-\tau)}} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} \left(a_{ij} \frac{\partial u_j^{(n)}(\xi,\tau)}{\partial \xi} + b_{ij} u_j^{(n)}(\xi,\tau) \right) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^0 \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}} \right) \sum_{j=1}^{2} \left(c_{ij} \frac{\partial v_j^{(n)}(\xi,\tau)}{\partial \xi} + d_{ij} v_j^{(n)}(\xi,\tau) \right) d\xi, \quad x \leq 0.$$

Збіжність послідовностей $\left\{ u_i^{(n)} \right\}$, $\left\{ v_i^{(n)} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial v_i^{(n)}}{\partial x} \right\}$ випливає з оцінок

$$|u_i^{(n+1)}(x,t)-u_i^{(n)}(x,t)| \le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},\ |v_i^{(n+1)}(x,t)-v_i^{(n)}(x,t)| \le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},$$

$$|u_{i_x}^{(n+1)}(x,t)-u_{i_x}^{(n)}(x,t)| \le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},\ |v_{i_x}^{(n+1)}(x,t)-v_{i_x}^{(n)}(x,t)| \le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},$$

де константи A і M виражаються через відомі величини.

Отже, система інтегродиференціальних рівнянь /9/ має розв"язок при $0 \le t \le \delta$, де $\delta < M^{-2}$. Існування розв"язку при $t \ge \delta$ доводиться аналогічно.

Запропонована схема зводить задачу спряження двох параболічних систем до системи інтегродиференціальних рівнянь безпосередньо відносно розв"язку цієї задачі і може бути використана для чисельних розрахунків.

1. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959. 2. Положій Г.М. Рівняння математичної фізики. К., 1959.

Стаття надійшла до редколегії 13.05.86

УДК 517.946

В.М.Цимбал

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Задачі для сингулярно збурених звичайних диференціальних та інтегродиференціальних рівнянь достатньо добре вивчені [3, 4, 6]. Менше вивчені задачі для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних [9, 11] і найменше – задачі для сингулярно збурених інтегродиференціальних рівнянь у частинних похідних.

Методом примежового шару [4-6] з використанням функцій кутового примежового шару [2] побудуємо повне асимптотичне розвинення в $D_T = \{0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T\}$ розв"язку задачі