$$|u_i^{(n+1)}(x,t)-u_i^{(n)}(x,t)|\le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},\ |v_i^{(n+1)}(x,t)-v_i^{(n)}(x,t)|\le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},$$

$$|u_{i_x}^{(n+1)}(x,t)-u_{i_x}^{(n)}(x,t)|\le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},\ |v_{i_x}^{(n+1)}(x,t)-v_{i_x}^{(n)}(x,t)|\le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},$$

де константи A і M виражаються через відомі величини.

Отже, система інтегродиференціальних рівнянь /9/ має розв"язок при $0\le t\le \delta$, де $\delta < M^{-2}$. Існування розв"язку при $t\ge\delta$ доводиться аналогічно.

Запропонована схема зводить задачу спряження двох параболічних систем до системи інтегродиференціальних рівнянь безпосередньо відносно розв"язку цієї задачі і може бути використана для чисельних розрахунків.

1. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959. 2. Положій Г.М. Рівняння математичної фізики. К., 1959.

Стаття надійшла до редколегії 13.05.86

УДК 517.946

В.М.Цимбал

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Задачі для сингулярно збурених звичайних диференціальних та інтегродиференціальних рівнянь достатньо добре вивчені [3, 4, 6]. Менше вивчені задачі для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних [9, 11] і найменше – задачі для сингулярно збурених інтегродиференціальних рівнянь у частинних похідних.

Методом примежового шару [4-6] з використанням функцій кутового примежового шару [2] побудуємо повне асимптотичне розвинення в $D_T=\{0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ розв"язку задачі

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)+a(x,t)u+\int_0^t b(x,s)u(x,s)ds=f(x,t), \qquad /1/$$

$$u(x,0)=0, \quad u(0,t)=0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Побудову і обгрунтування асимптотичного розвинення ведемо за таких умов:

1/ функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, $f(x,t)$ мають похідні до потрібного порядку в D для вірності побудов, наведених нижче;

2/ виконується умова узгодженості $f(0,0)=0$;

3/ $\lambda>0$, $a(x,t)>0$ в D_T.

Існування і єдиність розв"язку задачі /1/, /2/ випливає з праці [8].

Асимптотичне розвинення розв"язку задачі /1/, /2/ до деякого довільного порядку N шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(\xi,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i(\xi,\tau)+\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /3/$$

де $\tau=t/\varepsilon$, $\xi=x/\varepsilon$ – регуляризуючі перетворення.

Внаслідок підстановки /3/ у /1/ і стандартних міркувань [4, 6] записуємо

$$a(x,t)\bar{u}_i+\int_0^t b(x,s)\bar{u}_i(x,s)ds=f_i(x,s)\ (i=0,\dots,N), \qquad /4/$$

де $f_0(x,t)\equiv f(x,t)$, $f_i(x,t)$ явно виражаються через $\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t}, \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} (j=i-1)$, а також $\int_0^\infty \eta^k\Pi_j(x,\eta)d\eta\ (j\le i-1,\ k\ge 0)$;

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau}+a(x,0)\Pi_i=\varphi_i(x,\tau) \quad (i=0,\dots,N), \qquad /5/$$

де $\varphi_0(x,\tau)\equiv 0$, $\varphi_i(x,\tau)$ явно виражаються через $\Pi_j(x,\tau)\ (j\le i-1)$ і їх похідні, а також вирази $\int_\tau^\infty \eta^k\Pi_j(x,\eta)d\eta\ (j\le i-1,\ k\ge 0)$;

$$\lambda \frac{\partial Q_i}{\partial \xi} + a(0,t) Q_i + \int_0^t b(0,s) Q_i(\xi, s) ds = \psi_i(\xi, t) \; (i = 0, \ldots, N),$$ /6/

де $\psi(\xi,t) \equiv 0, \psi_i(\xi,t)$ явно виражаються через $Q_j(\xi,t) (j \leq i-1)$ і їх похідні, а також вирази $\int_0^\infty s^k Q_j(\xi,s) ds \; (j \leq i-1, k \geq 0)$;

$$\frac{\partial P_i}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial P_i}{\partial \xi} + a(0,0) P_i = h_i(\xi, \tau) \quad (i = 0, \ldots, N),$$ /7/

де $h_0(\xi,\tau) \equiv 0, h_i(\xi,\tau)$ явно виражаються через $P_j(\xi,\tau) (j \leq i-1)$, а також вирази $\int_0^\infty \sigma^k P_j(\xi, \sigma) d\sigma \; (j \leq i-1, k \geq 0)$.

Використовуючи умову /2/, одержуємо умови, при яких слід розв"язувати /5/-/7/:

$$\Pi_i(x,0) = -\bar{u}_i(x,0) \quad (i = 0, \ldots N),$$ /8/

$$Q_i(0,t) = -\bar{u}_i(0,t) \quad (i = 0, \ldots, N),$$ /9/

$$P_i(\xi,0) = -Q_i(\xi,0), \; P_i(0,\tau) = -\Pi_i(0,\tau) \; (i = 0, \ldots, N).$$ /10/

Аналізуючи наведені вище формули, бачимо, що функції, які входять в /3/, можна визначити рекурентно, коли їх знаходити у такій послідовності: $\bar{u}_0(x,t), \Pi_0(x,\tau), Q_0(\xi,t), P_0(\xi,\tau), \bar{u}_1(x,t)$ і т.д.

З інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду /4/ визначають $\bar{u}_i(x,t) \; (i = 0, \ldots, N)$, які однозначно розв"язальні при наведених припущеннях, і розв"язки можна знайти методом послідовних наближень.

Функції $\Pi_i(x,\tau) \; (i = 0, \ldots, N)$ є розв"язками задач Коші /5/, /8/ для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Аналогічно /6/ легко показати, що $\Pi_i(x,t)$ - функції типу примежового шару в околі $t = 0$.

Функції $Q_i(\xi,t) \; (i = 0, \ldots, N)$ - розв"язки задач Коші /6/, /9/ для інтегродиференціальних рівнянь. Метод послідовних наближень, застосований з аналогічною метою у праці [4], доводить як однозначну розв"язальність цих задач, так і те, що $Q_i(\xi,t)$ - функції типу примежового шару в околі $x = 0$.

Функції $P_i(\xi,\tau)\ (i=0,\dots,N)$ є розв"язками змішаних задач для рівнянь у частинних похідних /7/, /10/, однозначна розв"язальність яких випливає з праці [1]. Розв"язки цих задач легко виписати в явному вигляді /коефіцієнти сталі/, звідки безпосередньо випливає, що $P_i(\xi,\tau)$ - функції типу примежового шару в околі точки $(0,0)$.

Невласні інтеграли, які з"являються вище, збіжні в силу того, що Π, Q, P - функції є функціями типу примежового шару.

Методом інтегралів енергії [7] одержана оцінка залишкового члена

$$\|R_N(x,t,\varepsilon)\|_{L_2(D_T)} \leq C, \qquad /11/$$

де стала C не залежить від ε, що й доводить асимптотичний характер розвинення /3/.

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

<u>Теорема</u>. При виконанні умов 1/ - 3/ розв"язок задачі /1/, /2/ допускає асимптотичне представлення /3/, де функції $U_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ є розв"язки рівнянь /4/; функції примежового шару в околі $t=0$ знаходяться як розв"язки задач /5/, /8/; функції примежового шару в околі $x=0$ є розв"язками задач /6/, /9/; функції кутового примежового шару $P_i(\xi,\tau)\ (i=0,\dots,N)$ - це розв"язки задач /7/, /10/; правильна оцінка /11/.

Зауважимо, що задача Коші для сингулярно збуреної гіперболічної інтегродиференціальної системи розглянута у праці [10].

1. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч.зап. Латв.гос.ун-та. 1958. Т. 20. Вып. 3. С. 87-104. 2. Б у т у з о в В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений // Мат.сб. 1977. Т. 104/146/. № 3. С. 460-485. 3. Б у т у з о в В.Ф., В а с и л ь е в а А.Б., Ф е д о р ю к М.В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки. Мат.анализ. 1976. С. 5-73. 4. В а с и л ь е в а А.Б., Б у т у з о в В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. 5. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3-122. 6. И м а н а л и е в М. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем. Фрунзе, 1972. 7. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 8. М е л ь н и к З.О. О разрешимости общих смешанных задач в прямом цилиндре для аналитических гиперболических интегродифференциальных уравнений // Докл.

АН СССР. 1965. Т. 163. № 5. С. 38-45. 9. Треногин В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. № 4. С. 123-156. 10. Цымбал В.Н. Задача Коши для сингулярно возмущенной интегродифференциальной системы // Доклады Всесоюзной школы молодых ученых: Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики. М., 1981. С. 173. 11. Lions I.L. Perturbations singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal. Berlin; Heidelberg; New York.

Стаття надійшла до редколегії 18.03.86

УДК 517.946

В.М. Флюд

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СЛАБО ЗВ"ЯЗАНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

В області $D = \{(x,t): 0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T, 0 < X, T < \infty\}$ розглянемо задачу Гурса для сингулярно збуреної слабо зв"язаної системи гіперболічного типу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \varepsilon \left(A(x,t) \dfrac{\partial u}{\partial t} + B(x,t) \dfrac{\partial u}{\partial x} \right) + C(x,t) u = f(x,t) & /1/ \\ u(x,0;\varepsilon) = \varphi(x), \quad u(0,t;\varepsilon) = \psi(t), & /2/ \end{cases}$$

де $0 < \varepsilon << 1$ – малий параметр; $A(x,t) = \| a(x,t) \delta_i^j \|_{ij=1}^n$, $B(x,t) = \| b(x,t) \delta_i^j \|_{ij=1}^n$ – діагональні матриці; δ_i^j – символ Кронекера; $C(x,t) = \| c_{ij}(x,t) \|_{ij=1}^n$, $u(x,t;\varepsilon)$ – шукана і $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$ – задані вектор-функції розмірності n.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1/ дані задачі /1/, /2/ достатньо гладкі в D;

2/ $a(x,t) > 0$, $b(x,t) > 0$, $C(x,t)$ – симетрична, додатно визначена матриця;

3/ введемо позначення: $a = a(0,0)$, $b = b(0,0)$, $\lambda = \min_i \lambda_i$, λ_i – власні значення матриці $C(0,0)$. Коли $\lambda_i < a^2 + b^2 - ab$, то a і b такі, що при $a \geq b$ має місце $a < b + \frac{\lambda}{a}$, а при $a \leq b$ – $b < a + \frac{\lambda}{b}$;

4/ $\varphi(0) = \psi(0)$.