АН СССР. 1965. Т. 163. № 5. С. 38-45. 9. Треногин В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика // Успехи мат.наук. 1970. Т. 25. № 4. С. 123-156. 10. Цымбал В.Н. Задача Коши для сингулярно возмущенной интегродифференциальной системы // Доклады Всесоюзной школы молодых ученых: Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики. М., 1981. С. 173. 11. Lions I.L. Perturbations singulieres dans les Problemes aux Limites et en Contrôle Optimal. Berlin; Heidelberg; New York.

Стаття надійшла до редколегії 18.03.86

УДК 517.946

В.М.Флюд

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СЛАБО ЗВ"ЯЗАНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

В області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq X, 0\leq t\leq T, 0<X, T<\infty\}$ розглянемо задачу Гурса для сингулярно збуреної слабо зв"язаної системи гіперболічного типу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \varepsilon \left(A(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} + B(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + C(x,t)u = f(x,t) & /1/ \\ u(x,0;\varepsilon)=\varphi(x), \quad u(0,t;\varepsilon)=\psi(t), & /2/ \end{cases}$$

де $0<\varepsilon<<1$ – малий параметр; $A(x,t)=\|a(x,t)\delta_i^j\|_{ij=1}^n$, $B(x,t)=\|b(x,t)\delta_i^j\|_{ij=1}^n$ – діагональні матриці; δ_i^j – символ Кронекера; $C(x,t)=\|C_{ij}(x,t)\|_{ij=1}^n$, $u(x,t;\varepsilon)$ – шукана і $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$ – задані вектор-функції розмірності n.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1/ дані задачі /1/, /2/ достатньо гладкі в D;

2/ $a(x,t)>0$, $b(x,t)>0$, $C(x,t)$ – симетрична, додатно визначена матриця;

3/ введемо позначення: $a=a(0,0)$, $b=b(0,0)$, $\lambda=\min_i \lambda_i$, λ_i – власні значення матриці $C(0,0)$. Коли $\lambda_i<a^2+b^2-ab$, то a і b такі, що при $a\geq b$ має місце $a<b+\frac{\lambda}{a}$, а при $a\leq b$ – $b<a+\frac{\lambda}{b}$;

4/ $\varphi(0)=\psi(0)$.

Відомо, що при вказаних умовах на дані задачі /1/, /2/ розв"язок існує і єдиний при фіксованому значенні параметра ε.

Зауважимо, що система /1/ повністю вироджується, тобто, коли в /1/ формально прийняти $\varepsilon = 0$, то отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, розв"язок якої, взагалі кажучи, умови /2/ не задовольняє. Повне виродження системи диференціальних рівнянь досліджено у праці [6], це розглядається задача Гурса для системи двох рівнянь першого порядку в частинних похідних з малим параметром. У праці [4] - неповне виродження.

Використовуючи метод примежового шару і кутового примежового шару [1-3], будуватимемо асимптотичне розвинення /АР/ довільного порядку N розв"язку задачі /1/, /2/ у вигляді

$$u(x,t;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}\left(V_i(x,t)+\Pi_i(x,\tau)+Q_i(\xi,t)+R_i(\xi,\tau)\right)+R_N(x,t;\varepsilon), \qquad /3/$$

де $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$, $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$, $V_i(x,t)$ - функції регулярної частини АР /тут і надалі під словом "функція" розумітимемо "вектор-функція"/; $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$ - функції звичайного примежового шару; $R_i(\xi,\tau)$ - функції кутового примежового шару, $R_N(x,t;\varepsilon)$ залишковий член АР.

Опишемо процес знаходження та призначення кожної функції із /3/.

Регулярна частина АР $V(x,t;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}V_i(x,t)$ визначається рекурентно зі співвідношень

$$C(x,t)V_i(x,t)=\begin{cases} f(x,t), \; i=0; \\ -\dfrac{\partial^2 V_{i-2}}{\partial t\,\partial x}-A(x,t)\dfrac{\partial V_{i-1}}{\partial t}-B(x,t)\dfrac{\partial V_{i-1}}{\partial x}, \; i=1,2,\dots,N. \end{cases} \qquad /4/$$

Тут і надалі вважатимемо, що функція з від"ємним індексом тотожно дорівнює нулеві.

Оскільки $V(x,t;\varepsilon)$ взагалі кажучи, умови /2/ не задовольняє, то в околі сторін границі $t=0$ і $x=0$ області D потрібно будувати функції примежового шару $\Pi(x,\tau;\varepsilon)$ і $Q(\xi,t;\varepsilon)$, кожна з яких у сумі з $V(x,t;\varepsilon)$ задовольняє відповідно першу та другу умови /2/.

Функцію примежового шару в околі $t=0$ будуємо у вигляді $\Pi(x,t;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}\,\Pi_i(x,\tau)$, де τ - регуляризуюче перетворення. Шляхом стандартної процедури теорії сингулярних збурень [3] отримуємо задачі для знаходження

$$A(x,0)\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau}+C(x,0)\Pi_i=\pi_i(x,\tau),\ \Pi_i(x,0)=\begin{cases}\varphi(x)-V_0(x,0),\ i=0;\\ -V_i(x,0),\ i=1,2,\dots,N,\end{cases} \qquad /5/$$

де $\pi_i(x,\tau)$ – відома функція, причому $\pi_0(x,\tau)\equiv 0$; /5/ – задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь / x – параметр/, її розв"язок задовольняє

$$\|\Pi_i(x,\tau)\|\le M(\tau)\exp\left\{-\frac{\lambda(x)}{a(x,0)}\tau\right\},\ (i=\overline{0,N}). \qquad /6/$$

Тут і надалі під нормою вектор-функції розуміємо суму модулів її компонент, а через $M(x)$ позначаємо многочлен скінченного степеня від x, придатний для тієї чи іншої оцінки; $\lambda(x)=\min\limits_{1\le i\le n}\lambda_i(x)$, $\lambda_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ – власні значення матриці $C(x,0)$. Беручи до уваги умови 2 із /6/, бачимо, що $\Pi_i(x,\tau)$ є функціями примежового шару.

Функцію примежового шару в околі $x=0$ будуємо у вигляді $Q(\xi,t;\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(\xi,t)$ / ξ – регуляризуюче перетворення/. Для визначення $Q_i(\xi,t)$ ставимо такі задачі:

$$B(0,t)\frac{\partial Q_i}{\partial \xi}+C(0,t)Q_i=q_i(\xi,t),\ Q_i(0,t)=\begin{cases}\psi(t)-V_0(0,t),\ i=0;\\ -V_i(0,t),\ i=1,2,\dots,N,\end{cases} \qquad /7/$$

де $q_i(\xi,t)$ – деяка лінійна комбінація $Q_s(\xi,t)$ $(s<i)$ і їх похідних, причому $q_0(\xi,t)\equiv 0$. Для $Q_i(\xi,t)$ справедлива оцінка $\|Q_i(\xi,t)\|\le M(\xi)\exp\left\{-\frac{\lambda(t)}{b(0,t)}\xi\right\}$, з огляду на яку, враховуючи умову 2, $Q_i(\xi,t)$ – функції примежового шару. Тут $\lambda(t)=\min\limits_{1\le i\le n}\lambda_i(t)$; $\lambda_i(t)$ – власні значення матриці $C(0,t)$.

Функція $\Pi(x,\tau;\varepsilon)$, задовольняючи в сумі з $V(x,t;\varepsilon)$ першу умову /2/, вносить нев"язку у виконання другої умови /2/. Аналогічно $Q(\xi,t;\varepsilon)$ вносить нев"язку в першу умову /2/. Щоб ліквідувати ці нев"язки, будуємо функцію кутового примежового шару $P(\xi,\tau;\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i(\xi,\tau)$.

Для знаходження $P_i(\xi,\tau)$ ставимо задачі

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 P_i}{\partial\tau\partial\xi}+A(0,0)\dfrac{\partial P_i}{\partial\tau}+B(0,0)\dfrac{\partial P_i}{\partial\xi}+C(0,0)P_i=p_i(\xi,\tau);\\ P_i(\xi,0)=-Q_i(\xi,0),\ P_i(0,\tau)=-\Pi_i(0,\tau),\end{cases} \qquad /8/$$

де $P_i(\xi,\tau)$ лінійно виражається через $P_s(\xi,\tau)$ $(s<i)$ і їх похідні, причому $P_0(\xi,\tau)\equiv 0$; /8/ – задача Гурса для слабо зв"язаної системи гіперболічних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Легко бачити, що з огляду на умови 4 /8/ узгоджені в кутовій точці $(0,0)$, що дає змогу будувати АР розв"язку задачі /1/, /2/ довільного порядку N . Для $P_i(\xi,\tau)$ $(i=\overline{0,N})$, що є розв"язком /8/, доведена лема, аналогічна відповідній лемі у праці [4], в якій показано, що $P_i(\xi,\tau)$ – функції кутового примежового шару. При доведенні леми використовуємо умови 3 нашого припущення.

Для залишкового члена методом інтегралів енергії [5] доведена оцінка

$$\|R_N(x,t;\varepsilon)\|_{L_2(D)} = O(\varepsilon^{N+\frac{1}{2}}). \qquad /9/$$

Сформулюємо це у вигляді теореми.

<u>Теорема</u>. Нехай виконуються умови 1–4. Тоді розв"язок задачі /1/, /2/ допускає АР у вигляді /3/, де $U_i(x,t)$ $(i=\overline{0,N})$ знаходимо із /4/; $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$ $(i=\overline{0,N})$ – функції звичайного примежового шару, що є відповідно розв"язками задач /5/ і /7/; $P_i(\xi,\tau)$ $(i=\overline{0,N})$ – функції кутового примежового шару, які знаходять із /8/; для залишкового члена АР $R_N(x,t;\varepsilon)$ справедлива оцінка /9/.

1. Б у т у з о в В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений // Мат. сб. 1977. Т. 146. № 3. С. 460–485. 2. В а с и л ь е в а А.Б., Б у т у з о в В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. 3. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат.наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122. 4. К а д ы к е н о в Б.М. Асимптотические разложения решения задачи типа Гурса для систем линейных гиперболических уравнений с малым параметром // Вопр. прикл.математики и механики. 1975. Вып. 2. С. 84–89. 5. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 6. Ц ы м б а л В.Н. Гиперболическая сингулярно возмущенная система первого порядка // Общая теория граничных задач: Сб.науч.тр. К., 1983. С. 301–302.

Стаття надійшла до редколегії 13.05.86