$\Delta_j^{(2)}$ одержуємо з $\Delta_j^{(1)}$, $j=\overline{1,4}$ заміною в останньому стовпця з елементами $0, \frac{d_{22}}{2\det D}, \frac{-d_{21}}{2\det D}$ відповідно стовпцем з елементами $0, \frac{-d_{12}}{2\det D}, \frac{d_{11}}{2\det D}$.

Зауважимо, що при цьому задовольняються рівності

$$\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(1)}=0,\ \sum_{j=1}^{4}\gamma_{2j}\Delta_j^{(1)}=0,\ \sum_{j=1}^{4}\alpha_j\Delta_j^{(1)}=\frac{-d_{22}}{2\det D}\Delta,\ \sum_{j=1}^{4}\alpha_j\gamma_{2j}\Delta_j^{(1)}=\frac{d_{21}}{2\det D}\Delta^{(1)};$$

$$\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(2)}=0,\ \sum_{j=1}^{4}\gamma_{2j}\Delta_j^{(2)}=0,\ \sum_{j=1}^{4}\alpha_j\Delta_j^{(2)}=\frac{d_{12}}{2\det D}\Delta^{(1)},\ \sum_{j=1}^{4}\alpha_j\gamma_{2j}\Delta_j^{(2)}=\frac{-d_{11}}{2\det D}\Delta^{(1)}.$$

Цей алгоритм ефективно реалізовано на ЕОМ на прикладі першої змішаної задачі для системи рівнянь тепловологопереносу, яка є в найбільш простому випадку частинним випадком системи /1/.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86

УДК 517.946

В.М.Кирилич

ПРО ОДНУ НЕЛОКАЛЬНУ ЗАДАЧУ ТИПУ ДАРБУ ДЛЯ СТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Нехай G – криволінійний сектор у верхній півплощині $t>0$ площини XOt, обмежений кривими γ_0 і γ_{m+1}, заданими відповідно рівняннями $x=a_0(t)$ і $x=a_{m+1}(t)$, $m\geq 0$, $a_0(0)=a_{m+1}(0)=0$, $a_{m+1}(t)>a_0(t)$ для всіх $t>0$. Криві $\gamma_s: x=a_s(t)$, $s=\overline{0,m+1}$, всі $a_s\in C^1(\mathbb{R}_+)$, $a_{s+1}(t)>a_s(t)$ для всіх $t>0$, $a_s(0)=0$ розбивають G на $m+1$ компоненту зв"язності G^s, $s=\overline{0,m}$, пронумеровані зліва направо.

При кожному $s=\overline{0,m}$ в G^s розглянемо строго гіперболічне рівняння порядку $n\geq 2$

$$A^s u \equiv \sum_{i=0}^{n} A_i^s(x,t,\partial_x,\partial_t)u^s(x,t)=f^s(x,t), \qquad /1/$$

де $A_i^s(x,t,\partial_x,\partial_t)$ – лінійний однорідний диференціальний оператор порядку i, при кожному $s=\overline{0,m}$:

$$A_i^s(x,t,\partial_x,\partial_t)u^s(x,t)\equiv\sum_{j=0}^{i}A_{ij}^s(x,t)\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j\partial t^{i-j}},$$

коефіцієнти $A_{ij}^s(x,t)$ якого квадратні матриці порядку n, причому

$$A_{n_0}^s(x,t)\equiv I,\quad s=\overline{0,m}.$$

Для рівняння /1/ задаються умови

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\Big[\sum_{k=s}^{s+1}B_{is}^{kp}(t,\partial_x,\partial_t)u^s(x,t)\Big|_{x=a_k(t)}+$$
$$+\int_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)}C_{is}^{p}(y,t,\partial_y,\partial_t)u^s(y,t)dy\Big]=h^p(t),$$
$$p=\overline{1,q},\qquad /2/$$

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)}C_{is}^{p}(y,t,\partial_y,\partial_t)u^s(y,t)dy=h^p(t),$$
$$p=\overline{q+1,N},\qquad /3/$$

$$N=\sum_{s=0}^{m}(p_s-q_s)+(m+1)n,\quad 0\le q\le N,\quad t\ge 0,$$

$$\frac{\partial^{k+l}u^s(0,0)}{\partial x^k\partial t^l}=u_s^{kl},\quad k+l=\overline{0,n-2},\quad s=\overline{0,m}.\qquad /4/$$

Тут B_{is}^{kp} і C_{is}^{p} – задані лінійні однорідні диференціальні оператори порядку i з неперервними коефіцієнтами; $h^p(t)$ – задані при $t\geq 0$ неперервні функції, причому $h^p\in C^1(R^+)$ і $h^p(0)=0$ при $p=\overline{q+1,N}$; u_s^{kl} – задані числа.

Коректна розв"язальність задачі /1/-/4/ і змішаних задач для рівняння /1/ розглянута у працях [1, 2]. Доведення існування і единості розв"язку таких задач грунтується на їх зведенні до відповідних задач для системи лінійних рівнянь першого порядку виду

$$\frac{\partial v_i^s}{\partial t}+\lambda_i^s(x,t)\frac{\partial v_i^s}{\partial x}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^s(x,t)\,v_k^s(x,t)+$$

$$+S_i^s(x,t,\partial_x,\partial_t)u^s+f^s(x,t),\ i=\overline{1,n},\quad s=\overline{0,m}.$$

/5/

Схема редукції /1/-/4/ до еквівалентної задачі для системи /5/, яка запропонована в [1, 2], має деякі недоліки. Зокрема, система інтегрофункціональних рівнянь Вольтерра другого роду для знаходження функцій u^s та їх похідних до $n-1$ порядку складається з $\frac{1}{2}n(n+1)(m+1)$ рівнянь, що перевищує порядок рівняння, крім того, в [1, 2] не можна явно виписати узагальнений $n-1$ раз неперервно диференційований розв"язок задачі /1/-/4/.

Пропонуємо більш досконалу схему редукції. Всі позначення і пояснення можна знайти у працях [1, 2].

Схема редукції. Для будь-якої точки $(x,t)\in\bar{G}^s$ виберемо лінію ℓ з рівнянням

$$\psi(\tau,x,t)=a_0(\tau)+\frac{a_{s+1}(\tau)-a_s(\tau)}{a_{s+1}(t)-a_s(t)}(x-a_s(t)),\ (0\le\tau\le t).$$

Тоді для довільних $i=\overline{0,n-2}$, $j=\overline{0,i}$ має місце вираз

$$\left.\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j\partial t^{i-j}}\right|_{(x,t)}=\sum_{k=i}^{n-2}\sum_{\ell=j}^{k-i+j} g_{ij}^{k\ell s}(x,t)\left.\frac{\partial^k u^s}{\partial x^\ell\partial t^{k-\ell}}\right|_{(0,0)}+$$

$$+\int_0^t\sum_{k=1}^{n} G_{ij}^{ks}(\tau,x,t)\,v_k^s(\psi(\tau,x,t),\tau)\,d\tau,\quad s=\overline{0,m}.\qquad /6/$$

Щоб його одержати, у рівності

$$\left.\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j\partial t^{i-j}}\right|_{(x,t)}=\left.\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j\partial t^{i-j}}\right|_{(0,0)}+\int_0^t\frac{d}{d\tau}\left(\left.\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j\partial t^{i-j}}\right|_{(\psi(\tau,x,t),\tau)}\right)d\tau$$

підінтегральну функцію слід виразити за формулою похідної від складної функції; після цього для кожної з одержаних похідних $i+1$ -го порядку застосувати аналогічні перетворення і т.д., аж до похідних $n-1$ -го порядку, які необхідно виразити через V_k^s. Після цього за допомогою стандартної перестановки порядку інтегрування перетворити кратні інтеграли в однократні.

Підстановка виразу /6/ у рівняння /5/, з врахуванням /4/, приводить до системи інтегродиференціальних рівнянь типу Вольтерра виду

$$\frac{\partial V_i^s}{\partial t}+\lambda_i^s(x,t)\frac{\partial V_i^s}{\partial x}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^s(x,t)V_k^s(x,t)+$$

$$+\int_0^t\sum_{k=1}^{n}Q_{ik}^s(\tau,x,t)V_k^s(\psi(\tau,x,t),\tau)\,d\tau+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{\ell=0}^{k}u_s^{k\ell}g_{k\ell}^{is}(x,t)+f_i^s(x,t),\ (x,t)\in G_s,$$

$$s=\overline{0,m},\quad i=\overline{1,n}. \qquad /7/$$

Відповідно перетворюються граничні умови /2/-/3/, внаслідок чого вони набирають вигляду

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=s}^{s+1}\alpha_{is}^{kp}(t)V_i^s(a_k(t),t)+$$

$$+\int_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)}\beta_{is}^p(y,t)V_i^s(y,t)dy\Big]=\tilde{H}_1^p(t,v)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{\ell=0}^{k}\tilde{h}_{k\ell 1}^p(t)u_s^{kp},\ p=\overline{1,q},$$

$$/8/$$

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)}\beta_{is}^p(y,t)V_i^s(y,t)dy=$$

$$=\tilde{H}_2^p(t,v)+\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{k}\tilde{h}_{kl2}^p(t)\,u_s^{kp},\quad p=\overline{q+1,N},\quad t\geq 0. \qquad /9/$$

Тут g_{ij}^{kls}, Q_{ik}^{s}, α_{is}^{kp}, β_{is}^{p}, $\tilde{H}_\delta^p$, $h_{kl\delta}^{p}$, $(\delta=1,2)$ – відомі функції, які одержують із вихідних даних задачі /1/-/4/.

Тепер можна дати означення кусково неперервного узагальненого розв"язку задачі /1/-/4/. Саме згідно з формулою /6/ так називатимемо кусково неперервну функцію u, для якої

$$u^s(x,t)=\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{k} g_{0,0}^{kls}(x,t)\,u_s^{kl}+$$

$$+\int_0^t\sum_{k=1}^{n} G_{0,0}^{ks}(\tau,x,t)\,v_k^s(\psi(\tau,x,t),\tau)\,d\tau,$$

де вектор-функція v є кусково неперервний розв"язок задачі /7/-/9/, тобто кусково неперервна функція, яка при всіх (x,t) задовольняє інтегрофункціональне рівняння, що одержується інтегруванням рівнянь /7/ вздовж відповідних характеристик, і при всіх t співвідношенням /8/-/9/.

Хоча рівняння /7/ і додаткові умови /8/-/9/ мають більш загальний вигляд, ніж /1/ і /2/-/3/ у праці [1] внаслідок додаткових інтегральних членів типу Вольтерра, всі міркування, проведені в [1], безпосередньо поширюються на задачу /7/-/9/. Таким чином, одержуємо таку теорему.

Теорема. Нехай задані функції в задачі /1/-/4/ задовольняють всі припущення, сформульовані у праці /1/, і для системи /7/ з умовами /8/-/9/ виконуються умови узгодження. Тоді задача /1/-/4/ має в G єдиний кусково неперервний узагальнений розв"язок.

1. Мельник З.О., Кирилич В.М. Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой // Укр.мат.журн. 1983. Т. 35. № 6. С. 771-776. 2. Мельник З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 2. С. 246-253.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86