УДК 517.512

М.Й.Михалюк, Є.М.Парасюк

ПРО ДРУГУ ВАРІАЦІЮ ОДНОГО ФУНКЦІОНАЛУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає у відшуканні плоскої однозв"язної області Д, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Існує такий варіаційний принцип: зі всіх однозв"язних областей, що містять початок координат, область Д, яка є розв"язком оберненої задачі для потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ, характеризується тим, що функція $z=z(e^{i\varphi})$, $0\le\varphi<2\pi$ регулярного параметричного представлення її границі дає стаціонарне значення функціоналу

$$J_0(z(e^{i\varphi}))=\int_0^{2\pi}\left[x^2+y^2+\frac{2}{\pi\sigma}V_e(x,y)\right]d\varphi, \qquad /1/$$

де

$$z(e^{i\varphi})=x(\varphi)+iy(\varphi)=x(\varphi)-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(s)\,ctg\frac{s-\varphi}{2}\,ds=$$

$$=x(\varphi)+iS(x)(\varphi),\quad S(x)(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(s)\,ctg\frac{s-\varphi}{2}\,ds. \qquad /2/$$

Функція $z=z(t)$ конформно відображає круг $|t|<1$ комплексної площини t, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію $z(t)$ називаємо розв"язком оберненої задачі для потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Функціонал /1/ розглядаємо на сукупності однозв"язних областей Д, голоморфні параметризації $z=z(e^{i\varphi})$, $0\le\varphi<2\pi$ границь яких задовольняють умову Гельдера.

Розглянемо варіації виду $x_\varepsilon(\varphi)=x(\varphi)+\varepsilon h(\varphi)$, $-1\le\varepsilon\le1$, де $h(\varphi)$ – деякий фіксований; 2π – періодичний приріст функції $x=x(\varphi)$; $0\le\varphi<2\pi$, що задовольняє умову Гельдера.

Відомо [1], якщо $z(t)$ – розв"язок оберненої задачі логарифмічного потенціалу, то функція $x(\varphi)=Re\,z(e^{i\varphi})$, $0\le\varphi<2\pi$ задовольняє нелінійне інтегральне рівняння

$$4x(\varphi)+\frac{2}{\pi\sigma}V_{\ell x}(\varphi)-\frac{2}{\pi\sigma}S[V_{\ell y}](\varphi)=0, \qquad /3/$$

де

$$V_{\ell x}(\varphi)=V_{\ell x}(x(\varphi),\ S(x)(\varphi)),$$

$$V_{\ell y}(\varphi)=V_{\ell y}(x(\varphi),\ S(x)(\varphi)).$$

Навпаки, якщо деяка функція $x(\varphi)$, що задовольняє умову Гельдера, є розв"язком рівняння /3/, і аналітична функція

$$z(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(\varphi)\,\frac{e^{i\varphi}+t}{e^{i\varphi}-t}\,d\varphi$$

здійснює конформне відображення одиничного круга $|t|<1$ на деяку однозв"язну область Д площини $z=x+iy$, то функція $z(t)$ є розв"язком оберненої задачі для потенціалу $V_\ell(x,y)$ і густини σ.

Друга варіація для функціоналу /1/ має вигляд

$$\delta^2 J_0(x,h,h)=\frac{d}{d\varepsilon}\,\delta J_0(x_\varepsilon,\ h)\Big|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\int_0^{2\pi}h(\varphi)\,A(h)(\varphi)\,d\varphi=\big(A(h)(\varphi),\ h(\varphi)\big), \qquad /4/$$

де

$$A(h)(\varphi)=4h(\varphi)+aV_{\ell xx}(\varphi)h(\varphi)+aV_{\ell xy}(\varphi)S(h)(\varphi)+$$

$$+\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{V_{\ell yx}(s)\,h(s)+V_{\ell yy}(s)\,S(h)(s)\Big\}\operatorname{ctg}\frac{s-\varphi}{2}\,ds, \qquad /5/$$

$$V_{\ell xx}(\varphi)=V_{\ell xx}(x(\varphi),S(x)(\varphi)),\quad V_{\ell xy}(\varphi)=V_{\ell xy}(x(\varphi),S(x)(\varphi)),$$

$$V_{\ell yy}(\varphi)=V_{\ell yy}(x(\varphi),S(x)(\varphi)),\quad a=\frac{2}{\pi\sigma}.$$

Легко перевірити, що A є лінійним, симетричним оператором.

Наша мета - дослідження другої варіації функціоналу /1/ для потенціалу

$$U_\ell(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_\ell}{\partial z} = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2}, \qquad /6/$$

$$a^2 < \frac{2}{27}, \quad \operatorname{Im} a = 0, \ b = 1$$

в околі точки $z = z(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2, \ |t| < 1, \ \alpha_1 > 0,$

яка є розв"язком оберненої задачі логарифмічного потенціалу [2].

Неважко переконатися, що

$$(A(h)(\varphi), h(\varphi)) = 4\int_0^{2\pi} h^2(\varphi)\,d\varphi + \frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\int_{|t|=1} V_{\ell zz}(z(t))\tilde{h}^2(t)\frac{dt}{it} \geqslant$$

$$\geqslant \pi(h_1 - 2h_2)^2 \geqslant 0, \qquad /7/$$

де

$$V_{\ell zz} = -\frac{\pi}{2}U_{\ell z}(z) = \frac{1}{2}(V_{\ell xx} - iV_{\ell yx}),$$

$$\tilde{h}(e^{i\varphi}) = h(\varphi) + iS(h)(\varphi) = h_1 t + h_2 t^2, \ h_1 > 0, \ \operatorname{Im} h_2 = 0.$$

З нерівності /7/ випливає теорема.

Теорема. В класі 2π - періодичних функцій, що задовольняють умову Гельдера, кожний розв"язок нелінійного інтегрального рівняння /3/ для потенціалу /6/ локально єдиний.

1. М и х а л ю к М.И. О локальной единственности решений обратной задачи логарифмического потенциала для постоянной плотности // Докл. АН УССР. 1973. № 4. С. 47-49. 2. М и х а л ю к М.Й. Про єдиність розв"язку оберненої задачі логарифмічного потенціалу для постійної густини. У цьому ж Віснику. 3. Р е к т о р и с К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86