УДК 517.512

М.Й.Михалюк

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ СТАЛОЇ ГУСТИНИ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає в тому, щоб відшукати плоску однозв"язну область $\mathcal{D}$, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z = z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область $\mathcal{D}$ площини $z = x+iy$, що містить початок координат, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію $z=z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв"язку нелінійного інтегрального рівняння

$$\sigma \overline{z}_*(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{U_e(z(\tau))d\tau}{\tau - t}, \quad |t|>1, \qquad /1/$$

де

$$z_*(t) = \overline{z\left(\frac{1}{\overline{t}}\right)}, \ |t|>1, \quad U_e(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_e}{\partial z}.$$

Відомо, якщо густина розподілу мас $\sigma = 1$ і $U_e(z)=\frac{1}{z}$, то розв"язком оберненої задачі потенціалу є круг радіуса 1 з центром у початку координат.

Розглянемо випадок, коли

$$U_e(z) = \frac{1}{z}+\frac{a}{z^2}, \quad a = |a|e^{i\arg a},$$

$$0 \le \arg a < 2\pi, \quad \sigma = 1,$$

$$z(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots, \quad \alpha_1 > 0. \qquad /2/$$

Підставляючи /2/ в /1/, отримуємо нелінійну систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} - \dfrac{2a\alpha_2}{\alpha_1^3}, \\ \bar{\alpha}_2 = \dfrac{a}{\alpha_1^2}, \\ \alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = 0, \end{cases} \qquad /3/$$

де $0 < \alpha_1 < 1, \ \alpha_1^2 + 2|\alpha_2|^2 = 1.$
Нехай

$$\alpha_2 = |\alpha_2| e^{i \arg \alpha_2}, \ 0 \le \arg \alpha_2 < 2\pi.$$

Тоді /3/ еквівалентна такій системі

$$\begin{cases} |a| = |\alpha_2| - 2|\alpha_2|^3, \\ |\alpha_2| = \dfrac{|a|}{\alpha_1^2}, \\ \alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = 0, \\ \arg \alpha_2 = -\arg a. \end{cases} \qquad /4/$$

Система /4/ має єдиний розв"язок (α_1, α_2) при $|a|^2 \le \frac{2}{27}$, який задовольняє умову $z'(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t \neq 0$ при $|t| < 1$.

Функція $z = z(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, де (α_1, α_2) розв"язок системи /4/, здійснює конформне відображення круга $|t| < 1$ площини t на деяку однозв"язну область $\mathcal{D}$ площини $z = x + iy$.

Таким чином, існує така теорема.

Теорема. Нехай $U_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2}, \ a = |a| e^{i \arg a},$

$$0 \le \arg a < 2\pi, \ |a|^2 \le \frac{2}{27}, \ \sigma = 1.$$

Тоді обернена задача логарифмічного потенціалу має єдиний розв"язок у класі однозв"язних областей.

Приклад. Нехай $U_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{4z^2}, \ \sigma = 1.$

Тоді функція

$$z(t)=\frac{1}{\sqrt{-1+\sqrt{5}}}t+\frac{-1+\sqrt{5}}{4}t^2, \quad |t|<1$$

здійснює конформне відображення круга $|t|<1$ на однозв"язну область D площини $z=x+iy$ і є розв"язком оберненої задачі логарифмічного потенціалу.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.53

М.В.Заболоцький

СФЕРИЧНА ПОХІДНА ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

Нехай f – ціла функція, $M(r,f)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, $\rho(f(z))=|f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$, $\mu(r,f)=\max\{\rho(f(z)):|z|=r\}$. Відомо [3], що для цілої трансцендентної функції f порядку $\rho<\infty$ виконується нерівність

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{r\mu(r,f)}{\ln M(r,f)}\geq A(\rho+1). \qquad /1/$$

Тут і надалі через A позначаємо додатну абсолютну постійну.

У випадку, коли $\ln M(r,f)$ – повільно зростаюча функція, нерівність /1/ можна уточнити. Нехай $\tau(r)=\sup\{d\ln\ln M(t,f)/d\ln t: t\geq r\}$. Враховуючи, що

$$\ln 2\,\frac{rM'(r,f)}{M(r,f)\ln M(r,f)}\leq\frac{\ln M(2r,f)}{\ln M(r,f)}-1,$$ одержуємо $\tau(r)\downarrow 0, r\to\infty$.

Теорема. Нехай f – ціла функція така, що $\ln M(r,f)$ – повільно зростаюча функція. Тоді для довільного δ, $0<\delta<1$ виконується

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{(\tau(r))^{1-\delta}\,r\mu(r,f)}{\ln M(r,f)}=\infty.$$

При доведенні теореми використовуємо таку лему.

Лема. Для цілої функції f, що задовольняє умови теореми, виконується

$$n(r,f^{-1})=O(\tau(r)\cdot\ln M(r,f)),\ r\to\infty,$$