$$z(t)=\frac{1}{\sqrt{-1+\sqrt{5}}}t+\frac{-1+\sqrt{5}}{4}t^2, \quad |t|<1$$

здійснює конформне відображення круга $|t|<1$ на однозв"язну область D площини $z=x+iy$ і є розв"язком оберненої задачі логарифмічного потенціалу.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.53

М.В.Заболоцький

СФЕРИЧНА ПОХІДНА ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

Нехай f - ціла функція, $M(r,f)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, $\rho(f(z))=$ $=|f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$, $\mu(r,f)=\max\{\rho(f(z)):|z|=r\}$. Відомо [3], що для цілої трансцендентної функції f порядку $\rho<\infty$ виконується нерівність

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{r\mu(r,f)}{\ln M(r,f)}\geq A(\rho+1). \qquad /1/$$

Тут і надалі через A позначаємо додатну абсолютну постійну.

У випадку, коли $\ln M(r,f)$ - повільно зростаюча функція, нерівність /1/ можна уточнити. Нехай $\tau(r)=$ $=\sup\{d\ln\ln M(t,f)/d\ln t : t\geq r\}$. Враховуючи, що

$$\ln 2\,\frac{rM'(r,f)}{M(r,f)\ln M(r,f)}\leq\frac{\ln M(2r,f)}{\ln M(r,f)}-1,$$

одержуємо $\tau(r)\downarrow 0,\ r\to\infty$.

<u>Теорема</u>. Нехай f - ціла функція така, що $\ln M(r,f)$ - повільно зростаюча функція. Тоді для довільного δ, $0<\delta<1$ виконується

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{(\tau(r))^{1-\delta}\, r\mu(r,f)}{\ln M(r,f)}=\infty.$$

При доведенні теореми використовуємо таку лему.

<u>Лема</u>. Для цілої функції f, що задовольняє умови теореми, виконується

$$n(r,f^{-1})=O(\tau(r)\cdot\ln M(r,f)),\ r\to\infty,$$

де $n(r,f^{-1})$ – кількість нулів функції f у крузі $\{z:|z|\le r\}$.

Доведення. Нехай $f(0)=1$. Припустимо, що лема не правильна, тобто існують послідовність (r_k), $r_k\to\infty$, $k\to\infty$, функція $\psi(r)$, $\psi(r)\to\infty$, $r\to\infty$ такі, що

$$n(r_k,f^{-1})\ge\psi(r_k)\tau(r_k)\ln M(r_k,f),\ k\to\infty.$$

З означення $N(r,f^{-1})$ для $r\ge r_k$ маємо

$$N(r,f^{-1})=\int_0^r n(t,f^{-1})d\ln t\ge n(r_k,f^{-1})\ln(r/r_k).$$

Звідси для $\bar r_k=r_k\exp(1/\tau(r_k))$ одержуємо

$$N(\bar r_k,f^{-1})\ge\psi(r_k)\ln M(r_k,f). \qquad /2/$$

Разом з цим, враховуючи $\ln M(\bar r_k,f)\le e\ln M(r_k,f)$ [1], $N(r,f^{-1})\le\ln M(r,f)$, одержуємо $N(\bar r_k,f^{-1})\le e\times$ $\times\ln M(r_k,f)$, що суперечить /2/. Лема доведена.

Доведення теореми. Для цілих функцій $g(z)$ нульового уточненого порядку $\rho(r)$ маємо [2]

$$\ln|g(z)|=N(r,g^{-1})+o(r^{\rho(r)}),\ r\to\infty \qquad /3/$$

для всіх z, $|z|<r$, за винятком множини кругів, сума радіусів яких не більша $Ar\cdot\varepsilon(r)$, де $\varepsilon(r)$ – функція, що задовольняє умови: 1/ $0<\varepsilon(r)<1$, $\varepsilon(r)\downarrow 0$, $r\to\infty$; 2/ $n(2r,g^{-1})=o(\varepsilon(r)\cdot r^{\rho(r)})$, $r\to\infty$.

Нехай функція f задовольняє умови теореми. Приймемо $\varepsilon(r)=(\tau(r))^{1-\delta/2}$, $0<\delta<1$, $r^{\rho(r)}=\ln M(r,f)$. Використовуючи нашу лему, метод доведення теореми 2 і нерівність /12/ з праці [2], співвідношення /3/ для функції f запишемо як

$$\ln|f(z)|=N(r,f^{-1})+o(\varepsilon(r)\cdot\ln M(r,f)),\ r\to\infty.$$

Розглянемо значення $r=|a_i|$, де a_i – нулі функції f. Нехай $z_0=r\cdot e^{i\varphi_0}$ – нуль функції f. Тоді існує R, $r>R>r-2Ar\,\varepsilon(r)$ таке, що

$$\ln|f(Re^{i\varphi_0})|>0{,}5\ln M(R,f).$$

Нехай D – круг з центром в точці $Re^{i\varphi_0}$, в якому $|f(z)|>1$ і $|f(z)|=1$ у деякій точці на границі цього круга. З леми 1 праці [3] і з /4/ одержуємо

$$\rho(f(z')) \geq \frac{A \ln \mathcal{M}(R,f)}{r \cdot \varepsilon(r)}, \; z' \in D. \qquad /5/$$

Враховуючи $\varepsilon(r) \downarrow 0$, $r \to \infty$, маємо для достатньо великих r, $r/2 < R < r$, $r/2 < |z'| = t < r$. Оскільки $\ln \mathcal{M}(R,f) \sim \ln \mathcal{M}(r,f)$, $r \to \infty$ то з /5/ маємо

$$\mu(t,f) \geq A \ln \mathcal{M}(r,f)/(r \cdot \varepsilon(r)) \geq A \ln \mathcal{M}(t,f)(t \cdot \varepsilon(t))^{-1}.$$

Враховуючи $r = |a_i| \to \infty$, $i \to \infty$, а отже, $t \to \infty$, одержуємо твердження теореми.

1. Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф. О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Мат.сб. 1978. Т. 106. № 1. С. 44-65. 2. Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В. Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Мат.заметки. 1983. Т. 34. № 2. С. 227-236. 3. Clunie J., Hayman W. The spherical derivative of integral and meromorphic functions. Comment. Math. Helv., 1966, vol. 40. P. 117-148.

Стаття надійшла до редколегії 08.04.86

УДК 517.53

М.М.Хом"як, М.М.Шеремета

ПРО ЦІЛІ РЯДИ ДІРІХЛЕ СКІНЧЕННОГО НИЖНЬОГО R – ПОРЯДКУ

Для цілої функції F, заданої абсолютно збіжним в $\mathbb{C}$ рядом Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \; s = \sigma + it, \qquad /1/$$

де $0 < \lambda_n \uparrow +\infty \, (n \to \infty)$, приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і через $n(t)$ позначимо лічильну функцію послідовності (λ_n). Якщо $n(t)/t \to \Delta \in [0, +\infty[$, то послідовність (λ_n) називаємо вимірною, а число Δ – її щільністю.

Основним у цій статті є наступне твердження.