$$\rho(f(z')) \geq \frac{A \ln M(R,f)}{r \cdot \varepsilon(r)}, \quad z' \in D. \qquad /5/$$

Враховуючи $\varepsilon(r) \downarrow 0$, $r \to \infty$, маємо для достатньо великих $r$, $r/2 < R < r$, $r/2 < |z'| = t < r$. Оскільки $\ln M(R,f) \sim \ln M(r,f)$, $r \to \infty$ то з /5/ маємо

$$\mu(t,f) \geq A \ln M(r,f)/(r \cdot \varepsilon(r)) \geq A \ln M(t,f)(t \cdot \varepsilon(t))^{-1}.$$

Враховуючи $r = |a_i| \to \infty$, $i \to \infty$, а отже, $t \to \infty$, одержуємо твердження теореми.

1. Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф. О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Мат.сб. 1978. Т. 106. № 1. С. 44-65. 2. Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В. Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Мат.заметки. 1983. Т. 34. № 2. С. 227-236. 3. Clunie J., Hayman W. The spherical derivative of integral and meromorphic functions. Comment. Math. Helv., 1966, vol. 40. P. 117-148.

Стаття надійшла до редколегії 08.04.86

УДК 517.53

М.М.Хом"як, М.М.Шеремета

## ПРО ЦІЛІ РЯДИ ДІРІХЛЕ СКІНЧЕННОГО НИЖНЬОГО $R$ – ПОРЯДКУ

Для цілої функції $F$, заданої абсолютно збіжним в $\mathbb{C}$ рядом Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it, \qquad /1/$$

де $0 < \lambda_n \uparrow +\infty (n \to \infty)$, приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і через $n(t)$ позначимо лічильну функцію послідовності $(\lambda_n)$. Якщо $n(t)/t \to \Delta \in [0, +\infty[$, то послідовність $(\lambda_n)$ називаємо вимірною, а число $\Delta$ – її щільністю.

Основним у цій статті є наступне твердження.

Теорема 1. Нехай показники ряду /1/ такі, що $\Delta = 0$ і $\lambda_{n+1} - \lambda_n > h > 0$ $(\lambda_0 = 0)$. Якщо ряд /1/ задає цілу функцію $F$ скінченного нижнього $R$ -порядку $\lambda_R = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma} \ln\ln M(\sigma, F)$, то має місце рівність

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln^{+}|F(\sigma)|}{\ln M(\sigma,F)} = 1. \qquad /2/$$

Зауважимо, що /2/ у випадку, коли $F$ має $R$ -порядок $\rho_R < \infty$, випливає з доведення теореми 1 із праці [2]. Наша теорема 1 випливає з більш загального результату, для формулювання якого нам потрібне деяке приготування.

Нехай $\mu(\sigma, F)$ і $\nu(\sigma, F)$ – відповідно максимальний член і центральний індекс ряду /1/. Нижньою щільністю $dE$, вимірної множини $E \subset [0, +\infty[$ називаємо величину $dE = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma} mes(E \cap [0,\sigma])$.

Скажемо, що $\Phi \in \Omega_0$, якщо $\Phi$ – додатна опукла зростаюча до $+\infty$, неперервно диференційована на $]-\infty, +\infty[$ функція. Через $\varphi$ позначимо функцію, обернену до $\Phi'$. Скажемо далі, що $\Phi \in \Omega$, коли $\frac{t^2\varphi'(t)}{\ln t} \uparrow +\infty$ $(t_0 \le t \to +\infty)$. Через $S_\Phi$ позначимо клас функцій /1/ такий, що для будь-якої функції $F \in S_\Phi$ існує зростаюча до $+\infty$ послідовність $(\sigma_k)$ додатних чисел, для якої $\ln M(\sigma_k, F) \le \Phi(\sigma_k)$. Приймемо $S(\sigma, F) = \sum_{\lambda_n > 2\lambda_{\nu(\sigma,F)}} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\}$. Має місце наступне твердження.

Лема [1]. Нехай $F \in S_\Phi$, $\Phi \in \Omega$, $\ln n(t) = o(t^2\varphi'(t))$ $(t\to\infty)$ і $\ln n(t) = O(t)$ $(t\to\infty)$. Тоді для всіх $\sigma \ge 0$ поза деякою множиною $E$ з $dE \le \eta$, $0<\eta<1$ виконується нерівність

$$S(\sigma,F)/\mu(\sigma,F) \le \exp\left\{-\frac{\eta}{20}\lambda_\nu^2 \varphi'(\lambda_\nu)\right\}, \quad \nu = \nu(\sigma, F).$$

Використовуючи лему і метод доведення теореми 3 з праці [2], отримуємо результат, який відіграє основну роль при доведенні теореми 1.

Теорема 2. Нехай $\Phi \in \Omega$ і $F \in S_\Phi$. Якщо виконується умова $\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge h > 0$ $(\lambda_0 = 0)$ і

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n(t)}{t^2\varphi'(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{n(t)}{t^2\varphi'(t)} \ln\frac{t}{n(t)} = 0,$$

то для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \ge 0$ поза множиною $E_\varepsilon$ нульової нижньої щільності виконується нерівність

$$\ln M(\sigma,F)\le(1+\varepsilon)\ln\left(\int_{-\infty}^{\sigma}|F(x)-a_0|\,dx\right).$$

Умова $\Delta=0$ в теоремі 1 істотна в тому розумінні [2], що для будь-якої послідовності $(\lambda_n)$, яка задовольняє $\lambda_{n+1}-\lambda_n\ge h>0\ (\lambda_0=0)$ і $\Delta>0$, існує ціла функція /1/, обмежена на дійсній осі, $R$ -порядок якої дорівнює $1/2\,\Delta$. Зауважимо також, що для цілих функцій нульового нижнього $R$ -порядку $(\lambda_R=0)$ співвідношення /2/ справедливе і без виконання умови $\Delta=0$. У цьому випадку на показники достатньо накладати лише умову $\lambda_{n+1}-\lambda_n\ge h>0\ (\lambda_0=0)$.

1. Х о м я к М.М. Метод Вимана - Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле, с условием на рост на некоторой последовательности // Укр.мат.журн. 1983. Т. 35. № 4. С. 527-533.
2. Ш е р е м е т а М.Н. О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле // Мат.заметки. 1983. Т. 33. № 2. С. 235-245.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86

УДК 517.948

Я.В.Микитюк

# ПРО ДИСКРЕТНИЙ СПЕКТР СЛАБО ЗБУРЕНОГО ОПЕРАТОРА МНОЖЕННЯ

Нехай $H\overset{def}{=}L_2(\mathbb{R}),\ H^{\nu}\overset{def}{=}H_2^{\nu}(\mathbb{R})$ - простір Соболєва порядку $\nu\in\mathbb{R}$, $S$ - оператор множення на незалежну змінну в $H$. Розглянемо самоспряжений оператор

$$T=S+V\qquad (V\in\mathcal{B}(H)\ \text{і}\ V=V^*). \qquad /1/$$

Позначимо через $\mathcal{M}$ множину тих операторів $T$ виду /1/, дискретний спектр яких складається зі скінченного числа власних значень скінченної кратності. Якщо $T\in\mathcal{M}$, то нехай $n(T)$ - число власних значень оператора $T$ з врахуванням їх кратності.

У праці [2] вказані достатні умови на $V$, при яких $T\in\mathcal{M}$. Виявляється, їх можна дещо послабити і, що найбільш суттєво, отримати оцінку для числа $n(T)$.