$$\ln M(b,F) \leq (1+\varepsilon)\ln\left(\int_{-\infty}^{b} |F(x)-a_0|\,dx\right).$$

Умова $\Delta = 0$ в теоремі 1 істотна в тому розумінні [2], що для будь-якої послідовності (λ_n), яка задовольняє $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geq h > 0$ $(\lambda_0=0)$ і $\Delta > 0$, існує ціла функція /1/, обмежена на дійсній осі, R -порядок якої дорівнює $1/2\,\Delta$. Зауважимо також, що для цілих функцій нульового нижнього R -порядку $(\lambda_R = 0)$ співвідношення /2/ справедливе і без виконання умови $\Delta = 0$. У цьому випадку на показники достатньо накладати лише умову $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geq h > 0$ $(\lambda_0 = 0)$.

I. Хомяк М.М. Метод Вимана - Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле, с условием на рост на некоторой последовательности // Укр.мат.журн. 1983. Т. 35. № 4. С. 527-533.
2. Шеремета М.Н. О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле // Мат.заметки. 1983. Т. 33. № 2. С. 235-245.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86

УДК 517.948

Я.В.Микитюк

ПРО ДИСКРЕТНИЙ СПЕКТР СЛАБО ЗБУРЕНОГО ОПЕРАТОРА МНОЖЕННЯ

Нехай $H \overset{def}{=} L_2(\mathbb{R})$, $H^\nu \overset{def}{=} H_2^\nu(\mathbb{R})$ - простір Соболєва порядку $\nu \in \mathbb{R}$, S - оператор множення на незалежну змінну в H. Розглянемо самоспряжений оператор

$$T = S + V \quad (V \in \mathcal{B}(H) \text{ і } V = V^*). \tag{1}$$

Позначимо через $\mathcal{M}$ множину тих операторів T виду /1/, дискретний спектр яких складається зі скінченного числа власних значень скінченної кратності. Якщо $T \in \mathcal{M}$, то нехай $n(T)$ - число власних значень оператора T з врахуванням їх кратності.

У праці [2] вказані достатні умови на V, при яких $T \in \mathcal{M}$. Виявляється, їх можна дещо послабити і, що найбільш суттєво, отримати оцінку для числа $n(T)$.

Теорема. Нехай оператор V задовольняє умови
1/ $V\in\mathcal{B}_p(H)$, $p\geq 2$; 2/ $V\in\mathcal{B}(H,H^{\nu})$, $\nu\in]1,3/2[$.
Тоді $T\in\mathcal{M}$, має місце оцінка

$$n(T)\leq C_\nu^p \|V\|_p^p |V|_\nu^{\frac{p}{\nu-1}}, \qquad /2/$$

де $\|V\|_p\overset{def}{=}\|V\|_{\mathcal{B}_p}$; $|V|_\nu\overset{def}{=}\|V\|_{\mathcal{B}(H,H^\nu)}$; C_ν – додатна константа, яка залежить тільки від ν.

Доведення. Зафіксуємо довільний власний вектор f оператора T. Нехай f відповідає власному числу $\xi\in\mathbb{R}$ і $\|f\|=1$. З рівності $(T-\xi)f=0$ випливає, що $Vf(\xi)=0$ і

$$f(x)=-(x-\xi)^{-1}Vf(x). \qquad /3/$$

Відомо [1], що простір H^ν, $\nu\in]1,3/2[$ вкладається в простір Гельдера $C^{\nu-1/2}(\mathbb{R})$. Тому

$$|(x-\xi)^{-1}Vf(x)|\leq z_\nu|x-\xi|^{\nu-3/2}|V|_\nu. \qquad /4/$$

Враховуючи /3/ і /4/, для довільного $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ отримуємо нерівність

$$\|Vf\|^2\geq\varepsilon^2\int\limits_{|x-\xi|\geq\varepsilon}|(x-\xi)^{-1}Vf(x)|^2dx\geq\varepsilon^2-z_\nu|V|_\nu\varepsilon^{2\nu},$$

з якої випливає

$$\|Vf\|\geq\delta\overset{def}{=}d_\nu|V|_\nu^{-\frac{1}{\nu-1}}, \qquad /5/$$

де d_ν – додатна константа, яка залежить тільки від ν.

Нехай X – ортонормована система в H, складена з власних векторів оператора T. З компактності оператора V і нерівності /5/ випливає, що система X є скінченною. Очевидно, що її потужність дорівнює $n(T)$. Неважко переконатися, що для довільної ортонормованої системи $Y\subset H$ і довільного $A\in\mathcal{B}_p(H)$, $p\geq 2$, має місце нерівність $\sum\limits_{e\in Y}\|Ae\|^p\leq\|A\|_p^p$. Враховуючи цю нерівність і нерівність /5/, отримуємо

$$n(T)\leq\delta^{-p}\sum_{e\in X}\|Ve\|^p\leq d_\nu^{-p}\|V\|_p^p|V|_\nu^{\frac{p}{\nu-1}}.$$

Теорема доведена.

1. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980. 2. Фа –

д е е в Л.Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Тр. МИАН. 1964. Т. 73. С. 293-335.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.948

М.М.Федик

ОПЕРАТОР, СПРЯЖЕНИЙ ДО СПОРІДНЕНОГО ПІВТОРАЛІНІЙНІЙ ФОРМІ

Нехай τ - півторалінійна форма з щільною у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ областю визначення $\mathcal{D}(\tau)$, $(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}, \mathcal{H}_-)$ - оснащений гільбертів простір, причому $\mathcal{H}_+ \subseteq \mathcal{D}(\tau)$ і τ обмежена на $\mathcal{H}_+$. Спряженою до τ називається форма τ^*, коли $\forall u, v \in \mathcal{D}(\tau) = \mathcal{D}(\tau^*)$ $\tau^*[u,v] = \overline{\tau[v,u]}$. Форму τ називаємо симетричною, якщо $\forall u, v \in \mathcal{D}(\tau)$ $\tau[u,v] = \tau^*[u,v]$.

Оператор $\hat{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$, такий що $\forall u, v \in \mathcal{H}_+$ $(\hat{T}u|v) = \tau[u,v]$, називаємо оператором, асоційованим з формою τ. Через $(\cdot|\cdot)$ позначаємо скалярний добуток в $\mathcal{H}$ і значення функціоналу з $\mathcal{H}_-$ на елементі з $\mathcal{H}_+$. Звуження оператора $\hat{T}$ на $\{u \in \mathcal{H}_+ \mid \hat{T}u \in \mathcal{H}\}$ позначаємо через T і називаємо оператором, індукованим формою τ. Докладніше такі оператори описані в працях [3, 4]. Відзначимо лише, що з існування такого $\zeta \in \mathbb{C}$, коли $\hat{T} - \zeta$ - біекція $\mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$, випливає $T \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$ [4].

Легко побачити, що оператор $\hat{T}$ є оператором, асоційованим з формою τ^*. Зокрема, коли форма τ симетрична, то $\hat{T} = \hat{T}^*$. Оператор, індукований формою τ^*, позначимо через $\tilde{T}^*$. Очевидно, що $\forall u \in \mathcal{D}(T)\ \forall v \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*)$ $(Tu|v) = (u|\tilde{T}^* v)$, тобто $\tilde{T}^* \subseteq T^*$. Крім того, у випадку симетричної форми $T = \tilde{T}^*$. Однак, взагалі кажучи, $\tilde{T}^* \neq T^*$, причому співвідношення $\tilde{T}^* \neq T^*$ може мати місце і тоді, коли форма τ симетрична. Приклад симетричної форми, для якої $\tilde{T}^* \neq T^*$, наведено у праці [4]. Там же показано, що $\tilde{T}^* = T^*$ тоді і лише тоді, коли $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{H}_+$. З цього випливає такий наслідок.