д е е в Л.Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Тр. МИАН. 1964. Т. 73. С. 293-335.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.948

М.М.Федик

ОПЕРАТОР, СПРЯЖЕНИЙ ДО СПОРІДНЕНОГО ПІВТОРАЛІНІЙНІЙ ФОРМІ

Нехай τ - півторалінійна форма з щільною у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ областю визначення $\mathcal{D}(\tau)$, $(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}, \mathcal{H}_-)$ - оснащений гільбертів простір, причому $\mathcal{H}_+ \subseteq \mathcal{D}(\tau)$ і τ обмежена на $\mathcal{H}_+$. Спряженою до τ називається форма τ^*, коли $\forall u, v \in \mathcal{D}(\tau) = \mathcal{D}(\tau^*)$ $\tau^*[u,v] = \overline{\tau[v,u]}$. Форму τ називаємо симетричною, якщо $\forall u, v \in \mathcal{D}(\tau)$ $\tau[u,v] = \tau^*[u,v]$.

Оператор $\hat{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$, такий що $\forall u, v \in \mathcal{H}_+$ $(\hat{T}u|v) = \tau[u,v]$, називаємо оператором, асоційованим з формою τ. Через $(\cdot|\cdot)$ позначаємо скалярний добуток в $\mathcal{H}$ і значення функціоналу з $\mathcal{H}_-$ на елементі з $\mathcal{H}_+$. Звуження оператора $\hat{T}$ на $\{u \in \mathcal{H}_+ / \hat{T}u \in \mathcal{H}\}$ позначаємо через T і називаємо оператором, індукованим формою τ. Докладніше такі оператори описані в працях [3, 4]. Відзначимо лише, що з існування такого $\zeta \in \mathbb{C}$, коли $\hat{T} - \zeta$ - біекція $\mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$, випливає $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ [4].

Легко побачити, що оператор $\hat{T}$ є оператором, асоційованим з формою τ^*. Зокрема, коли форма τ симетрична, то $\hat{T} = \hat{T}^*$. Оператор, індукований формою τ^*, позначимо через $\tilde{T}^*$. Очевидно, що $\forall u \in \mathcal{D}(T)$ $\forall v \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*)$ $(Tu|v) = (u|\tilde{T}^*v)$, тобто $\tilde{T}^* \subseteq T^*$. Крім того, у випадку симетричної форми $T = \tilde{T}^*$. Однак, взагалі кажучи, $\tilde{T}^* \neq T^*$, причому співвідношення $\tilde{T}^* \neq T^*$ може мати місце і тоді, коли форма τ симетрична. Приклад симетричної форми, для якої $\tilde{T}^* \neq T^*$, наведено у праці [4]. Там же показано, що $\tilde{T}^* = T^*$ тоді і лише тоді, коли $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{H}_+$. З цього випливає такий наслідок.

Наслідок. Якщо форма τ симетрична і $u\in\mathcal{D}(T^*)\cap\mathcal{H}_+$, то $u\in\mathcal{D}(T)$. Зокрема, оператор T самоспряжений тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{D}(T^*)\subset\mathcal{H}_+$.

Зауваження. Оператор T, взагалі кажучи, відрізняється від оператора з праці [1] і названий там оператором, асоційованим з формою τ. Однак, якщо $\mathcal{H}_+=\mathcal{D}(\tau)$ як лінійні простори, то вказані оператори суміщаються. Якщо ж, крім того, форма τ симетрична і обмежена знизу, то $T=T^*$ [1].

Нехай $\mathcal{F}$ – замкнений підпростір в $\mathcal{H}_-$, причому

$$\mathcal{F}\cap\mathcal{H}=\{0\}. \qquad /1/$$

Визначимо оператор $T_\mathcal{F}$ так, що $\mathcal{D}(T_\mathcal{F})=\{u\in\mathcal{H}_+ \mid \exists f\in\mathcal{F}\ \hat{T}u+f\in\mathcal{H}\}$, $\forall u\in\mathcal{D}(T_\mathcal{F})\ T_\mathcal{F}u=\hat{T}u+f$. Легко побачити, що $T\subset T_\mathcal{F}$. Через $(T^*)_\mathcal{F}$ позначаємо аналогічний оператор для форми τ^*. Якщо форма τ симетрична, то з $\hat{T}=\hat{T}^*$ і /1/ отримуємо рівність $T_\mathcal{F}=(T^*)_\mathcal{F}$.

Нехай далі $(\Gamma,(G_+,G,G_-))$ – крайова пара для $(\mathcal{H}_+,\mathcal{H},\mathcal{H}_-)$, тобто (G_+,G,G_-) – оснащений гільбертів простір, $\Gamma\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_+,G_+)$, причому $R(\Gamma)=G_+$, $\overline{Z(\Gamma)}=\mathcal{H}$. Відзначимо, що умова $\overline{Z(\Gamma)}=\mathcal{H}$ еквівалентна умові $R(\Gamma^*)\cap\mathcal{H}=\{0\}$ [4]. Приймемо $\mathcal{F}=R(\Gamma^*)$. Звуження оператора $T_\mathcal{F}$ на $Z(\Gamma)$ називаємо оператором, спорідненим формі τ, і позначаємо його через T_Γ. Оператор, спряжений в $\mathcal{H}$ до оператора T_Γ, позначаємо через T_Γ^*, а оператор, споріднений формі τ^* /тобто звуження на $Z(\Gamma)$ оператора $(T^*)_\mathcal{F}$/ – через $(T^*)_\Gamma$.

У праці [4] показано, що оператор T_Γ є оператором, індукованим формою τ в $(Z_+,\mathcal{H},Z_-)$, де $Z_+=Z(\Gamma)$ з нормою простору $\mathcal{H}_+$. Тому оператори T_Γ і $(T^*)_\Gamma$ мають ті ж властивості, що й оператори T і T^*. Зокрема, $(T^*)_\Gamma\subseteq T_\Gamma^*$.

Позначимо через T_0 спільне звуження операторів T і T_Γ на $\mathcal{D}(T)\cap\mathcal{D}(T_\Gamma)$. Вважаємо $T, T_\Gamma\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$.

Теорема 1.

$$\mathcal{D}(T_0)=\mathcal{D}[T]\ominus\hat{\Lambda}_T^{-1}R(\Gamma^*), \qquad /2/$$

де $\hat{\Lambda}_T^{-1}$ – оператор, асоційований зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)_T$ графіка оператора T; $\mathcal{D}[T]$ – гільбертів простір $\mathcal{D}(T)$ з $(\cdot|\cdot)_T$. При цьому $T_0\in\mathcal{C}(\mathcal{H})\Leftrightarrow Cl_{(\mathcal{D}[T])'}R(\Gamma^*)\cap\mathcal{H}=\{0\}$.

Припустимо, що

$$T_0, T_\mathcal{F}\in\mathcal{C}(\mathcal{H}). \qquad /3/$$

Тоді $S_0 := T_F^*$ і $S := T_0^*$ також належать $\mathcal{G}(\mathcal{H})$. Використовуючи властивості пар замкнених операторів [2, 3], отримуємо таку теорему.

Теорема 2. Справедливі співвідношення

$$\mathcal{D}(T_F) = \mathcal{D}(T)\oplus T^*(1+\hat{T}T^*)^{-1}R(\Gamma^*), \qquad /4/$$

$$\mathcal{D}(T_\Gamma) = \mathcal{D}(T_0)\oplus T^*(1+\hat{T}T^*)^{-1}R(\Gamma^*), \qquad /5/$$

де ортогональність відносно скалярного добутку графіка оператора T_F. Крім того,

$$\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(S_0)\oplus(1+\hat{T}T^*)^{-1}R(\Gamma^*), \qquad /6/$$

$$\mathcal{D}(T_\Gamma^*) = \mathcal{D}(S_0)\oplus T\hat{\Lambda}_T^{-1}R(\Gamma^*), \qquad /7/$$

де ортогональність відносно скалярного добутку графіка оператора S. При цьому $\forall f\in R(\Gamma^*)$

$$T_\Gamma T^*(1+\hat{T}T^*)^{-1}f = -(1+\hat{T}T^*)^{-1}f, \quad T_\Gamma^* T\hat{\Lambda}_T^{-1}f = -\hat{\Lambda}_T^{-1}f. \qquad /8/$$

Зауваження. Вираз $(1+\hat{T}T^*)^{-1}R(\Gamma^*)$ має смисл для будь-якої крайової пари, оскільки оператор $(1+\hat{T}T^*)^{-1}$ визначений на всьому просторі $\mathcal{H}_-$ [4].

Теорема 3. Нехай форма τ симетрична. Якщо оператор T самоспряжений, то для будь-якої крайової пари, для якої виконується /3/, оператор T_Γ самоспряжений.

Навпаки, коли існує така крайова пара, що виконується /3/ і оператор T_Γ самоспряжений, то оператор T також самоспряжений.

Доведення. Зауважимо спочатку, що $\forall u\in\mathcal{D}(\hat{T}^*T)$ $\forall v\in\mathcal{D}(T)$ $(\hat{\Lambda}_T u|v) = (u|v)_T = (u|v) + (Tu|Tv) = ((1+\hat{T}^*T)u|v)$, тобто на $\mathcal{D}(\hat{T}^*T)$ оператор $\hat{\Lambda}_T$ дорівнює $1+\hat{T}^*T$. Крім того, оскільки τ симетрична, то $\hat{T} = \hat{T}^*$.

Нехай оператор T самоспряжений. Тоді $(1+\hat{T}T^*)^{-1} = (1+\hat{T}^*T)^{-1} = (1+\hat{T}T)^{-1}$. Таким чином, звуження оператора $\hat{\Lambda}_T^{-1}$ на $\mathcal{H}_-$ дорівнює оператору $(1+\hat{T}T^*)^{-1}$ і $\hat{\Lambda}_T^{-1}R(\Gamma^*) = (1+\hat{T}T^*)^{-1}R(\Gamma^*)$. З /6/, /7/, враховуючи /2/ і /5/, отримуємо $\mathcal{D}(T_\Gamma) = \mathcal{D}(T_\Gamma^*)$ і, оскільки $T_\Gamma = (T^*)_\Gamma \subset T_\Gamma^*$, то $T_\Gamma = T_\Gamma^*$. Вказана рівність виконується при будь-якій крайовій парі, для якої справедливо /3/.

Навпаки, нехай для $(\Gamma, (G_+, G, G_-))$ виконується /3/ і $T_r = T_r^*$. Оскільки оператор T_r індукований в $(Z_+, \mathcal{H}, Z_-)$ звуженням форми τ і $\mathcal{D}(T_r^*) = \mathcal{D}(T_r) \subset Z_+ \subset \mathcal{H}_+$, то з наведеного вище наслідку випливає, що $\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{D}(T_r^*) \cap \mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(T_r) = \mathcal{D}(T_0)$. Разом з цим, оскільки $T \subset T^*$, то $\mathcal{D}(T_0) \subset \mathcal{D}(S_0)$. Таким чином, $\mathcal{D}(T_0) = \mathcal{D}(S_0)$. З /5/ і /7/ записуємо $T^*(1+\hat{T}T^*)^{-1} R(\Gamma^*) = T\hat{\Lambda}_T^{-1} R(\Gamma^*)$. Враховуючи /8/, отримуємо $\hat{\Lambda}_T^{-1} R(\Gamma^*) = (1+\hat{T}T^*)^{-1} R(\Gamma^*)$. Тоді з /2/ і /6/ маємо $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$, тобто оператор T самоспряжений.

1. К а т о Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972. 2. Л я н ц е В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. // Теория функций, функциональный анализ и их приложение. 1972. Вып. 16. С. 165-186. 3. Л я н ц е В.Э., С т о р о ж О.Г. Методы теории неограниченных операторов. К., 1983. 4. Л я н ц е В.Э., Ф е д и к М.Н. Операторы, связанные с полуторалинейными формами. Львов, 1985. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2590 - Ук85.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.958 : 532.529

І.М.Дронюк

РІВНЯННЯ ДИФУЗІЙНОЇ МОДЕЛІ РУХУ ДВОКОМПОНЕНТНОЇ СУМІШІ

Система рівнянь, що описує рух двокомпонентної суміші, містить рівняння балансу маси, імпульсу, моменту інерції і моменту кількості руху. Ці рівняння, записані на основі багатоконтинуумного підходу, мають такий вигляд:

$$\frac{d_i \rho_i}{d\tau} + \rho_i \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = Q_i ; \qquad /1/$$

$$\rho_i \frac{d_i \vec{v}_i}{d\tau} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}_i + \vec{F}_i + \vec{P}_i - Q_i \vec{v}_i ; \qquad /2/$$

$$\frac{d_i k_i}{d\tau} + k_i \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = K_i ; \qquad /3/$$