де $\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial}{\partial\xi}\vec{i}^{w} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, а під $\vec{v}_i$ слід розуміти радіальний вектор $\vec{v}_i^{\,\theta}$.

Система рівнянь /16/-/23/ є дифузійним наближенням для опису руху двокомпонентної суміші стосовно процесу грануляції.

1. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М., 1974. 2. Классен П.В., Гришаев И.Г. Основы техники гранулирования. М., 1982. 3. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М., 1978.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.968

О.М.Гісь

ГАЛУЖЕННЯ РОЗВ"ЯЗКІВ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ СИНТЕЗУ АНТЕН

Розглянемо інтегральне рівняння, яке виникає в задачі синтезу лінійних антен [3]

$$f(s,c) = \int_{-1}^{1} F(t)K(s,t,c)e^{i\arg f(t,c)}dt, \qquad /1/$$

де $f(s,c)$ - шукана комплексна функція, так звана діаграма направленості; $F(t)$ - задана дійсна функція; $K(s,t,c) = \sin c(s-t)/(\pi\cdot(s-t))$; c - числовий параметр.

У рівняння /1/ нелінійно входить параметр c, при певних значеннях якого відбуваються галуження відомих розв"язків даного рівняння. У праці [3] з допомогою відомої методики [1] досліджується галуження первісного розв"язку

$$f_0(s,c) = \int_{-1}^{1} F(t)K(s,t,c)dt. \qquad /2/$$

Ми аналізуємо ще один первісний розв"язок рівняння /1/

$$f_1(s,c) = \int_{-1}^{1} F(t)K(s,t,c)\,\mathrm{sign}(t-\rho_0)dt, \qquad /3/$$

де $\rho_0 = \rho_0(c)$ визначається з

$$f_1(\rho_0,c) = 0. \qquad /4/$$

Ставимо задачу визначення точок галуження розв"язку $f_1(S,C)$, а також отримання в явному вигляді головних членів відгалужених розв"язків.

Методика [1] передбачає аналітичну нелінійність підінтегрального виразу рівняння /1/ при $f(t,c)=f_1(t,c)$. У розглянутому випадку існує особливість, зв"язана з проходженням функції $f_1(S,C)$ через нуль при $S=\rho_0$. Для цього випадку пропонується інший підхід, що грунтується на використанні дробово-степеневих рядів.

Зобразимо функцію $f(S,C)$ у вигляді $f(S,C)=x(S,C)+iy(S,C)$ і надалі замість рівняння /1/ розглядатимемо відповідну систему дійсних рівнянь відносно $x(S,C)$ та $y(S,C)$. Збурюючи параметр C, запишемо розв"язок у вигляді, зручному для врахування неаналітичного характеру підінтегральних виразів

$$\begin{cases} x(S,C)=f_1(S,\bar{C})+u(S,\bar{C},\varepsilon), \\ y(S,C)=f_1(S,\bar{C})\cdot v(S,\bar{C},\varepsilon), \\ c=\bar{c}+\varepsilon. \end{cases} \qquad /5/$$

Для достатньо малих $|u(S,\bar{C},\varepsilon)|$, $|v(S,\bar{C},\varepsilon)|$, ε отримуємо

$$\begin{cases} u(S,\bar{C},\varepsilon)=\varepsilon\int\limits_{-1}^{1}A_{001}(s,t,\bar{c})dt+\sum\limits_{m+n+p=2}^{3}\varepsilon^p\int\limits_{-1}^{1}A_{mnp}(s,t,\bar{c})\times \\ \times\, u^m(t,\bar{c},\varepsilon)\,v^n(t,\bar{c},\varepsilon)dt+\ldots, \\ f_1(s,\bar{c})\,v(s,\bar{c},\varepsilon)-\int\limits_{-1}^{1}F(t)K(s,t,\bar{c})\,sign(t-\rho_0)\,v(t,\bar{c},\varepsilon)dt= \\ =\sum\limits_{m+n+p=2}^{3}\varepsilon^p\int\limits_{-1}^{1}B_{mnp}(s,t,\bar{c})\,u^m(t,\bar{c},\varepsilon)\,v^n(t,\bar{c},\varepsilon)dt+\ldots, \end{cases} \qquad /6/$$

/7/

де $A_{mnp}(s,t,\bar{c})$, $B_{mnp}(s,t,\bar{c})$ - коефіцієнти розкладів підінтегральних виразів по U^m, V^n, ε^p у точці $x=f_1$, $y=0$, $c=\bar{c}$. Крапками замінено доданки, в яких сумарний показник степеня перевищує відповідно два і три. Відмінні від нуля тільки коефіцієнти

$A_{001}, A_{002}, A_{020}, B_{010}, B_{011}, B_{110}, B_{111}, B_{012}, B_{210}, B_{030}$.

Точками галуження можуть бути [1] тільки такі $c=c_i$, для яких одиниця є власним значенням ϑ лінійного однорідного рівняння третього роду,

$$\vartheta \cdot f_1(s,\bar{c})\varphi(s,\bar{c}) = \int_{-1}^{1} F(t)K(s,t,\bar{c})\,\mathrm{sign}(t-\rho_0)\varphi(t,\bar{c})\,dt. \qquad /8/$$

Залежно від кратності цього власного значення розрізняють точки галуження першого і другого типу.

<u>Точки галуження першого типу</u>. Власні функції рівняння /8/ можна виписати у явному вигляді [4]

$$\varphi_1(s,c_1)=1,\ \varphi_2(s,c_1)=\frac{s-\rho_0(c_1)}{1+\eta_1 s}, \qquad /9/$$

де значення параметрів η_1, c_1, $\rho_0(c_1)$ визначаються з системи

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} F(t)\sin c_1 t\,\mathrm{sign}(t-\rho_0)\,dt/(1+\eta_1 t)=0, \\ \int_{-1}^{1} F(t)\cos c_1 t\,\mathrm{sign}(t-\rho_0)\,dt/(1+\eta_1 t)=0 \end{cases} \qquad /10/$$

разом з рівнянням /4/.

Рівняння /7/ можна розглядати як неоднорідне лінійне рівняння третього роду. Необхідною умовою існування його розв"язку є ортогональність правої частини до власних функцій $\psi_\ell(s,c)$ $(\ell=1,2)$ спряженого однорідного рівняння, які також вдається виписати в явному вигляді

$$\begin{cases} \psi_1(s,c_1)=F(s)\,\mathrm{sign}(s-\rho_0)\,\varphi_1(s,c_1), \\ \psi_2(s,c_1)=F(s)\,\mathrm{sign}(s-\rho_0)\,\varphi_2(s,c_1), \end{cases} \qquad /11/$$

У старшому порядку умови ортогональності мають вигляд

$$\int_{-1}^{1}\psi_{\ell}(s,c_1)\sum_{m+n+p=2}^{3}\varepsilon^{p}\int_{-1}^{1}B_{mnp}(s,t,c_1)U^{m}(t,c_1,\varepsilon)\times$$

$$\times V^{n}(t,c_1,\varepsilon)\,dt\,ds=0. \qquad /12/$$

Рівняння /6/, /7/, /12/ є вихідною системою для визначення $U(s,c_1,\varepsilon)$, $V(s,c_1,\varepsilon)$. Запишемо ці функції у вигляді рядів по дробових степенях приросту ε

$$U(s,c_1,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}U_i(s,c_1)+O(\varepsilon),$$

$$V(s,c_1,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}V_i(s,c_1)+O(\varepsilon), \qquad /13/$$

де $\beta=\varepsilon^{1/K}$. Для знаходження числа K введемо формальне представлення $\varepsilon=\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}\mu_i$ /$\mu_i=0$ при $i<K$, $\mu_K=1$ / і вважатимемо надалі μ_i невідомими. Підставимо співвідношення /13/ у систему рівнянь /6/, /7/, /12/. Отримаємо нову систему відносно невідомих U_i, V_i, μ_i :

$$\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}U_i(s,c_1)+O(\beta^{K})=\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}\mu_i\int_{-1}^{1}A_{001}(s,t,c_1)\,dt+$$

$$+\sum_{m+n+p=2}^{3}\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}\int_{-1}^{1}A_{mnp}(s,t,c_1)R_i(t,c_1)\,dt,$$

$$f_1(s,c_1)\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}V_i(s,c_1)-\int_{-1}^{1}F(t)K(s,t,c_1)\,\mathrm{sign}(t-\rho_0)\times \qquad /14/$$

$$\times V_i(t,c_1)\,dt=\sum_{m+n+p=2}^{3}\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}\int_{-1}^{1}B_{mnp}(s,t,c_1)R_i(t,c_1)\,dt,$$

$$\int_{-1}^{1}\psi_{\ell}(s,c_1)\sum_{m+n+p=2}^{3}\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}\int_{-1}^{1}B_{mnp}(s,t,c_1)R_i(t,c_1)\,dt\,ds=0.$$

де коефіцієнти $R_i(t,c_1)$ мають вигляд

$$R_i = T_i(w_1) + w_2 \cdot DT_{i-1}(w_1 + \frac{1}{2}[D^2 T_{i-1}(w_1) \times$$

$$\times w_2^2 + DT_{i-2}(w_1) \times w_3] + \dots \qquad /15/$$

при позначеннях

$$w = (u, v, \varepsilon),\ w_i = (u_i, v_i, \mu_i),\ T_j(w) = \sum_{m+n+p=j} u^m v^n \varepsilon^p. \qquad /16/$$

У формулі /15/ $m = m_1 + m_2 + m_3$ – індекс диференціювання $D^m = D_1^{m_1} \cdot D_2^{m_2} \cdot D_3^{m_3}$, а $w_i^m = u_i^{m_1} v_i^{m_2} \mu_i^{m_3}$. Співвідношення /15/ можна отримати з [5] шляхом підстановки виразів /13/ у рівність /16/, впорядковуючи останню по степенях β.

Прирівнюючи у виразах /14/ коефіцієнти при однакових степенях β до нуля, одержуємо систему рівнянь для нижчих порядків, розв"язок якої існує лише при $\mu_1 = 0$. Він має вигляд $w_1 = (0, \sum_{i=1} a_i \varphi_i(s,c_1), 0)$. Таким чином, K не може дорівнювати одиниці.

Для визначення $w_2 = (u_2, v_2, \mu_2)$ прирівнюємо в /14/ коефіцієнти при наступних степенях β. Враховуючи уже відоме w_1, дістаємо, що одержана при цьому система має розв"язок при $\mu_2 = 1$. Тому $K = 2$, а $\beta = \varepsilon^{1/2}$. Із умов ортогональності знаходимо $a_1 = 0$,

$$a_2 = \pm \sqrt{\frac{2\int_{-1}^{1} \psi_2(s,c_1) \int_{-1}^{1} A_{001}(s,t,c_1)[\varphi_2(t,c_1) - \varphi_2(s,c_1)]\,dt\,ds}{\int_{-1}^{1} \psi_2(s,c_1)\varphi_2(s,c_1)[f_1(s,c_1)\varphi_2^2(s,c_1) - \int_{-1}^{1} B_{010}(s,t,c_1)\varphi_2^2(t,c_1)\,dt]\,ds}}$$

Значення коефіцієнтів a_1, a_2 дають змогу виписати в явному вигляді головні члени розв"язків $x(s,c_1)$, $y(s,c_1)$ при збуренні $c = c_1 + \varepsilon$:

$$\begin{cases} x(s,c) = f_1(s,c_1) + \varepsilon\Big[\int_{-1}^{1} A_{001}(s,t,c_1)\,dt + \\ + a_2 \int_{-1}^{1} A_{020}(s,t,c_1)\,\varphi_2^2(t,c_1)\,dt\Big] + O(\varepsilon), \\ y(s,c) = a_2 \sqrt{\varepsilon}\, f_1(s,c_1)\,\varphi_2(s,c_1) + O(\varepsilon). \end{cases} \qquad /17/$$

Співвідношення /17/ є новим комплексним розв"язком, який відгалужується від відомого розв"язку $f_1(S, C_1)$ у точці $C = C_1$ значення якої визначається із системи /4/-/10/.

Точки галуження другого типу. Для заданої парної функції $F(S)$ існує ще один тип точок галуження $C = C_2$ і три власні функції рівняння /8/

$$\varphi_1(S,C_2)=1, \quad \varphi_2(S,C_2)=\frac{1}{1+\eta_2 S^2}, \quad \varphi_3(S,C_2)=\frac{S}{1+\eta_2 S^2}, \qquad /18/$$

де точки C_2 і параметр η_2 визначаються із системи

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} F(t)\,\mathrm{sign}\,t \; \sin C_2 t\, dt/(1+\eta_2 t^2) = 0, \\ \int_{-1}^{1} F(t)\,\mathrm{sign}\,t \cdot t \cos C_2 t\, dt/(1+\eta_2 t^2) = 0. \end{cases} \qquad /19/$$

Міркуючи аналогічно до попередніх викладок, одержуємо розв"язок у точці галуження $C = C_2 + \varepsilon_1$ у вигляді

$$\begin{cases} x(S,C) = f_1(S,C_2) + \varepsilon\Big[\int_{-1}^{1} A_{001}(S,t,C_2)\,dt + \\ + \int_{-1}^{1} A_{020}(S,t,C_2)\big(b_2\varphi_2(t,C_2)+b_3\varphi_3(t,C_2)\big)^2 dt\Big] + O(\varepsilon), \\ y(S,C) = \sqrt{\varepsilon}\, f_1(S,C_2)\big(b_2\varphi_2(t,C_2)+b_3\varphi_3(t,C_2)\big)^2 + O(\varepsilon). \end{cases} \qquad /20/$$

Отже, для первісного розв"язку /3/ рівняння /1/ існують точки галуження двох типів, значення яких визначаються відповідно з систем рівнянь /4/-/10/ і /19/. Головні члени відгалужених розв"язків записані в явному вигляді /формули /17/-/20//. Описаним способом можна досліджувати галуження розв"язків нелінійних інтегральних рівнянь з особливостями, зв"язаними з певного типу неаналітичністю їх підінтегральних виразів.

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969. 2. Войтович Н.Н. О синтезе антенны по заданной амплитудной диаграмме излучения // Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17 № 12. С. 2491-2497. 3. Войтович Н.Н., Савенко П.А. Ветвление решений задачи синтеза антенн по заданной амплитудной диаграмме направленности // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21. № 4.

С. 723-729. 4. Войтович Н.Н., Савенко П.А. Об одном интегральном уравнении теории синтеза антенн // Мат.методы и физ.-мех. поля. 1975. Вып. 2. С. 161-163. 5. Насыров Н.С. Построение малых решений нелинейного интегрального уравнения методом разветвляющихся итераций // Нелинейные колебания и теория упругости. 1981. Т. 8. С. 89-97.

Стаття надійшла до редколегії 21.01.86

УДК 539.014

О.І.Васюник

ПОБУДОВА РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЗВАРЮВАНИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК

Розглянемо дві вільні на краях, тонкі, постійної товщини $2h$ однорідні, ізотропні, пружні конічні оболонки, віднесені до однієї і тієї ж канонічної ортогональної системи координат S, β, γ /$(S_1 \leq S \leq S_0)$ - оболонка 1, $S_0 < S \leq S_2$ - оболонка 2, які зварені стиковим кільцевим швом вздовж поверхні $S = S_0$ контактною зваркою/. Тут S - координата, що змінюється вздовж твірної; β - кут, утворений довільною і початковою меридіональними площинами $(0 \leq \beta \leq \beta_2)$; γ - координата, яка визначає положення точки вздовж нормалі до серединної поверхні оболонок $(-h \leq \gamma \leq h)$.

У процесі зварювання додатково підігріваються області оболонок $S_0 \leq S_2 \leq S \leq S_{22} < S_2$, $S_1 \leq S_{11} \leq S \leq S_{12} \leq S_0$. Позначимо температурне поле зварювання $t_0(S, \gamma, \tau)$, а додаткового підігріву - $t_1(S, \gamma, \tau)$. Тоді

$$t = t_0 + t_1 . \qquad /1/$$

Обмежимось розглядом задачі для моментів часу, коли зварювані оболонки не взаємодіють між собою вздовж перерізу $S = S_0$, а на краях виконуються умови вільних країв. У зв"язку з цим розглянемо побудову розв"язку задачі лише для області $S_1 < S \leq S_0$.

При заданому осесиметричному температурному полі задача про визначення напружень і деформацій у конічній оболонці зводиться до розв"язання двох ключових рівнянь [1, 3]

$$\ddot{V} + \frac{1}{S}\dot{V} - \frac{1}{S^2}V - \frac{m\,ctg\,\mu}{S}\theta = \alpha_t m \dot{T}_1,$$